UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS	Ejercicios del ALUMNO	
	APELLIDOS	
	NOMBRE	D.N.I. nº.
	ASIGNATURA	GRUPO
	CURSO	№ DE MATRICULA FECHA

### GEOMETRIA DE VARIEDADES

Curso 2010-11

# Examen final de Febrero PRIMERA PARTE: de 16:00 a 17:15

Sea  $\phi: M \to \bar{M}$  una aplicación diferenciable entre variedades. Se dice que los campos  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  están  $\phi$ -relacionados, si  $\phi_*V(p) = \bar{V}(\phi(p))$  para todo  $p \in M$ .

Demostrar que están  $\phi$ -relacionados si y solo si  $\phi$  transforma curvas integrales de V en curvas integrales de  $\bar{V}$ .

Supuesto que V y  $\bar{V}$  están  $\phi$ -relacionados se pide:

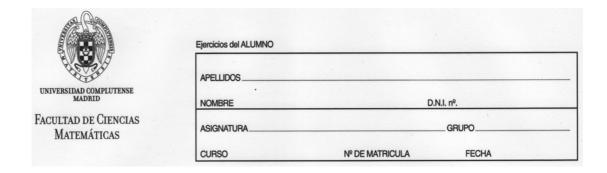
1. Probar que si  $\phi$  es suprayectiva se verifica la implicación

$$V$$
 completo  $\Rightarrow \bar{V}$  completo

2. Demostrar que si  $\phi: M \to \phi(M)$  es homeomorfismo y  $\phi(M)$  es cerrado en  $\overline{M}$ , entonces

$$\bar{V}$$
 completo  $\Rightarrow V$  completo

- 3. Estudiar si en las condiciones indicadas se verifican las implicaciones recíprocas ( $\Leftarrow$ ).
- 4. Discutir la implicación  $\bar{V}$  completo  $\Rightarrow V$  completo en el supuesto de que  $\phi$  sea difeomorfismo local.



### GEOMETRIA DE VARIEDADES

Curso 2010-11

Examen final de Febrero SEGUNDA PARTE: de 17:45 a 20:15

## Ejercicio 1

Determinar el abierto maximal de  $\mathbb{R}^3$  en donde los campos

$$X = zx\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}; \ Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

definen una distribución bidimensional  $\mathcal{D}$  y demostrar que la superficie S de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  es una variedad integral maximal. Probar que de hecho  $\mathcal{D}$  es integrable, y todas sus integrales son superficies de revolución alrededor del eje Z. Determinar explícitamente otra variedad integral maximal de  $\mathcal{D}$  distinta de S.

Estudiar si X o Y son campos de Killing en  $\mathbb{R}^3_0$  y si inducen o no campos de Killing en S

#### Ejercicio 2

Demostrar que  $G = \mathbb{R}^3$  con la operación

$$(a, b, c)(x, y, z) = (a + x + cy, b + y, c + z)$$

tiene estructura de grupo de Lie. Determinar su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Calcular las subálgebras de Lie bidimensionales de  $\mathfrak g$  y los subgrupos de Lie bidimensionales de G.