CÁLCULO EN VARIEDADES.

Javier Lafuente

Octubre de 2010

Índice

[1] Este epígrafe no es necesario en una primera lectura, pero será imprescindible en la formalización de la teoría de integración en variedades.

[2] Este epígrafe, no es necesario en una primera lectura.

[3]Este sección no es necesaria para aquellos lectores que tengan reciente un curso clásico de Geometría diferencial de curvas y superficies.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Preliminar.

Este *Manual* debe considerarse una de guía de trabajo para alumnos que cursen la asignatura *Geometría de variedades diferenciables,* optativa del segundo Ciclo del plan de estudios de 1995 de la Facultad de Matemáticas de la UCM. Serán pocos los que la elijan, y no hayan perdido el gusto por la Geometría Diferencial, despues de haber sufrido el paso por la asignatura troncal denominada *Variedades en el espacio euclideo* (VDEE) que como su nombre indica se dedica al estudio de las variedades, pero lamentablemente restringido a las variedades sumergidas en $\mathbb{R}^n$.

También espero que sirva para los estudiantes que dentro de algunos años cursen la asignatura optativa de *Variedades diferenciables,* que afortunadamente sustituirá a la VDEE en el nuevo programa de grados.

Casi todo el contenido de este manual debería formar parte en mi opinión, de la *cultura general* de cualquier licenciado en Matemáticas. Pero en todo caso, pretende tambien servir como prerequisito para el estudio de la *Geometría Riemanniana,* cuyo contenido coincide esencialmente con la asignatura optativa *Geometría diferencial.*del programa de grados.

Este manual tiene el carácter de una *guía de curso.* Su estudio debe completarse con las clases asistenciales y la realización de los ejercicios propuestos a lo largo del curso, que no se han incluido aquí por razones estratégicas. Tampoco se han incluido en general, las demostraciones consideradas *automáticas.* Algunas de ellas, no todas se harán en clase. Pero más bien propongo como reto al lector *llenar el hueco*, y completar por su cuenta estas ausencias. No ser capaz de hacerlo es síntoma de que algo debe ir mal (de ahí el nombre de *automáticas*). Mi experiencia docente me muestra que *dar todo resuelto* no ayuda en absoluto, y muchas veces tiende a confundir al alumno medio, y aburrir al alumno brillante.

1.2. Objetivos

El objetivo inicial es generalizar el cálculo diferencial e integral, la teoría de ecuaciones diferenciales y el análisis vectorial (que se suponen ya conocidos en el ambito de los espacios $\mathbb{R}^m$), a ciertos espacios M denominados variedades diferenciables, y que son espacios que localmente (en torno a cada punto) pueden ser tratados [desde el punto de vista diferenciable] como abiertos del espacio $\mathbb{R}^m$ por medio de sistemas locales de coordenadas. Es importante reseñar, que la geometría diferencial local de variedades es equivalente al análisis clásico, y solo los conceptos y relaciones que pueden establecerse de forma independiente al sistema de coordenadas eventualmente utilizado, pueden considerarse propios de la Geometría diferencial. Estos objetivos, se enmarcan como una continuación natural de los contenidos de una asignatura estandar de *Geometría Diferencial de curvas y superficies.* Para los alumnos del plan antiguo un objetivo adicional es, recuperar lo más rapidamente posible en el contexto de las variedades abstractas, lo aprendido en el contexto de las variedades euclideas.

1.3. Contenidos

La **Sección 1** es introductoria y establece un breve paseo por el analisis y el álgebra elemental, con objeto sobre todo de establecer notación.

La **Sección 2** está dedicada a reconsiderar algunos aspectos del análisis desde un punto de vista más geométrico, preparando así el terreno para establecer el salto de $\mathbb{R}^m$ a la variedad abstracta M. La novedad consiste en introducir el concepto de *vector fijo*, interpretarlo como vector velocidad de una curva en un punto, y utilizar estas ideas para establecer una versión dinámica del concepto clásico de diferencial de una función (entre abiertos de espacios euclídeos) en un punto. Asimismo se establece el concepto de función diferenciable sobre subconjuntos de espacios euclídeos no necesariamente abiertos.

En la **Sección 3** se da el primer salto conceptual, generalizando la idea de superficie en el espacio euclideo tridimensional, a la de variedad m-dimensional sumergida en el espacio euclideo n-dimensional, después se pasa de forma natural al concepto de variedad abstracta m-dimensional (esto se lo podrán saltar los antiguos alumnos de VDEE). El siguiente objetivo consiste en recuperar en el ámbito de las variedades abstractas dos ideas básicas del análisis: Aplicación diferenciable, y diferencial de una función en un punto, cuya consistencia radica en una adecuada definición de espacio tangente en un punto de una variedad. El final de la sección se dedica a la descripción de procedimientos para la construcción de variedades a partir de otras (subvariedades, variedad producto y variedad cociente)

La reconversión de la teoría de integración de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, al ámbito de las variedades abstractas, constituye el objetivo de la **Sección 4**. La versión geométrica de una ecuación diferencial de este tipo, es un campo de vectores. Un campo de vectores es un operador que, asigna de manera diferenciable,a cada punto un vector tangente. Las curvas cuya velocidad define en cada punto el vector del campo son sus curvas integrales. La teoría de existencia y unicidad de curvas integrales maximales, y de flujos, se corresponde en su versión local con la teoría de integración y dependencia diferenciable de las soluciones con las condiciones iniciales. Mirado así, un campo se denomina también Sistema Dinámico.

Sin embargo, hay otro punto de vista, que nos permite ver un campo, como un operador de derivación de funciones diferenciables con valores reales, y que generaliza la idea clásica de derivada direccional. Es la denominada derivada de Lie de una función respecto a un campo. El concepto de derivada de Lie admite una interpretación dinámica, y una generalización que posibilita derivar en una variedad abstracta, un campo respecto a otro. Se trata del corchete de Lie de dos campos, cuya interpretación dinámica guarda una significativa similitud con la derivación de Lie de funciones.

Se establece el concepto de distribución en una variedad diferenciable y de hoja integral , que en cierto sentido generaliza el concepto de linea integral de un campo. El Teorema de Frobenius -versión corchete de Lie- proporciona condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de una distribución.

En la **Sección 5** se establece el cálculo tensorial en variedades, haciendo primero un estudio especial de las formas lineales y las bilineales, deteniendose brevemente en las variedades dotadas de estructura Riemanniana, en donde es posible la operación tensorial de subida y bajada de índices.

En la **Sección 6** se introduce el concepto general de derivación tensorial, deteniendose en particular sobre la derivación tensorial de Lie. Se introduce el concepto de conexión lineal en una variedad, y se define el tensor de curvatura asociado con sus correspondientes contracciones. Se define la derivación tensorial covariante inducida. Se particulariza el estudio para la conexión de Levi-Civita asociada a una métrica riemanniana, en donde se define el tensor de curvatura de Riemann y la curvatura escalar.

La **Sección 7** está dedicada al cálculo exterior de formas diferenciables, y a los operadores diferenciales clásicos, culminando con la diferencial exterior y los grupos de cohomología. Nuestra atención se dirige aquí, hacia las formas exteriores de grado máximo, que permiten establecer los conceptos de elemento y forma de volumen. En particular se analiza la idea de orientación.

En la **Sección 8** se culmina el manual del curso con la teoría de integración, y el teorema de Stokes. Es necesario previamente reconsiderar la integración clásica de funciones sobre dominios compactos de $\mathbb{R}^m$ para transformarla en una teoría de integración de formas "integrables" con soporte compacto de grado m, en donde el teorema del cámbio de variable adquiere una formulación más natural mediante el uso del pullback. Esta formulación permite ser trasladada a las variedades. Primero a formas integrables cuyo soporte compacto está incluido en una carta, y despues, usando particiones diferenciables de la unidad, al caso general.

Hemos evitado hablar de variedades abstractas con borde, y nos hemos limitado esencialmente a la integración en dominios regulares sumergidos para establecer el teorema de Stokes. Pero no hemos evitado reconstruir a partir de él, sus versiones clásicas del análisis vectorial. Se han incluido además algunas aplicaciones más o menos inmediatas del teorema.

Una de las más bellas aplicaciones no inmediatas del Teorema de Stokes lo constituyen los teoremas de Gauss-Bonnet y Poincaré-Hopf pertenecientes a la geometría global de superficies y a esto se dedica la **Sección 9.** Estos teoremas muestran que la integral de la curvatura de Gauss sobre una superficie compacta y orientada es un múltiplo entero de 2π, digamos $2\pi\chi$ donde el entero χ representa un invariante topológico calculable por métodos de topología algebraica y de topología diferencial. Pero lamentablemente este tema ya no cabe en un curso de un cuatrimestre y queda como lectura opcional de recompensa para alumnos aventajados.

1.4. Prerrequisitos

Algebra lineal. Cálculo diferencial en varias variables reales, incluyendo los teoremas de la función inversa e implícita. Cálculo integral en varias variables, incluyendo el teorema de Fubini, y del cambio de variables.
Una excelente referencia para un repaso rápido y autocontenido de estos temas, son los tres primeros capítulos del libro [8]

Los teoremas básicos de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, incluyendo diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales. Cierta soltura resolviendo los tipos estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias integrables (lineales, variables separadas, homogéneas, etc.). Estos (y otros) temas son bien tratados por ejemplo en [2].

Curso de Topología general en donde se estudien las topologías iniciales y finales, axiomas de separación y numerabilidad paracompacidad, grupos de homotopía y espacios recubridores.

Aunque no es indispensable, si es aconsejable haber cursado ya una asignatura de Curvas y Superficies. En el caso de haber cursado la asignatura VDEE se podrá pasar rápidamente por las secciones **8** y **9** pues ya las conocen en el contexto de las variedades sumergidas.

2. CONCEPTOS PRELIMINARES

Esta sección está dedicada a reconsiderar algunos aspectos del álgebra lineal y el análisis desde un punto de vista más geométrico, estableciendo las notaciones que usaremos, preparando así el terreno para establecer el salto de $\mathbb{R}^m$ a la variedad abstracta M.

2.1. ÁLGEBRA LINEAL

2.1.1. Módulos

Sea $(\mathfrak{X},+)$ un grupo abeliano, y $(\mathfrak{F},+,.)$ un anillo con elemento unidad $1 \in \mathfrak{F}$. Se dice que $\mathfrak{X}$ tiene estructura de módulo sobre $\mathfrak{F}$ (o es un $\mathfrak{F}$-módulo) si se ha definido un producto:

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{X} \ni (f, X) \to fX \in \mathfrak{X}$$

que verifica para todo $f, g \in \mathfrak{F}$ y todo $X, Y \in \mathfrak{X}$ las propiedades:
1) $(f+g)X = fX + gX$
2) $f(X+Y) = fX + fY$
3) $(fg)X = f(gX)$
4) $1.X = X$

Cuando $\mathfrak{F}$ es un cuerpo, entonces $\mathfrak{X}$ es un espacio vectorial.

En estas notas usualmente $\mathfrak{F}$ será un anillo de funciones diferenciables, y contiene al cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ (es decir, las funciones constantes) como subanillo. Así en particular $\mathfrak{X}$ también será espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

La teoría de $\mathfrak{F}$-módulos es en muchos aspectos formales muy parecida a la de espacios vectoriales. Así las definiciones formales de dependencia e independencia lineal, submódulos, ...etc son las mismas que en el caso vectorial. Sin embargo en otros aspectos fundamentales, relacionados con teoremas de existencia de bases, dimensión...etc, la analogía con los espacios vectoriales deja de funcionar.

