UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE D.N.I. nº.

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO Nº DE MATRICULA FECHA

GEOMETRIA DE VARIEDADES

Curso 2010-11

Examen final de Febrero

PRIMERA PARTE: de 16:00 a 17:15

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades. Se dice que los campos $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ están ϕ-relacionados, si $\phi_* V(p) = \bar{V}(\phi(p))$ para todo $p \in M$.

Demostrar que están ϕ-relacionados si y solo si ϕ transforma curvas integrales de V en curvas integrales de $\bar{V}$.

Supuesto que V y $\bar{V}$ están ϕ-relacionados se pide:

1. Probar que si ϕ es suprayectiva se verifica la implicación
$$V \text{ completo } \Rightarrow \bar{V} \text{ completo}$$

2. Demostrar que si $\phi : M \to \phi(M)$ es homeomorfismo y $\phi(M)$ es cerrado en $\overline{M}$, entonces
$$\bar{V} \text{ completo} \Rightarrow V \text{ completo}$$

3. Estudiar si en las condiciones indicadas se verifican las implicaciones recíprocas ($\Leftarrow$).

4. Discutir la implicación $\bar{V}$ *completo* $\Rightarrow V$ *completo* en el supuesto de que ϕ sea difeomorfismo local.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE		D.N.I. nº.
ASIGNATURA		GRUPO
CURSO	Nº DE MATRICULA	FECHA

GEOMETRIA DE VARIEDADES
Curso 2010-11
Examen final de Febrero
SEGUNDA PARTE: de 17:45 a 20:15

Ejercicio 1

Determinar el abierto maximal de $\mathbb{R}^3$ en donde los campos

$$X = zx\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z};\ Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

definen una distribución bidimensional $\mathcal{D}$ y demostrar que la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ es una variedad integral maximal. Probar que de hecho $\mathcal{D}$ es integrable, y todas sus integrales son superficies de revolución alrededor del eje Z. Determinar explícitamente otra variedad integral maximal de $\mathcal{D}$ distinta de S.

Estudiar si X o Y son campos de Killing en $\mathbb{R}^3_0$ y si inducen o no campos de Killing en S

Ejercicio 2

Demostrar que $G = \mathbb{R}^3$ con la operación

$$(a, b, c)\,(x, y, z) = (a + x + cy, b + y, c + z)$$

tiene estructura de grupo de Lie. Determinar su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Calcular las subálgebras de Lie bidimensionales de $\mathfrak{g}$ y los subgrupos de Lie bidimensionales de G.