

12. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de una variedad diferenciable M , que contiene a un compacto K no vacío de M
- Probar que existe una función $h \in \mathcal{F}(M)$ con $h \geq 0$, $h(p) > 0$ para todo $p \in K$, y $\text{sop}(h)$ compacto y contenido en $\mathcal{U}$.
 - Probar que existe una función $\mu \in \mathcal{F}(M)$ con $\mu \geq 0$, $\mu(p) = 1$ para todo $p \in K$, y $\text{sop}(\mu)$ compacto y contenido en $\mathcal{U}$.
13. Sea M variedad diferenciable de dimensión m , y $\xi^1, \dots, \xi^m$ vectores linealmente independientes de $T_p M$. Demostrar que existe una carta

$$(\mathcal{U} = \mathbb{R}^m, \varphi = (u_1, \dots, u_m))$$

de M con $\varphi(p) = 0$ y

$$\xi^i = \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p, \quad i = 1, \dots, m.$$

14. Probar que la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ define por restricción una aplicación diferenciable f en la esfera $\mathbb{S}^2$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, encontrar los puntos p de $\mathbb{S}^2$ para los cuales se tenga

$$\left(2 \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_p + 3 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p \right) (f) = 0$$

siendo (ϕ, θ) las coordenadas dadas por la parametrización

$$x = \cos \phi \cos \theta, y = \cos \phi \sin \theta, z = \sin \phi.$$

15. Sea M una variedad diferenciable de dimensión ≥ 2 y sea p un punto dado de M . Probar que existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, que toma el valor *cero* solamente en el punto p . Probar que entonces $\xi(f) = 0 \quad \forall \xi \in T_p M$.
16. Probar que la función

$$\mathbb{R}P^2 \ni [x, y, z] \rightarrow \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}$$

da lugar a una aplicación diferenciable, $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula *sólo* en un punto. Determinar los puntos $p \in \mathbb{R}P^2$ con $\xi(f) = 0 \quad \forall \xi \in T_p(\mathbb{R}P^2)$.