2.1.2. Estructura vectorial euclidea de $\mathbb{R}^n$

Como es habitual, $\mathbb{R}$ representa el cuerpo de los número reales. Los elementos x del conjunto $\mathbb{R}^n$ de n-étuplas ordenadas de números reales, pueden ser considerados como vectores de un espacio afín euclídeo, o como puntos de un espacio afín. Trataremos de precisar aquí este asunto.

El espacio $\mathbb{R}^n$ tiene estructura natural de espacio vectorial euclideo. Denotamos por $(\delta_1, ..., \delta_n)$ a la base canónica, de forma que se tiene la identidad:

$$(\xi^1, \dots, \xi^n) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \delta_k \quad \text{para todo } (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$$

Por otra parte, el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^n$ será denotado por:

$$< \xi, \eta >= \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k \text{ para } \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n),\ \eta = (\eta^1, \dots \eta^n) \in \mathbb{R}^n$$

La norma de ξ es $\mid \xi \mid = +\sqrt{< \xi, \xi >}$. En el caso particular de $\mathbb{R}^3$, hay definido el producto vectorial denotado por:

$$\xi \times \eta = \det \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{pmatrix} \forall \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$$

2.1.3. Aplicaciones Lineales, Matrices y Bases.

A veces conviene representar a los elementos de $\mathbb{R}^n$ por columnas. Este es el caso en la siguiente situación:

Una matriz A con coeficientes en $\mathbb{R}$ del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

se escribe $A = (a_1, \dots, a_n)$, donde $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^m)^t$. Así a_i denota al (vector columna) i-ésimo de la matriz A . Mantendremos en estas notas el siguiente criterio:

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ serán considerados indistintamente vectores fila o columna, dependiendo del contexto.

Por razones de comodidad tipográfica, nosotros escribiremos en general los vectores en forma de fila. Por ejemplo, en el contexto siguiente, conviene pensar más bien en vectores columna:

Una matriz A como la anterior, se interpreta como una aplicación:

$$A : \mathbb{R}^n \ni x \to Ax \in \mathbb{R}^m$$

donde Ax denota el producto matricial de A por la matriz columna $x \in \mathbb{R}^n$. Observese que A representa la única aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que transforma la base canónica $(\delta_1, ..., \delta_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en el sistema $(a_1, \dots, a_n)$ de vectores de $\mathbb{R}^m$. Así pues hay un isomorfismo canónico entre el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de e $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, y el espacio vectorial $\mathbb{R}_n^m$ de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales. Naturalmente, la composición de aplicaciones lineales, corresponde al producto de matrices. En el caso particular $n = m$, la condición necesaria y suficiente para que A sea automorfismo de $\mathbb{R}^n$ es que $(a_1, \dots, a_n)$ sea base, es decir $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) > 0$ se dice que la base $(a_1, \dots, a_n)$ está positivamente orientada, o también que $A : \mathbb{R}^n \ni x \to Ax \in \mathbb{R}^m$ preserva la orientación. La condición para que $(a_1, \dots, a_n)$ defina una base ortonormal es que $AA^t = I$. En este caso la transformación (o la matriz) A se dice ortogonal. El conjunto $O(n)$ de transformaciones ortogonales tiene estructura natural de grupo. La matriz A es ortogonal,si y solo si preserva el producto escalar:

$$< A\xi, A\eta > = < \xi, \eta > \text{ para todo } \xi,\ \eta\ \in \mathbb{R}^n$$

Si $A \in O(n)$, es $1 = \det(I) = \det(AA^t) = (\det A)^2$. Por tanto $\det A = \pm 1$. Si $\det A = 1$, se dice que A es ortogonal positiva, o también que la base $(a_1, \dots, a_n)$ es ortonormal positiva. El conjunto $SO(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\}$ es un subgrupo de $O(n)$ cuyos elementos se llaman *rotaciones*. En el caso de $\mathbb{R}^3$, $A \in SO(3)$ si y solo si preserva el producto escalar y el vectorial, es decir:

$$< A\xi, A\eta > = < \xi, \eta > ,\ (A\xi) \times (A\eta) = \xi \times \eta \ \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3$$

2.1.4. Estructura Afín Euclidea de $\mathbb{R}^n$

Los elementos $p = (p^1, ..., p^n)$ de $\mathbb{R}^n$, también pueden pensarse como puntos de un espacio afín sobre el própio espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^n$. Si $p = (p^1, ..., p^n)$, $q = (q^1, ..., q^n) \in \mathbb{R}^n$ definimos el vector

$$\overrightarrow{pq} = (q^1 - p^1, ..., q^n - p^n) \in \mathbb{R}^n$$

que es el único vector que verifica la identidad $q = p + \overrightarrow{pq}$. La distancia entre ambos puntos es $d(p,q) =\mid \overrightarrow{pq} \mid$. Llamaremos $o = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ Observese que si $p = (p^1, ..., p^n)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ entonces $\overrightarrow{op}$=$(p^1, ..., p^n)$ debe considerarse un vector de $\mathbb{R}^n$

2.2. FUNCIONES DIFERENCIABLES ENTRE ABIERTOS

Recordamos aquí algunas cuestiones básicas de análisis de funciones con varias variables, desde un punto de vista más geométrico, preparando así el terreno para establecer el salto de $\mathbb{R}^m$ a la variedad abstracta M. La novedad consiste en introducir el concepto de *vector fijo*, interpretarlo como vector velocidad de una curva en un punto, y utilizar estas ideas para establecer una versión dinámica del concepto clásico de diferencial de una función (entre abiertos de espacios euclídeos) en un punto.

2.2.1. Notaciones

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ las coordenadas $(x^1, ...x^n)$ asociadas al sistema de referencia canónico, definidas por

$$x^i(p) := p^i \ , \ \forall p \equiv (p^1, ..., p^n) \in \mathbb{R}^n \ .$$

Denotaremos por $(y^1, ...y^m)$ las coordenadas análogas en $\mathbb{R}^m$.

Sea $\mathbb{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ se determina por sus *componentes* $F^j \equiv y^j \circ F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, donde se ha denotado también por $y^j : \mathbb{E}^m \ni (q^1, \dots, q^m) \to q^j \in \mathbb{R}$ la proyección j-ésima. Decimos entonces que

$$\{y^j = F^j(x^1, ..., x^n)\}_{j=1,\dots,m}$$

son las *ecuaciones de* F.

2.2.2. Funciones diferenciables. Matriz Jacobiana

Sea $\mathbb{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ se dirá *diferenciable* si posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Recordemos aquí la definición de *derivada parcial (de 1er orden) de* f *con respecto a* x^i $(i = 1, ..., n)$ *en* $p \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{d(f \circ \alpha^i)}{dt}(0) \ ,$$

siendo $\alpha^i : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \ t \to p + t\delta^i$.

Una función $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ se dirá *diferenciable* si todas sus componentes $F^j : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ son diferenciables.

Sea $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. La *matriz Jacobiana de* F *en* $p \in \mathbb{U}$ se define por:

$$DF(p) := \left(\frac{\partial(F^1, \dots, F^m)}{\partial(x^1, ...x^n)}\right)_{x=p} \equiv \begin{pmatrix} \partial F^1/\partial x^1 & \cdots & \partial F^1/\partial x^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F^m/\partial x^1 & \cdots & \partial F^m/\partial x^n \end{pmatrix}_{x=p} .$$

que se identifica con la aplicación lineal $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y se denomina *diferencial (clásica)* de F en p.

2.2.3. Espacio vectorial tangente $T_p\mathbb{R}^n$ en un punto $p \in \mathbb{R}^n$

Si $p \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\xi = \vec{\xi}_p = (p, \vec{\xi}\ )$. Geométricamente, ξ se representa por el vector $\vec{\xi}$ enganchado en el punto p. El espacio $T_p\mathbb{R}^n$, se denomina *espacio tangente en* p *a* $\mathbb{R}^n$. $T_p\mathbb{R}^n$ tiene estructura natural de espacio vectorial euclídeo, si se establece que la biyección natural $\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi} \rightleftharpoons \xi = \vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ sea una isometría lineal, es decir:

$$\lambda\vec{\xi}_p + \mu\vec{\eta}_p = (\lambda\vec{\xi} + \mu\vec{\eta})_p \,, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R} \,, \forall\vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p \in T_p\mathbf{E}^n$$

además si $n = 3$,

$$\vec{\xi}_p \times \vec{\eta}_p = (\vec{\xi} \times \vec{\eta})_p$$

2.2.4. Base canónica de $T_p\mathbb{R}^n$.

Tomando en $\mathbb{R}^n$ coordenadas $(x^1, ...x^n)$, si $p \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\partial/\partial x^i = \delta^i = (0, \ldots, 1^{(i}, \ldots, 0)$, es decir,

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right)$$

es la base canónica $(\delta_1, \ldots \delta_n)$ de $\mathbb{R}^n$, apoyada en p. Naturalmente, constituye una base de $T_p\mathbb{R}^n$, que denominamos también canónica. Mas adelante justificaremos la notación.

2.2.5. La diferencial geométrica

Sea $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$, una función diferenciable definida sobre un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Se llama *diferencial (geométrica)* de F en $p \in \mathbb{U}$, a la aplicación lineal

$$dF(p) : T_p\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi}_p \to (DF(p)(\vec{\xi}))_p \in T_{F(p)}\mathbb{R}^m$$

que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_p\mathbb{R}^n \arrow[r, "dF(p)"] \arrow[d] & T_{F(p)}\mathbb{R}^m \arrow[d] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "DF(p)"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

es decir, se trata de la aplicación lineal que tiene por matriz la matriz jacobiana de $DF(p)$ respecto a las bases canónicas en $T_p\mathbb{R}^n$ y $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$. Se tiene así la siguiente identidad:

$$dF(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{F(p)}$$

En particular, si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable, el vector tangente a α en $t = \tau$, se escribe:

$$\alpha'(\tau) = d\alpha(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\tau = \sum_j \left(\frac{d\alpha^j}{dt}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\alpha(\tau)}$$

2.2.6. Curvas por un punto.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable, tal que $0 \in I$, y $\alpha(0) = p$. Se dice entonces que α es una curva por el punto p. Observese que no se presupone que I sea intervalo abierto, ni que 0 sea interior a I. Se denota por $C(p; \mathbb{R}^n)$ a la familia de curvas por p en $\mathbb{R}^n$.

2.2.7. Vector definido por una Curva.

Si $\alpha \in C(p; \mathbb{R}^n)$, el vector $\alpha'(0)$ pertenece a $T_p\mathbb{R}^n$, y se denomina vector (velocidad) definido por α (en $t = 0$). Se verifica la siguiente identidad:

$$T_p\mathbb{R}^n = \{\alpha'(0) : \alpha \in C(p; \mathbb{R}^n)\}$$

2.2.8. Regla de la cadena

Sean $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y F y G funciones diferenciables:

$$\mathbb{U} \xrightarrow{F} \mathbb{V} \xrightarrow{G} \mathbb{R}^l$$

entonces $H = G \circ F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^l$ es función diferenciable, y se verifica para todo $p \in \mathbb{U}$

$$dH(p) = dG(F(p)) \circ dF(p)$$

Esta es exactamente la versión geométrica de la clásica regla de la cadena que establece en términos de matrices jacobianas, la identidad:

$$DH(p) = DG(q)DF(p)$$

y que en coordenadas se escribe (de forma algo imprecisa pero fácil de recordar):

$$\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial z^k}{\partial y^j}\right)_{F(p)} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p$$

en donde se han tomado coordenadas (x^i) en $\mathbb{R}^n$, (y^j) en $\mathbb{R}^m$ y (z^k) en $\mathbb{R}^l$ y se supone que $y^j = F^j(x^1, ...x^n)$, $z^k = G^k(y^1, ..., y^m)$ representan las ecuaciones de F y G respectivamente. En particular, si $\alpha : I \to \mathbb{U}$ es una curva diferenciable, y $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$es aplicación diferenciable, se tiene para todo $\tau \in I$

$$dF(\alpha(\tau))(\alpha'(\tau)) = (F \circ \alpha)'(\tau)$$

2.2.9. Interpretación geométrica de la diferencial

Sea $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable . El vector $dF(p)(\xi)$ para $p \in \mathbb{U}$, y $\xi \in T_p\ \mathbb{R}^n$ puede determinarse geométricamente usando la siguiente receta:

Tómese una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{U}$ por ξ (es decir $\alpha(0) = p$, $.\alpha'(0) = \xi$). Entonces $dF(p)(\xi)$ es exactamente el vector definido por $F \circ \alpha$ en $t = 0$:

$$dF(p)(\xi) = (F \circ \alpha)'(0)$$

Difeomorfismos.

Una aplicación $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$se llama difeomorfismo, si es biyectiva, diferenciable, y su inversa $F^{-1} : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ es también diferenciable. Si F es difeomorfismo, entonces usando la regla de la cadena para cada $p \in \mathbb{U}$, se tiene que $dF(p) : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^n$ es isomorfismo lineal, y

$$dF(p)^{-1} = d(F^{-1})(F(p))$$

El recíproco tambien es (localmente) cierto:

2.2.10. Teorema de la función inversa.

Sea $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable definida sobre un abierto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^n$, y sea $p \in \mathbb{D}$. .Supóngase que la matriz $(DF)(p)$ es no singular. Existe entonces un abierto $\mathbb{U}$, con $p \in \mathbb{U}$, de forma que $F(\mathbb{U}) = \mathbb{V}$ es abierto de $\mathbb{R}^n$, y $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ es difeomorfismo.

Para enunciar el teorema de las función implícita necesitamos alguna notación previa:

Fijados enteros positivos n, r, y m con $n = m + r$, si $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, escribamos

$$x = (\tilde{x}, \hat{x}) \text{ con } \tilde{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \text{ y } \hat{x} = (x^{m+1}, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^r \qquad (1)$$

denotamos por $\pi : \mathbb{R}^n \ni x \to \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

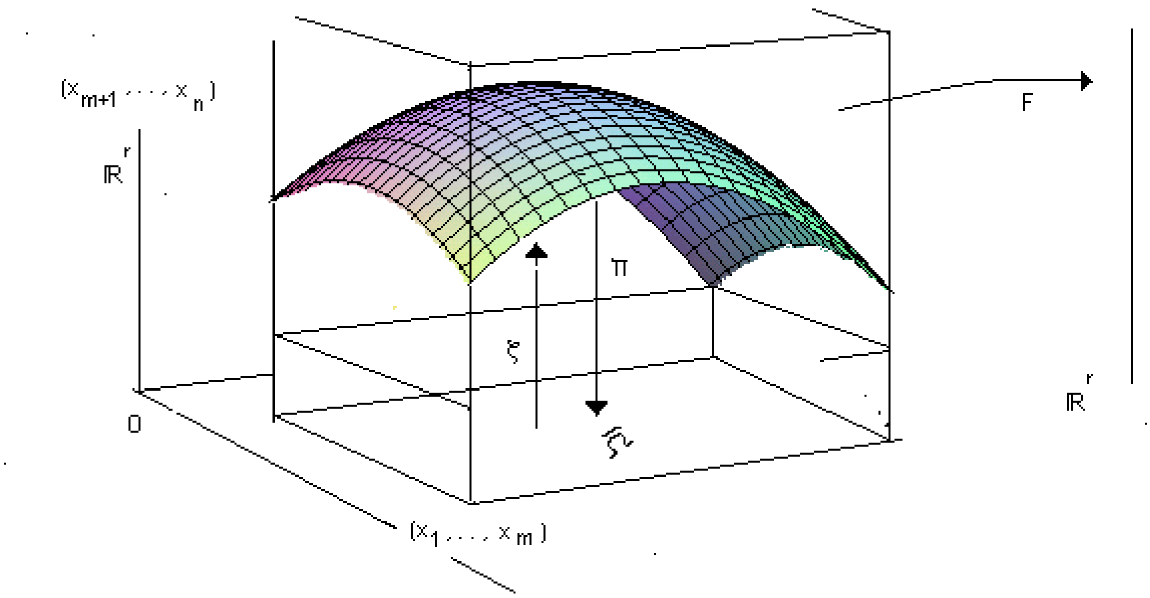
2.2.11. Teorema de la función implicita.

Supongamos ahora que tenemos una función diferenciable, $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^r$definida sobre un abierto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^n$. Tomemos en $\mathbb{R}^n$ coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, y un punto $p = (\tilde{p}, \hat{p}) \in \mathbb{D}$ en donde $F(p) = 0$, y

$$\det\left(\frac{\partial(F^1, \ldots, F^r)}{\partial(x^{m+1}, \ldots, x^n)}\right)(p) \neq 0$$

se concluye entonces que existen abiertos $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^m$ y $\hat{\Omega}$ de $\mathbb{R}^r$, de forma que $p \in \Omega = \tilde{\Omega} \times \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{D}$, y existe una función diferenciable $\varsigma : \tilde{\Omega} \to \hat{\Omega}$ verificando la condición

$$F^{-1}(0) \cap \Omega = \{x = (\tilde{x}, \varsigma(\tilde{x})) : \tilde{x} \in \tilde{\Omega}\}$$



Nota 2.1 *1. Tomando en $\tilde{\Omega}$ coordenadas $u = (u^1, \ldots, u^m)$, la aplicación $P : \tilde{\Omega} \ni u \to (u, \varsigma(u)) \in F^{-1}(0) \cap \Omega \subset \mathbb{R}^n$tiene por ecuaciones*

$$x^1 = u^1, \ldots x^m = u^m, \; x^{m+1} = \varsigma^1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, \; x^n = \varsigma^r(u^1, \ldots, u^m)$$

y define evidentemente una biyección continua cuya aplicación inversa, es exactamente la restricción de la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \ni x \to \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ *a* $F^{-1}(0) \cap \Omega$. *Por tanto* $P : \tilde{\Omega} \to F^{-1}(0) \cap \Omega$ *es homeomorfismo.*

2. *El teorema de la función implícita, responde a una idea intuitiva que puede parafrasearse así: De la ecuación* $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$, *pueden despejarse localmente las variables* $x^{m+1}, \ldots, x^n$ *en función de las* $x^1 = u^1, \ldots x^m = u^m$, *allí donde .*

$$\det\left(\frac{\partial(F^1, \ldots, F^r)}{\partial((x^{m+1}, \ldots, x^n)}\right) \neq 0$$

3. *En el supuesto de que*

$$rango\left(\frac{\partial(F^1, \ldots, F^r)}{\partial((x^1, \ldots, x^n)}\right)(p) = r$$

y el menor de orden r *distinto de cero corresponda a otras variables* $(x^{k^1}, \ldots, x^{k_r})$ *naturalmente, puede enunciarse un resultado análogo.*

2.3. APLICACIONES DIFERENCIABLES ENTRE SUBCONJUNTOS

La teoría expuesta en el epígrafe2.2 anterior, se generaliza fácilmente para funciones definidas sobres subconjuntos S de $\mathbb{R}^n$ no necesariamente abiertos:

2.3.1. Cono tangente a un subconjunto por un punto.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $p \in S$, una curva por p en S es una curva por p cuya imagen está contenida en S. Denotamos por $C(p; S)$ a la familia de dichas curvas.

Se denomina cono tangente por p a S al conjunto

$$T_pS = \{\alpha'(0) : \alpha \in C(p, S)\}$$

Observese que T_pS coincide con $T_p\mathcal{U}$, cuando $\mathcal{U}$ es abierto de S en la topología relativa de S, y $p \in \mathcal{U}$.

Nótese también que $T_p\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{U}$, si $\mathbb{U}$ es abierto de $\mathbb{R}^n$, y $p \in \mathbb{U}$. Naturalmente, T_pS no tiene porqué ser subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$.

2.3.2. Función diferenciable entre subconjuntos.

Sea S subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y $\bar{S}$ subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Una función $F : S \to \bar{S}$ se dice diferenciable, si por cada punto $p \in S$, hay un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$, con $p \in \mathbb{U}$, y existe una función $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $\Phi \mid \mathbb{U} \cap S = F \mid \mathbb{U} \cap S$.

2.3.3. La diferencial en un punto

En las condiciones anteriores, si $\xi \in T_pS$ y $\alpha \in C(p, S)$, con $\alpha'(0) = \xi$, entonces $F \circ \alpha = \Phi \circ \alpha \in C(F(p), \bar{S})$, y queda definida sin ambigüedad, una aplicación:

$$dF(p) : T_pS \ni \xi = \alpha'(0) \to (F \circ \alpha)'(0) \in T_{F(p)}\bar{S}$$

Naturalmente $dF(p) = d\Phi(p) \mid T_pS$, por lo que si T_pS es subespacio vectorial, entonces $dF(p)$ es aplicación lineal , y se denomina diferencial de F en p. .

2.3.4. Regla de la cadena.

Si $F : S \to S'$, $G : S' \to S''$ son funciones diferenciables entre subconjuntos también lo es la función $G \circ F$:$S \to S''$, y se verifica para cada $p \in S$:

$$d(G \circ F)(p) = dG(F(p)) \circ dF(p)$$

3. VARIEDADES DIFERENCIABLES

Una buena parte de los conceptos y resultados del análisis en $\mathbb{R}^m$ se puede extender a espacios más generales M, que denominaremos variedades diferenciables. De esto precisamente se ocupa la Geometría Diferencial. Intuitivamente, una variedad diferenciable M, es un espacio que localmente es equivalente a $\mathbb{R}^m$. Así, la geometría diferencial local, es prácticamente equivalente al análisis.

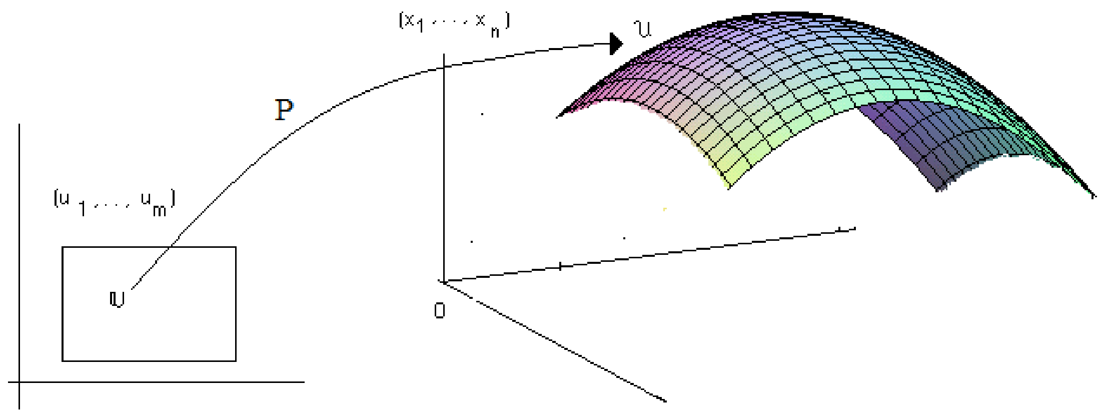
3.1. VARIEDADES EUCLIDEAS

Introducimos aquí una primera generalización del concepto de superficie en $\mathbb{R}^3$, es el concepto de variedad euclídea, o de variedad m-dimensional del espacio $\mathbb{R}^n$.

3.1.1. Parametrizaciones Locales.

Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Una *parametrización local* de M, de dimensión m es un homeomorfismo $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$, donde $\mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $\mathcal{U}$ es un abierto de M (en la topología relativa). Además se exige la siguiente propiedad de regularidad:

$\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable, y $rg(D\mathbf{P}(u)) = m$ para todo $u \in \mathbb{U}$.



3.1.2. Concepto de variedad de $\mathbb{R}^n$

Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ se llama *variedad (euclidea)* de dimensión m , si para cada punto $p \in M$, existe una parametrización local $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ de M con dimensión m , y $p \in \mathcal{U}$.

Una observación elemental, aunque importante, es que un abierto A de una variedad M, es también una variedad. Aplicando el teorema de la función implícita (y en particular la observación 1 de 1) se concluye:

Ejemplo 3.1 *La superficies de $\mathbb{R}^3$ son las variedades bidimensionales de $\mathbb{R}^3$.*

Ejemplo 3.2 *El conjunto* $\mathbb{S}^m = \{(x^0, \ldots, x^m) : \sum_{i=0}^m \left(x^i\right)^2 = 1\}$ *constituye una variedad* $m-$*dimensional de* $\mathbb{R}^{m+1}$ *denominado* esfera. *Podemos definir la parametrización* $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$*, con* $\mathbb{U} = \{(u^1, , \ldots, u^m) : \sum_{i=1}^m \left(u^i\right)^2 < 1\}$, $\mathcal{U} = \{(x^0, \ldots, x^m) \in \mathbb{S}^m : x^0 > 0\}$*, y* $\mathbf{P}$ *tiene por ecuaciones:*

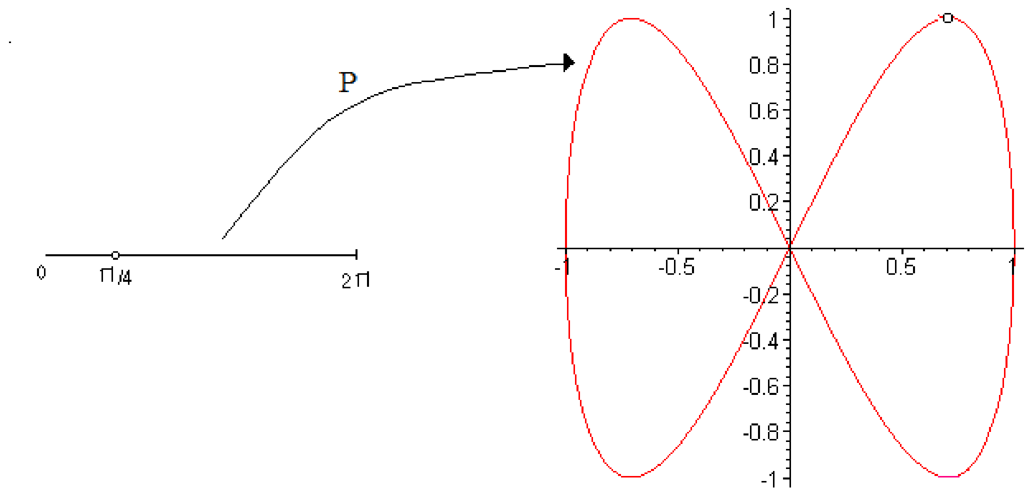
$$\begin{cases} x^0 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^m (u^i)^2} \\ x^1 = u^1 \\ \vdots \\ x^m = u^m \end{cases}$$

es fácil comprobar que $rg(D\mathbf{P}(u)) = m$ *en todo punto. La razón por la que* $\mathbf{P}$ *es homeomorfismo, es que* $\mathbf{P}^{-1}$*, es la restricción a* $\mathcal{U}$ *de la proyección*

$$\pi : \mathbb{R}^{m+1} \ni (x^0, \ldots, x^m) \to (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$$

Evidentemente todo $\mathbb{S}^m$ *puede recubrirse de parametrizaciones de este tipo.*

Ejemplo 3.3 *La aplicación diferenciable* $\mathbf{P} : (0, 2\pi) \ni u \to (\sin u, \sin 2u) \in \mathbb{R}^2$ *no define una parametrización sobre su imagen* $M = im\mathbf{P}$ *(véase figura), pues aunque* $d\mathbf{P}/du \neq 0$ *en todo punto y,* $\mathbf{P} : (0, 2\pi) \to M$ *es biyectiva,* $\mathbf{P}$ *no es homeomorfismo, ya que* $\mathbf{P}\left((0, 2\pi) - \{\pi/2\}\right)$ *es unconjunto conexo, y* $(0, 2\pi) - \{\pi/2\}$ *no lo es.*



3.1.3. Variedades de $\mathbb{R}^n$ en implícitas

Sea $M = F^{-1}(0)$, el conjunto de los ceros de una función diferenciable $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^r$ siendo $\mathbb{D}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ $(n > r)$. Si $rang(DF(p)) = r$ para todo $p \in M$, entonces M es una variedad de dimensión $m = n - r$.

3.1.4. Cartas

Si $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una parametrización de M, a la aplicación $\varphi = \mathbf{P}^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$, se denomina *carta* de M.

Usualmente se denota $\varphi = (u^1, \dots u^m)$, y a la carta por $(\mathcal{U}, \varphi)$. Si $p \in \mathcal{U}$, a $\varphi(p) = (u^1(p), \dots u^m(p))$ se le denominan coordenadas de p respecto a φ. Si en el espacio ambiente $\mathbb{R}^n$ se toman coordenadas $x = (x^1, \dots, x^n)$, entonces $x^i = \mathbf{P}^i(u^1, \dots u^m)$ $i = 1, \dots, n$ definen las ecuaciones de la parametrización.

3.1.5. Teorema

si $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una parametrización de M, entonces $\varphi = \mathbf{P}^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ es una aplicación diferenciable

Demostración: La idea para probar esto es la siguiente:

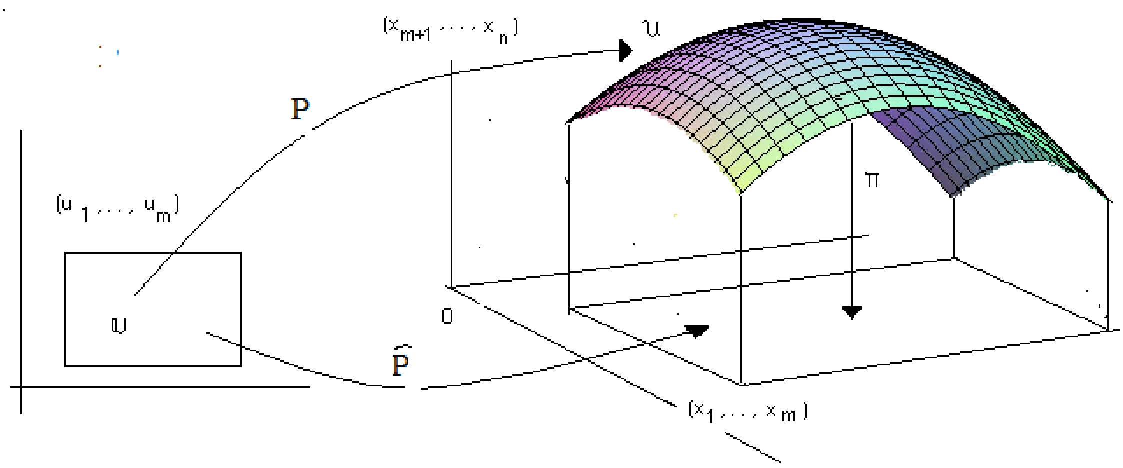
Fijado $p \in \mathcal{U}$, como $rg(D\mathbf{P}(\varphi(p)) = m$, podemos suponer por ejemplo que

$$\left| \frac{\partial(\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^m)}{\partial(u^1, \dots, u^m)} \right| (\varphi(p)) \neq 0$$

y así en un entorno de $\varphi(p)$ (que podemos suponer que es el propio $\mathbb{U}$) la función $\widetilde{\mathbf{P}} = (\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^m) : \mathbb{U} \to \pi(\mathcal{U})$ admite una inversa $\widetilde{\mathbf{P}}^{-1} : \pi(\mathcal{U}) \to \mathbb{U}$ que es diferenciable (siendo $\pi : \mathbb{R}^n \ni x \to \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ la proyección definida en (1)). Resulta así que la aplicación:

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{-1} \circ \pi : \pi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^r \ni (\tilde{x}, \hat{x}) \to \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbb{U}$$

es diferenciable, y $(\widetilde{\mathbf{P}}^{-1} \circ \pi) \mid \mathcal{U} = \varphi$



3.1.6. Cambio de Carta

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ son dos cartas de M, y $\mathbf{P} = \varphi^{-1}$, $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\varphi}^{-1}$ son las respectivas parametrizaciones, la aplicación

$$\overline{\varphi} \circ \mathbf{P} : \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \tag{2}$$

es un difeomorfismo. A la aplicación $\overline{\varphi} \circ \mathbf{P}$ se le llama *ecuación del cambio de carta.*

3.2. VARIEDADES ABSTRACTAS

Una variedad de $\mathbb{R}^n$, es un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ que puede recubrirse de cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$. Es importante observar ahora que en el concepto de carta no interviene de forma explícita el espacio ambiente $\mathbb{R}^n$. Esto sugiere una generalización natural del concepto de variedad euclidea.

En lo que sigue, M será un espacio topológico abstracto, no necesariamente subespacio topológico de $\mathbb{R}^n$

3.2.1. Cartas abstractas

Una carta de M modelada en $\mathbb{R}^m$, es un par $(\mathcal{U}, \varphi)$ donde:

- $\mathcal{U}$ es un abierto de M , y $\varphi{:}\mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación inyectiva.
- $\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $\varphi{:}\mathcal{U} \to \mathbb{U}$ es homeomorfismo.

Usualmente se denota $\varphi = (u^1, \ldots u^m)$, y a la carta por $(\mathcal{U}, \varphi)$. Si $p \in \mathcal{U}$, a $\varphi(p) = (u^1(p), \ldots u^m(p))$ se le denominan *coordenadas* de p respecto a φ. Así $u^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ denota la aplicación coordenada i-ésima.

3.2.2. Compatibilidad de Cartas

Dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ de M modeladas en $\mathbb{R}^m$ se dice que son compatibles, (y escribimos $(\mathcal{U}, \varphi) \sim (\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$) cuando $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} = \emptyset$ o bien, si $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, se verifica que la aplicación $\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \\ \varphi(\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}) \arrow[rr, "\overline{\varphi}\circ\varphi^{-1}"'] & & \overline{\varphi}(\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}) \end{tikzcd}$$

es difeomorfismo.

3.2.3. Atlas

Un atlas de M modelado en $\mathbb{R}^m$ es una familia $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ en donde

- Para cada $\alpha \in A$, $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta de M modelada en $\mathbb{R}^m$
- Si $\alpha, \beta \in A$, entonces $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) \sim (\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta)$
- $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = M$

Diremos que una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M es compatible con $\mathcal{A}$, (y escribimos $(\mathcal{U}, \varphi) \sim \mathcal{A}$) si $(\mathcal{U}, \varphi) \sim (\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\forall \alpha \in A$. Un atlas $\mathcal{M}$ de M se dice *maximal*, si se verifica la implicación:

$$(\mathcal{U}, \varphi) \sim \mathcal{M} \Longrightarrow (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{M}$$

3.2.4. Estructura diferenciable

Dos atlas $\mathcal{A}$, y $\mathcal{B}$ sobre M modelados en $\mathbb{R}^m$ se dicen compatibles, (y se escribe $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$) si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas de M.

Proposición 3.4 *La relación de compatibilidad* ($\sim$) *anterior definida sobre el conjunto* $Atlas(M, \mathbb{R}^m)$ *de atlas de* M *modelados en* $\mathbb{R}^m$ *es una relación de equivalencia. Cada elemento del cociente* $Atlas(M, \mathbb{R}^m)/\!\sim$ *se denomina estructura diferenciable sobre* M.

La única propiedad no del todo trivial es la transitiva, que resulta ser inmediata a partir del siguiente:

Lema 3.5 *Si dos cartas* $(\mathcal{U}, \varphi)$, *y* $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ *son compatibles con un atlas* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *de* M, *entonces son compatibles entre sí.*

Demostración: Es necesario probar que la aplicación $\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ es diferenciable. Fijado $u = \varphi(p) \in \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$, tomemos $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\varphi}) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ con $p \in \widetilde{\mathcal{U}}$, y sea $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \cap \widetilde{\mathcal{U}}$, $\mathbb{V} = \varphi(\mathcal{V})$, $\overline{\mathbb{V}} = \overline{\varphi}(\mathcal{V})$, $\widetilde{\mathbb{V}} = \widetilde{\varphi}(\mathcal{V})$ se tiene entonces el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"] & \\
\mathbb{V} \arrow[r, "\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}"'] & \widetilde{\mathbb{V}} \arrow[r, "\bar{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}"'] & \overline{\mathbb{V}}
\end{tikzcd}
$$

que prueba que $\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en un entorno de $u = \varphi(p) \in \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$
■

Por otra parte, y como consecuencia inmediata del lema anterior, se concluye:

Proposición 3.6 *Fijado un atlas* $\mathcal{A}$ *de* M, *existe un único atlas maximal* $\mathcal{M}$ *de* M, *compatible con* $\mathcal{A}$, *y viene definido por:*

$$\mathcal{M} = \{(\mathcal{U}, \varphi) \text{ carta de } M\text{: } (\mathcal{U}, \varphi) \sim \mathcal{A}\} \tag{3}$$

En particular, cada estructura diferenciable en M, *tiene un único atlas maximal. Por otra parte, dos atlas maximales distintos, dan lugar a distintas estructuras diferenciables.* ■

Definición 3.7 *Una* variedad diferenciable de dimensión m , *es un espacio topológico* M, *dotado de una estructura diferenciable o equivalentemente de un atlas maximal* $\mathcal{M}$ *modelado en* $\mathbb{R}^m$ *(ver observación 3.27 más adelante).*

Nota 3.8 *Así*

1. *Dar una variedad diferenciable supone en la práctica dar el espacio topológico* M, *junto con un atlas* $\mathcal{A}$ *de* M. *A partir de* $\mathcal{A}$ *se construye* $\mathcal{M}$ *como en (3). Usualmente, decir que* $(\mathcal{U}, \varphi)$ *carta de (la variedad diferenciable)* M *significará que* $(\mathcal{U}, \varphi)$ *pertenece al atlas maximal* $\mathcal{M}$

2. *Teniendo en cuenta que si* $(\mathcal{U}, \varphi)$ *es una carta de* M, *y* $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ *es un abierto, entonces* $(\mathcal{V},\ \varphi \mid \mathcal{V})$ *es también carta de* M, *se concluye que el conjunto*
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : \exists (\mathcal{U}, \varphi) \text{ carta de } M\}$$
constituye una base para la topología de M.

3. *Toda variedad euclidea M de $\mathbb{R}^n$ es variedad diferenciable, si se le dota del atlas*

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}, \varphi{=}\mathbf{P}^{-1}) : \mathbf{P} \text{ es parametrización local de } M\}$$

Nota 3.9 *Podríamos haber introducido el concepto de variedad diferenciable a partir de un conjunto M sin estructura topológica previa. El procedimiento es el siguiente:*

1. a) *Se define Una carta de M modelada en $\mathbb{R}^m$, es un par $(\mathcal{U}, \varphi)$ donde: $\mathcal{U}$ es sbconjunto de M , y $\varphi{:}\mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación inyectiva.$\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{U}$ abierto de $\mathbb{R}^m$*

   b) *Dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ de M modeladas en $\mathbb{R}^m$ se dice que son compatibles, (y escribimos $(\mathcal{U}, \varphi) \sim (\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$) cuando $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} = \emptyset$ o bien, si $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, se verifica que $\varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ y $\overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ son abiertos, y la aplicación $\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ es difeomorfismo*

   c) *El resto del desarrollo (definición de atlas, equivalencia de atlas y de atlas maximal,...etc) se hace igual que antes en 3.2.3*

   d) *Si $\mathcal{A}$ es un atlas, existe en M una única topología $T_{\mathcal{A}}$ que hace a φ homeomorfismo para cada $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$, y viene definida por*

   $$T_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{V} : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \text{ es abierto de } \mathbb{R}^m \text{ para todo } (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

   Además $\mathcal{A} \sim \widetilde{\mathcal{A}} \Rightarrow T_{\mathcal{A}} = T_{\widetilde{\mathcal{A}}}$

   e) *Finalmente se prueba que la familia $\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : \exists(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de $M\}$ constituye una base para la única topología en M, que hace homeomorfismos a las cartas $\varphi{:}\mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$*

Ejemplo 3.10 *Sea $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la* recta proyectiva real, *es decir $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[x^0, x^1] : (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\}$ donde se entiende $[x^0, x^1] = [y^0, y^1] \iff \exists\lambda > 0$ con $y^0 = \lambda x^0$ y $y^1 = \lambda x^1$. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \ni (x^0, x^1) \to [x^0, x^1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Podemos dar a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la topología final para la proyección π. Se consideran entonces el abierto $\mathcal{U} = \{\{[x^0, x^1] : x^0 \neq 0\}$, y sea*

$$\varphi : \mathcal{U} \ni [x^0, x^1] \to u = \frac{x^1}{x^0} \in \mathbb{R}$$

se puede probar que φ define un homeomorfismo, cuya inversa es

$$\mathbf{P} = \varphi^{-1} : \mathbb{R} \ni u \to [1, u] \in \mathcal{U}$$

se construye de forma análoga la carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ con $\overline{\mathcal{U}} = \{\{[x^0, x^1] : x^1 \neq 0\}$ y

$$\overline{\varphi}{:}\overline{\mathcal{U}} \ni [x^0, x^1] \to \bar{u} = \frac{x^0}{x^1} \in \mathbb{R}$$

así $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}, \varphi), (\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})\}$ constituye un atlas de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ las ecuaciones del cambio de coordenadas son:

$$\mathbb{R} - \{0\} = \varphi\left(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}\right) \ni u \overset{\varphi^{-1}}{\to} [1, u] \overset{\overline{\varphi}}{\to} \frac{1}{u} = \bar{u} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.2.5. Propiedades topológicas de una variedad abstracta.

Como cada punto p de una variedad diferenciable abstracta M, tiene un entorno homeomorfo a (un abierto de) $\mathbb{R}^m$, se concluye que toda variedad diferenciable tiene buenas propiedades topológicas locales, por ejemplo:

M es primer axioma de numerabilidad

M es localmente compacta.

M es localmente conexa.

M es T_1 (es decir, cada punto es un conjunto cerrado)

Sin embargo, una variedad diferenciable abstrata M no tiene porqué tener buenas propiedades topológicas globales, en particular, no tiene porqué ser un espacio de Hausdorf, ni tiene porqué verificar el II axioma de numerabilidad. Esto puede comprobarse usando los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.11 (El cero suplantador) *Consideremos el espacio $M = \mathbb{R}^m \cup \{0^*\}$ ($0^* \notin \mathbb{R}^m$) con dos cartas:*

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^m,\ \varphi = id : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$$

y una segunda carta $\overline{\mathcal{U}} = \mathbb{R}^m - \{0\} \cup \{0^*\}$ y $\overline{\varphi}$: $\overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in \overline{\mathcal{U}} - \{0\} \\ 0, & si\ x = 0^* \end{cases}$$

Puede verse fácilmente que las ecuaciones del cambio de carta quedan:

$$\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi\left(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}\right) = \mathbb{R}^m - \{0\} \xrightarrow{id} \mathbb{R}^m - \{0\} = \varphi\left(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}\right)$$

Damos a M la única topología que hace homeomorfismo a φ y a $\overline{\varphi}$ (ver observación 3.9). M es así variedad diferenciable, pero dos entornos arbitrarios de 0 y 0^* siempre tienen intersección no vacia. Por tanto M no es T_2.

Ejemplo 3.12 (El plano por capas) *Fijado $\lambda \in \mathbb{R}$ sea $\mathcal{U}_\lambda = \{(x, \lambda) : x \in \mathbb{R}\}$, y sea*

$$\varphi_\lambda : \mathcal{U}_\lambda \ni (x, \lambda) \to x \in \mathbb{R}$$

se da $M = \mathbb{R}^2$ a única topología que hace a cada φ_λ homeomorfismo (ver observación 3.9). Como $\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_{\lambda'} = \emptyset$ si $\lambda \neq \lambda'$, se verifica trivialmente que $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un atlas que da M estructura de variedad diferenciable. La topología de M no verifica el II Axioma de numerabilidad, ya que si $\mathcal{B}$ es una base para la topología, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $B_\lambda \in \mathcal{B}$, con $(0, \lambda) \in B_\lambda \subset \mathcal{U}_\lambda$ y así la aplicación

$$\mathbb{R} \ni \lambda \to B_\lambda \in \mathcal{B}$$

es necesariamente inyectiva, y $\mathcal{B}$ es un conjunto no numerable.

Ejemplo 3.13 *El espacio $M = \mathbb{R}^m$ con su topología usual, tiene una estructura diferenciable canónica dada por la carta $id : M \to \mathbb{R}^m$. Sin embargo es fácil dotarlo de otras estructuras diferenciables diferentes. Por ejemplo tomando $m = 1$, la carta global $\varphi : M \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = u = t^3$, no es compatible con la $id : M \to \mathbb{R}$, ya que la aplicación $u \to t = \sqrt[3]{u}$ no es diferenciable en el origen.*

3.3. APLICACIONES DIFERENCIABLES ENTRE VARIEDADES.

El concepto de función diferenciable entre subconjuntos de espacios euclídeos (ver sección 2.3) adquiere un significado *intrínseco,* cuando los subconjuntos son variedades euclídeas. Esto permite generalizar el concepto de función diferenciable a las variedades abstractas.

3.3.1. Expresión analitica local de funciones entre variedades.

En lo que sigue, M y $\overline{M}$ van a ser variedades de dimensiones m y $\bar{m}$, y sea $F : M \to \overline{M}$ una aplicación continua. Entonces, para cada $p \in M$, y cada carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{\bar{m}}))$, con $F(p) \in \overline{\mathcal{U}}$, existe otra $(\mathcal{U}, \varphi{=}(u_1, \dots u_m))$ con $p \in \mathcal{U}$ de manera que $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, y la aplicación $F^{\varphi\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}})$, que hace conmutativo el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & \overline{\mathcal{U}} \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\
\varphi\mathcal{U}) \arrow[r, "F^{\varphi\overline{\varphi}}"'] & \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}})
\end{tikzcd}
$$

resulta ser una aplicación continua entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ y de $\mathbb{R}^{\bar{m}}$. Se denomina a $F^{\varphi\overline{\varphi}}$ expresión analítica local de F, y a las

$$
F^{\varphi\overline{\varphi}} : \begin{cases} \bar{u}^1 = F^1(u^1, \dots, u^m) \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \bar{u}^{\bar{m}} = F^{\bar{m}}(u^1, \dots, u^m) \end{cases} \tag{4}
$$

se denominan ecuaciones locales de F, en torno a p. Las funciones F^i se consideran indistintamente funciones de $\varphi(\mathcal{U})$ o de $\mathcal{U}$. y por tanto vale la igualdad $F^i \circ \varphi{=}F^i$

Definición 3.14 *Sea $F : M \to \overline{M}$ una aplicación continua entre variedades. Entonces se dice que F es diferenciable si admite una expresión analítica local diferenciable en torno a cada punto $p \in M$. Además, si F es diferenciable, cualquier expresión analítica local de F lo es*

Nota 3.15 *1. Naturalmente si $F : M \to \overline{M}$ es una aplicación diferenciable entre variedades euclídeas según el epígrafe 2.3.2, también lo es según la definición anterior.*

2. La composición de funciones diferenciables, es diferenciable.

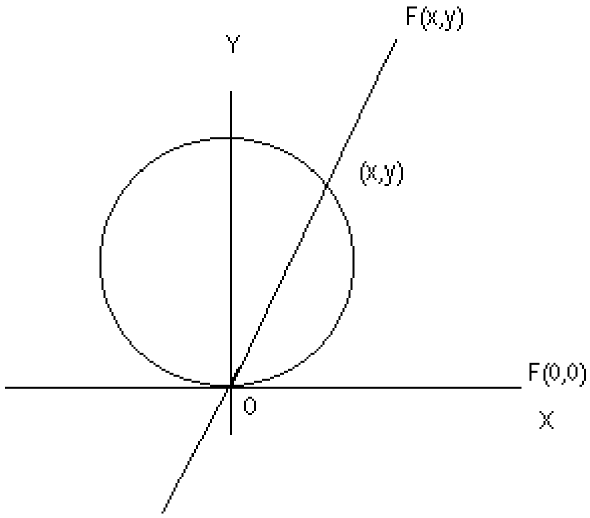
3.3.2. Difeomorfismos.

Una aplicación entre variedades diferenciables $F : M \to \overline{M}$ se dice *difeomorfismo*, si es diferenciable, biyectiva, y su inversa es también diferenciable. Si F es difeomorfismo, entonces se dice que M y $\overline{M}$ son *difeomorfas.* Naturalmente esta es una relación de equivalencia que da lugar a un formidable problema de clasificación

Nota 3.16 *Una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de una variedad M, se ve como una aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ entre variedades, que además es difeomorfismo, con inversa $\mathbf{P} : \mathbb{U}. \to \mathcal{U}$.*

Ejemplo 3.17 *La aplicación* $F : \mathbb{S}^1 \ni (x^0, x^1) \to [x^0, x^1] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ *(ver ejemplos 3.2, y 3.10) es una aplicación diferenciable, pero no es difeomorfismo, pues no es inyectiva.*

Ejemplo 3.18 *La esfera* $\mathbb{S}^1$ *es difeomorfa a su trasladada* $\mathbb{S} = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$. *Se considera la aplicación* $F : \mathbb{S} \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ *definida en la siguiente figura:*



es decir, $F(x, y) = [x, y]$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$, *y* $F(0, 0) = [0, 1]$. *Se prueba que* F *es difeomorfismo.*

Nota 3.19 *Dos atlas* $\mathcal{A}$, *y* $\mathcal{B}$ *sobre* M *modelados en* $\mathbb{R}^m$ *definen las correspondientes estructuras diferenciables sobre* M *digamos* $(M, \mathcal{A})$ *y* $(M, \mathcal{B})$. *Diremos que son difeomorfas si existe un difeomorfismo* $F : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B})$. *Pero esto no significa que los atlas* $\mathcal{A}$, *y* $\mathcal{B}$ *sean equivalentes, como se muestra en el ejemplo 3.13, ya que la aplicación* $u \to t = \sqrt[3]{u}$, $(\mathbb{R}, \varphi) \to (\mathbb{R}, id)$ *es un difeomorfismo.*

Nos preguntamos si en $\mathbb{R}^m$ *con la topología usual, existen estructuras diferenciables no difeomorfas a la usual (se denominan estructuras exóticas). La respuesta sorprendentemente es que no, salvo en el caso* $m = 4$. *Donaldson (1983) probó que en* $\mathbb{R}^4$ *existen infinitas estructuras exóticas.*

En general podríamos preguntarnos qué variedades euclideas admiten estructuras diferenciables exóticas. En 1956 Milnor descubrió que la esfera $\mathbb{S}^7$ *tiene 28 estructuras exóticas, mientras que* $\mathbb{S}^m$ *para* $m < 7$ *no.*

3.3.3. El anillo de funciones

Aquí centramos la atención en las funciones diferenciables f de una variedad abstracta M con valores reales. El conjunto $\mathfrak{F}(M)$ de dichas funciones, constituye una anillo (denominado *anillo de funciones de* M). En particular se construyen las funciones meseta, (de utilidad inmediata), y el teorema de existencia de patriciones difererenciables de la unidad, que nos será útil más adelante, e imprescidible en la formalización de la teoría de integración en variedades.

Si M es una variedad, denotamos por

$$\mathfrak{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \ f \text{ es diferenciable}\}$$

El conjunto $\mathfrak{F}(M)$ tiene estructura natural de anillo respecto a la suma y producto habitual de funciones reales. Se denomina a $\mathfrak{F}(M)$, anillo de funciones de M.

Nota 3.20 *Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $p \in M$, entonces se entiende que $df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$, en donde se ha identificado de manera obvia $\mathbb{R}$ con $T_{f(p)}\ \mathbb{R} = \{f(p)\}\times \mathbb{R}$.*

3.3.4. Funciones meseta

Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ se denomina soporte de f a

$$sop(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

El siguiente resultado será una buena herramienta en el futuro

Proposición 3.21 *Sea $\mathcal{U}$ abierto de M, y $p \in \mathcal{U}$. Existe entonces una función $\mu \in \mathfrak{F}(M)$, $\mu \geq 0$, con soporte compacto contenido en $\mathcal{U}$ que verifica la siguiente propiedad: $\mathcal{U}_1 = \{x \in M : \mu(x) = 1\}$ es un entorno de p. Se denomina a μ* función meseta *en torno a p*

Nota 3.22 *De esta forma si $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ puede construirse una función $\mu f \in \mathfrak{F}(M)$ definida así:*

$$(\mu f)(x) = \begin{cases} \mu(x)f(x) \text{ si } x \in \mathcal{U} \\ 0 \text{ si } x \in M - sop(f) \end{cases}$$

y que coincide con f en el entorno $\mathcal{U}_1$ de p.

Demostración: Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (diferenciable pero no analítica):

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ e^{-1/t^2} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

y a continuación se construye $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable:

$$g(s) = f(2 + s)f(-1 - s)$$

se vé que $g(s) \geq 0$, y $g(s) > 0 \Longleftrightarrow -2 < s < -1$, así tomando

$$h(t) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{t} g(s)ds \text{ siendo } A = \int_{-2}^{-1} g(s)ds$$

resulta ser $h(t) = 1$ si $t > -1$, y $h(t) = 0$ si $t < -2$. Finalmente se construye $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable, con

$$\lambda(t) = \begin{cases} h(t) \text{ si } t \leq 0 \\ h(-t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

así $\lambda(t) = 0$ si $\mid t \mid > 2$, y $\lambda(t) = 1$ si $\mid t \mid < 1$.

Construyamos para terminar la función meseta $\mu \in \mathfrak{F}(M)$. Podemos suponer (¿?) que $\mathcal{U}$ es dominio de una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, con $\varphi(p)$=0, $\varphi(\mathcal{U}) \supseteq \mathbb{B}^*(0, 2)$ (bola cerrada de centro el origen y radio 2) y definir:

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda\left(\sqrt{\sum u^i(x)^2}\right) \text{ si } x \in \mathcal{U} \\ 0 \text{ si } x \in M - \varphi^{-1}(\mathbb{B}^*(0, 2)) \end{cases}$$

Corolario 3.23 *Si K es un compacto de la variedad diferenciable M, y $\mathcal{U}$ es un abierto de M, con $\mathcal{U} \supset K$, existe entonces $\lambda \in \mathfrak{F}(M)$, $\lambda \geq 0$, con $\lambda \mid K > 0$, y $sop(\lambda) \subset \mathcal{U}$.*

3.3.5. Paracompacidad

Recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de Topología general (ver [6])

Sea M un espacio topológico, y sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_a : a \in A\}$ y $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_b : b \in B\}$ recubrimientos por abiertos de M

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *localmente finito*, si para todo $x \in M$, existe $\mathcal{U}^x$ entorno de x, de forma que el conjunto $\{a \in A : \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}^x \neq \emptyset\}$ es finito.
- Se dice que $\mathcal{R}$ es *puntualmente finito*, si para todo $x \in M$ el conjunto $\{a \in A : x \in \mathcal{U}_a\}$ es finito.
- Se dice que $\mathcal{R}$ es un *refinamiento* de (o *está subordinado a*) $\mathcal{S}$, si para todo $a \in A$, existe $b \in B$, con $\mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{V}_b$.
- Se dice que M es un espacio *paracompacto*, si es T_2 y verifica la propiedad de que *para todo recubrimiento por abiertos, existe un refinamiento localmente finito.*

Recordemos ahora, algunos resultados básicos de Topología General ($\overline{S}$ denota en este epígrafe y el siguiente, a la adherencia topológica de S)

Teorema 3.24 *Si M un espacio topológico que verifica el $IIAN$, es T_2 y es localmente compacto, entonces M es paracompacto* ■

En particular, si M es variedad diferenciable T_2 verificando el $IIAN$,

Teorema 3.25 *Si M es un espacio topológico paracompacto, entonces es normal.* ■

Recuerdese que un espacio normal, es un espacio que separa cerrados, o de forma equivalente: $\forall \mathcal{U}$ abierto y $\forall C \subset \mathcal{U}$ cerrado, $\exists \mathcal{V}$ abierto con $C \subset \mathcal{V}$ y $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$.

Teorema 3.26 *Si M es un espacio topológico normal, y $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_a : a \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos de M puntualmente finito, existe entonces un recubrimiento por abiertos $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_a : a \in A\}$ de forma que $\overline{\mathcal{V}_a} \subset \mathcal{U}_a$ para todo $a \in A$* ■

3.3.6. Particiones diferenciables de la unidad[4]

Nota 3.27 *En adelante, todas las variedades diferenciables que vamos a considerar se supondrán T_2, y verificando el $IIAN$. Así, por el teorema 3.24, todas las variedades serán paracompactas. Este es el caso, por supuesto, de las variedades euclideas.*

Una partición diferenciable de la unidad de una variedad diferenciable M, es una familia $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ donde

1. $(\mathcal{U}_a)_{a \in A}$ es un recubrimiento por abiertos de M, que es localmente finito.
2. $\forall a \in A$, $\mu_a \in \mathfrak{F}(M)$, $\mu_a \geq 0$, y *sop* $\mu_a \subset \mathcal{U}_a$

[4] Este epígrafe no es necesario en una primera lectura, pero será imprescindible en la formalización de la teoría de integración en variedades.

3. $\sum_{a\in A}\mu_a = 1$ ([5])

Se dice que $\mathcal{P}$ está subordinada a (el recubrimiento por abiertos de M) $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$ Si $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ está subordinado a $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$. El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 3.28 *Si M es variedad diferenciable, entonces para cada $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$ recubrimiento por abiertos de M, existe una partición diferenciable de la unidad $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$, subordinada.*

Demostración: Para cada $p \in M$, existe $b \in B$ con $p \in \mathcal{V}_b$, y podemos tomar un abierto $\mathcal{W}_p$, con $p \in \mathcal{W}_p \subset \mathcal{V}_b$ siendo $\overline{\mathcal{W}_p}$ compacto. Así $(\mathcal{W}_p)_{p\in M}$ es un recubrimiento de M subordinado a $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$. Como M es paracompacta existe $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ un recubrimiento por abiertos localmente finito de M, subordinado a $(\mathcal{W}_p)_{p\in M}$ y por tanto subordinado a $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$. Como cada $\mathcal{U}_a$ está contenido en algún $\mathcal{W}_p$ se concluye que $\overline{\mathcal{U}_a} \subset \overline{\mathcal{W}_p}$, y así $\overline{\mathcal{U}_a}$ (cerrado contenido en compacto) es compacto.

La demostración del teorema, se obtiene ahora de forma inmediata a partir de la siguiente proposición, que tiene interés por si misma:

Proposición 3.29 *Sea M es variedad diferenciable, y $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ un recubrimiento por abiertos localmente finito de M, de forma que para cada $a \in A$, es $\overline{\mathcal{U}_a}$ compacto. Existe entonces una partición diferenciable de la unidad $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$*

Demostración: Como M es paracompacta, (ver observación 3.27), por el teorema 3.25 es un espacio normal. Usando ahora dos veces el teorema 3.26 se concluye que existen recubrimientos por abiertos de M, $(\mathcal{W}_a)_{a\in A}$, y $(\mathcal{V}_a)_{a\in A}$ de forma que $\overline{\mathcal{V}_a} \subset \mathcal{W}_a$, y $\overline{\mathcal{W}_a} \subset \mathcal{U}_a$. $\forall a \in A$. Como $\overline{\mathcal{V}_a}$ es un compacto contenido en el abierto $\mathcal{W}_a$, usando ahora el corolario 3.23, se concluye que existe $\lambda_a \in \mathfrak{F}(M)$, $\lambda_a \geq 0$, con $\lambda_a \mid \overline{\mathcal{V}_a} > 0$, y $sop(\lambda_a) \subset \mathcal{W}_a$. La función $\lambda = \sum_{a\in A}\lambda_a$, es simpre positiva, ya que $\left(\mathcal{V}_a\right)_{a\in A}$ recubre M. Se toma entonces $\mu_a = \lambda_a/\lambda$, y $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ es la partición diferenciable pedida. ■

3.4. EL ESPACIO TANGENTE

Para generalizar el concepto de diferencial de una función se requiere construir previamente el espacio tangente en un punto de una variedad abstracta.Para ello conviene cambiar *el chip* y mirar los vectores tangentes como operadores que actuan (como derivadas direccionales) en el anillo de funciones.

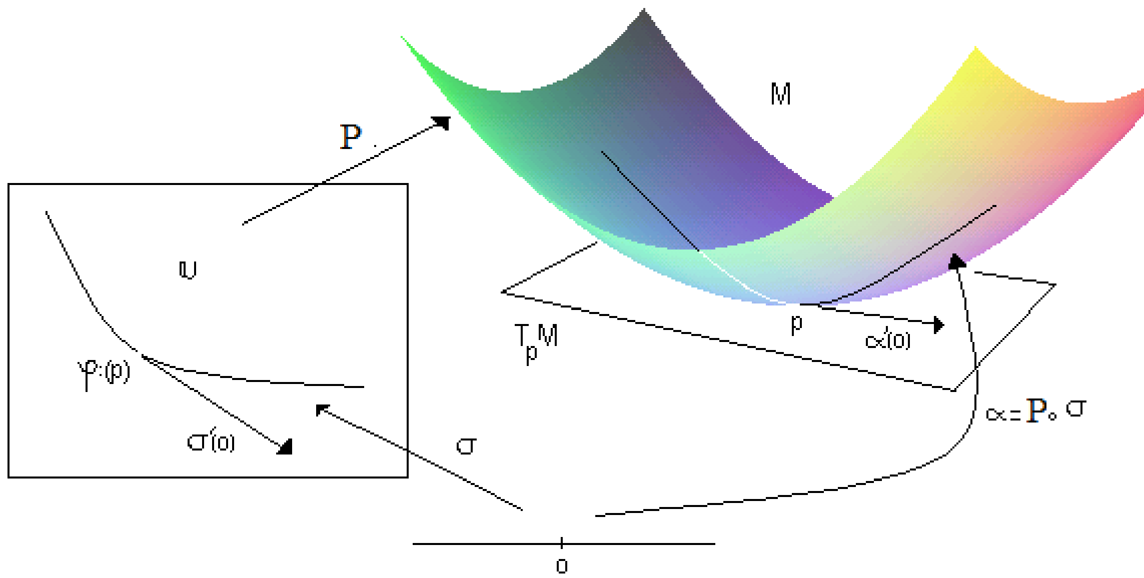
3.4.1. Espacio tangente en una variedad euclidea.

Sea $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ una parametrización de la variedad M de dimensión m , de $\mathbb{R}^n$, $\varphi = \mathbf{P}^{-1}$.Entonces para cada $p \in \mathcal{U}$, se verifica que

$$T_pM = im(d\mathbf{P}(\varphi(p))$$

además como $d\mathbf{P}(\varphi(p)) : T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m \to T_p\mathbb{R}^n$ es aplicación lineal de rango m , se concluye que T_pM es un subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$ con dimensión m. Se prueba

[5]Nótese que en un entorno $\mathcal{U}^x$ de cada punto x la suma puede considerarse finita, ya que en él, solo un número finito de sumandos es no nulo



3.4.2. Expresión analítica de los vectores tangentes.

Sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, y $\mathbf{P} = \varphi^{-1} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ la parametrización correspondiente. Veamos como describir analíticamente los vectores de T_pM , para un punto $p \in \mathcal{U}$ en las coordenadas $(u^1, \ldots, u^m)$ de φ . Los vectores $(\partial/\partial u^i)_p$ de T_pM se definen por la condición:

$$\overrightarrow{\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^i}\right)(\varphi(p)) = \left(\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial x^n}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)}\right)$$

por tanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

y constituyen una base de T_pM. Así, , el vector $\sum \lambda_i (\partial/\partial u^i)_p$ es el vector de T_pM transformado de $\sum \lambda_i (\partial/\partial u^i)_{\varphi(p)}$ por medio de $d\mathbf{P}(\varphi(p))$. Naturalmente T_pM es independiente de la parametrización utilizada en torno al punto p. Esto queda implícitamente probado a continuación

3.4.3. Cambio de coordenadas.

Si $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ es otra carta y $p \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$, se verifica la fórmula:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}\right)_p$$

donde $\bar{u}^j = \bar{u}^j(u, v)$ son las ecuaciones del cambio de carta (ver 4)

3.4.4. Expresión analítica de la diferencial

Sea $F : M \to \overline{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades euclideas, $p \in M$, y $F^{\varphi\overline{\varphi}}$ una expresión analítica local de F en torno a p, como en 4.

Entonces:

$$dF(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial F^j}{\partial u^i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}\right)_p$$

Nota 3.30 $\mathbf{P}:\mathbb{U}.\rightarrow\mathcal{U}$ *Nótese que se tiene ahora la identidad para una carta* $(\mathcal{U},\varphi)$ $\mathbf{P}=\varphi^{-1}:\mathbb{U}\rightarrow\mathcal{U}$

$$d\mathbf{P}(\varphi(p))\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

3.4.5. Derivada direccional de una función.

Dado un vector $\xi\in T_pM$, y una función $f\in\mathfrak{F}(M)$ se define la derivada direccional de f según el vector ξ, que denotamos provisionalmente por $\tilde{\xi}(f)$ mediante la fórmula:

$$\tilde{\xi}(f) = df(p)(\xi)$$

Si $\alpha\in C(p,M)$ con $\alpha'(0)=\xi$, entonces se tiene (ver observación 3.20):

$$\tilde{\xi}(f) = (f\circ\alpha)'(0)$$

Se tiene por tanto una aplicación $\tilde{\xi}$:$\mathfrak{F}(M)\rightarrow\mathbb{R}$. Es fácil comprobar que se verifican las siguientes propiedades, para todo $f,g\in\mathfrak{F}(M)$, todo $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, todo $\xi,\eta\in T_pM$:

0) Si $f\circ\alpha=g\circ\alpha$ para un $\alpha\in C(p,M)$ con $\alpha'(0)=\xi$, entonces $\tilde{\xi}(f)=\tilde{\xi}(g)$. En particular $\tilde{\xi}(f)=\tilde{\xi}(g)$, cuando f, y g coinciden en un entorno $\mathcal{U}$ de p.

1) $\tilde{\xi}(\lambda f+\mu g)=\lambda\tilde{\xi}(f)+\mu\tilde{\xi}(g)$

2) $\tilde{\xi}(fg)=\tilde{\xi}(f)g(p)+f(p)\tilde{\xi}(g)$.

3) $(\widetilde{\lambda\xi+\mu\eta})(f)=\lambda\tilde{\xi}(f)+\mu\tilde{\eta}(f)$.

4) Si $S=\mathbb{U}$ es abierto de $\mathbb{R}^n$ se tiene la identidad:

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}_p(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$$

5) Si $(\mathcal{U},\varphi)$ una carta de M, $\varphi=(u^1,\ldots,u^m)$, $\mathbf{P}=\varphi^{-1}$ la parametrización local asociada, entonces , para $p\in\mathcal{U}$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)}_p(f) = \left(\frac{\partial(f\circ\mathbf{P})}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)} \text{ y se escribe } \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)_p \tag{5}$$

y además se verifica para cada $\xi\in T_pM$ la identidad

$$\xi = \sum\tilde{\xi}(u^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \tag{6}$$

3.4.6. Espacio tangente en una variedad abstracta.

Fijemos M variedad (abstracta) y un punto $p\in M$ trataremos aquí de establecer una definición adecuada para el espacio T_pM, o espacio tangente en p de M. La clave la tenemos en la derivada direccional establecida más arriba para variedades euclídeas. La teoría que se establece generaliza la de Sección 2.2.

Un vector por un punto $p \in M$ es un operador $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ que verifica para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ las propiedades 1) y 2) del epígrafe 3.4.5, es decir:
1) $\boldsymbol{\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda \boldsymbol{\xi}(f) + \mu \boldsymbol{\xi}(g)$
2) $\boldsymbol{\xi}(fg) = \boldsymbol{\xi}(f) g(p) + f(p) \boldsymbol{\xi}(g)$.
El conjunto M_p de vectores por $p \in M$, tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Nota 3.31 *1. Si M es variedad euclidea, $p \in M$, la aplicación*

$$T_p M \ni \xi \to \tilde{\xi} \in M_p \tag{7a}$$

es una aplicación $\mathbb{R}-$lineal. Nuestro objetivo es probar que de hecho es un isomorfismo, que por ser canónico permitirá identificar ambos espacios, y no hacer distinciones de notación entre ξ y $\tilde{\xi}$.

2. Inspirándonos en la fórmula (5) construimos el siguiente ejemplo: Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, $\varphi = (u^1, \ldots, u^m)$, para $f \in \mathfrak{F}(M)$ definimos

$$\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i}\right)_p (f) = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)}$$

y resulta ser una derivación por el punto p. De hecho veremos que estas derivaciones constituyen una base de M_p. Nótese que si M es euclídea, y $\mathbf{P} = \varphi^{-1}$ es una parametrización, se tiene la identidad:

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p} = \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i}\right)_p$$

Lema 3.32 *Sea $\boldsymbol{\xi} \in M_p$, y $\mathcal{U}$ un entorno de p. Supóngase $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ tales que $f \mid \mathcal{U} = g \mid \mathcal{U}$. Entonces $\boldsymbol{\xi}(f) = \boldsymbol{\xi}(g)$. En particular, $\boldsymbol{\xi}$ puede considerarse aplicación $\mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ y define una derivación por p en $\mathcal{U}$.*

Proposición 3.33 *Si $p \in M$, existe $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, $\varphi = (u^1, \ldots, u^m)$, $p \in \mathcal{U}$, $\varphi(p) = (0, \ldots, 0)$ de forma que para cada $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, existen funciones $h_i \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ tales que:*

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i \tag{8}$$

con

$$h_i(p) = \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i}\right)_p (f)$$

En particular para cada $\boldsymbol{\xi} \in M_p$ se tiene la identidad:

$$\boldsymbol{\xi} = \sum \boldsymbol{\xi}(u^i) \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i}\right)_p$$

y por tanto M_p es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión m.

Demostración. Tomemos en torno a p una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ con $\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{R}^m$, $\varphi(p) = (0, \ldots, 0) = 0$, sea $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ y sea $F = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciable.

Fijado $u = (u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{R}^m$, se tiene la identidad

$$\begin{aligned} F(u) - F(0) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} F\left(su^1, \ldots, su^m\right) ds \\ &= \int_0^1 \left(\sum \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \right)_{su} u^i \right) ds = \sum u^i H_i \end{aligned}$$

donde

$$H_i(u) = \int_0^1 \sum \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \right)_{su} ds$$

y se tiene

$$H_i(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \right)_0$$

basta entonces tomar $h_i = H_i \circ \varphi$.

Aplicando a ambos miembros de (8) el vector $\boldsymbol{\xi} \in M_p$ y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\xi}\,(cte) = 0 = u^i(p)$ se obtiene

$$\boldsymbol{\xi}\,(f) = \sum \boldsymbol{\xi}\left(u^i h_i\right) = \sum \boldsymbol{\xi}\left(u^i\right) h_i(p) = \left(\sum \boldsymbol{\xi}(u^i) \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i} \right)_p \right) (f)$$

■

Pero esta igualdad vale para cualquier carta en torno a p

Corolario 3.34 *Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, $\varphi = (u^1, \ldots, u^m)$, $p \in \mathcal{U}$, entonces para cada $\boldsymbol{\xi} \in M_p$ se tiene la identidad:*

$$\boldsymbol{\xi} = \sum \boldsymbol{\xi}(u^i) \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i} \right)_p \tag{9}$$

En particular, se verifica que

$$\left\{ \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^m} \right)_p \right\} \tag{10}$$

constituyen una base de M_p, y la aplicación $T_pM \ni \xi \to \tilde{\xi} \in M_p$ considerada en (7a) define de hecho un isomorfismo lineal (canónico).

Demostración. Nótese que (10) constituye un sistema linealmente independiente de m vectores en un espacio vectorial de dimensión m, y por tanto forma base, ya que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \sum_i \boldsymbol{\xi}^i \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u^i} \right)_p \implies \text{para cada } j \\ \xi\left(u^j\right) &= \sum_i \boldsymbol{\xi}^i \left(\frac{\tilde{\partial} u^j}{\partial u^i} \right) = \xi^j \end{aligned}$$

■

Si M es una variedad euclídea, el isomorfismo canónico (7a), nos permite identificar los espacios T_pM y M_p .En adelante, no haremos distinción alguna entre ξ y $\tilde{\xi}$, y abandonamos definitivamente la notación $\tilde{\xi}$. Escribimos a partir de ahora $(\partial/\partial u^i)_p$ en lugar de $(\tilde{\partial}/\partial u^i)_p$.

También abandonamos la notación M_p: Si M es variedad abstracta, se denota por T_pM al espacio vectorial de las derivaciones por p, que pasará a llamarse ahora espacio tangente a M por el punto p. Un elemento $\xi \in T_pM$ se llamará vector tangente a M por p.

3.4.7. Los vectores tangentes como vectores velocidad

Si $\alpha : I \to M$ es una curva diferenciable en una variedad abstracta M, y $\tau \in I$, se define el vector velocidad $\alpha'(\tau) \in T_{\alpha(\tau)}M$ por la fórmula

$$\alpha'(\tau) : \mathfrak{F}(M) \ni f \to (f \circ \alpha)'(\tau) \in \mathbb{R}$$

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, $\varphi = (u^1, \ldots, u^m)$ y $\alpha(\tau) \in \mathcal{U}$ se tiene la fórmula

$$\alpha'(\tau) = \sum (u^i \circ \alpha)'(\tau) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\alpha(\tau)}$$

Si como es habitual, denotamos por $C(p, M)$ las curvas por p, se verifica:

$$T_pM = \{\alpha'(0) : \alpha \in C(p, M)\}$$

3.5. LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCION.

Sea $F : M \to \overline{M}$ una función diferenciable entre variedades, $p \in M$. Si $\xi \in T_pM$, se define:

$$dF(p)(\xi) : \mathfrak{F}(\overline{M}) \ni \bar{f} \to \xi(\bar{f} \circ F) \in \mathbb{R}$$

y esto da lugar a una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $dF(p) : T_pM \to T_{F(p)}\overline{M}$. Si suponemos $\xi = \alpha'(0)$ para $\alpha \in C(p, M)$ se tiene entonces la fórmula:

$$dF(p)(\alpha'(0)) = (F \circ \alpha)'(0)$$

Ejercicio 3.35 *Probar que si $F : M \to \overline{M}$ es una aplicación difierenciable entre variedades tal que $dF(p) = 0$ para todo $p \in M$ y M es conexa, entonces F es constante.*

Indicación: *Probar primero que $F \circ \alpha$ es constante para cada curva α en M.*

3.5.1. Expresión local de la diferencial.

Si $(\mathcal{U}, \varphi{=}(u^1, \ldots u^m))$,$(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi} = (\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^{\bar{m}}))$, son cartas con con $p \in \mathcal{U}$, $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, y $F^{\varphi\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}})$, es la expresión analítica de F, entonces se verifica:

$$dF(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum \left(\frac{\partial F^j}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}\right)_{F(p)}$$

Nota 3.36 1. *Si $(\mathcal{U}, \varphi{=}(u^1, \ldots u^m))$ es una carta de M, y $p \in M$, entonces $\varphi{:}\mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$ puede considerarse un difeomorfismo, y se tiene la identidad:*

$$d\varphi(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)}$$

2. *Si $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $df(p) : T_pM \to \{f(p)\} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ y se tiene la identidad:*

$$\xi(f) = df(p)(\xi) \text{ para todo } \xi \in T_pM$$

3.5.2. Regla de la cadena.

Si $F : M \to M'$,$G : M' \to M''$ son funciones diferenciables entre subconjuntos también lo es la función $G \circ F$:$M \to M''$, y se verifica para cada $p \in M$:

$$d(G \circ F)(p) = dG(F(p)) \circ dF(p)$$

3.5.3. Teorema de la función inversa.

Sea $F : M \to \overline{M}$ una función diferenciable entre variedades, $p \in M$. Supóngase que la matriz $dF(p)$ es un isomorfismo lineal. Existe entonces un abierto $\mathcal{U}$, con $p \in \mathcal{U}$, de forma que $F(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{U}}$ es abierto de $\overline{M}$, y $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es difeomorfismo.

Si $dF(p)$ es un isomorfismo lineal para todo $p \in M$, entonces se denomina a F difeomorfismo local. Nótese que $F^{-1}(\overline{p})$ constituye para cada $\overline{p} \in \overline{M}$ un conjunto discreto de puntos

3.5.4. Inmersiones y submersiones.

Sea $\phi : M \to \overline{M}$ una función diferenciable entre variedades, $p \in M$. Se dice que ϕ es una inmersion , en p si $d\phi\,(p)$. Se dice que ϕ es submersión en p si $d\phi\,(p)$ es suprayectiva para todo $p \in M$. Finalmente ϕ es inmersión (submersión), si lo es en todo punto $p \in M$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.37 *Sea $\phi : M \to \overline{M}$ una función diferenciable entre variedades y $p \in M$. Entonces*

a) Si ϕ es una inmersión en p, entonces $\overline{m} = \dim \overline{M} \geq m = \dim M$ y existen cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M con $p \in \mathcal{U}$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ de $\overline{M}$ con $\phi\,(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$ donde las ecuaciones locales de ϕ son de la forma

$$\overline{u}^1 = u^1, \ldots, \overline{u}^m = u^m, \overline{u}^{m+1} = 0 \ldots, \overline{u}^{\overline{m}} = 0$$

b) Si ϕ es una submersión en p, entonces $\overline{m} = \dim \overline{M} \leq m = \dim M$ y existen cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M con $p \in \mathcal{U}$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ de $\overline{M}$ con $\phi\,(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$ donde las ecuaciones locales de ϕ son de la forma

$$\overline{u}^1 = u^1, \ldots, \overline{u}^{\overline{m}} = u^{\overline{m}}$$

en particular $\phi : M \to \overline{M}$ es una aplicación abierta.

Demostración. a) Es la misma demostración que aparece en el teorema 3.41 siguiente, en donde ahora las $\mathbf{P}^i = x^i \circ \varphi^{-1} \circ \phi$ describen las ecuaciones locales de la ϕ en las cartas $(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$ (de M en torno a p) y $(\overline{\mathcal{U}}, \chi = (x^1, \ldots, x^{\overline{m}}))$, $\chi(\overline{\mathcal{U}}) = \widetilde{\mathbb{U}} \times \widehat{\mathbb{U}}$ siendo $\widetilde{\mathbb{U}} \subset \mathbb{R}^m$ y $\widehat{\mathbb{U}} \subset \mathbb{R}^r$, $\overline{m} = m + r$. La carta $\overline{\varphi} = \left(\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^m\right)$ es tal que su relación con $(x^1, \ldots, x^{\overline{m}})$ viene dada por las ecuaciones (11).

(b) Si $\overline{u}^i = \phi^i\left(x^1, \ldots, x^m\right)$ $1 \leq i \leq \overline{m}$ son las ecuaciones locales de ϕ, en las cartas $(\mathcal{U}, \chi = \left(x^1, \ldots, x^m\right)$) y $\left(\mathcal{U}, \overline{\varphi} = \left(\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^m\right)\right)$ y supuesto

$$\left| \frac{\partial\left(\phi^1, \ldots, \phi^{\overline{m}}\right)}{\partial\left(x^1, \ldots, x^{\overline{m}}\right)} \right| \neq 0$$

entonces las coordenadas buscadas $\varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$ vienen definidas por

$$u^i = \phi^i\left(x^1, \ldots, x^m\right) \;\; 1 \leq i \leq \overline{m},\; u^j = \;\; \overline{m} \leq j \leq m$$

■

Corolario 3.38 *Sea $\phi : M \to \overline{M}$ una función diferenciable entre variedades y N una variedad. Entonces:*

a) Si ϕ es inmersión, para que una aplicación continua $F : N \to M$ sea diferenciable es suficiente con que lo sea $\phi \circ F : N \to \overline{M}$.

b) Si ϕ es submersión, para que una aplicación $F : \overline{M} \to N$ sea diferenciable es suficiente con que lo sea $F \circ \phi : M \to N$.

Una aplicación $\phi : M \to \overline{M}$ que sea a la vez inmersión y submersión es exactamente un difeomorfismo local.

3.6. SUBVARIEDADES[6]

Un subconjunto de una variedad diferenciable, se llamará subvariedad, si hereda -en un sentido que se precisará más adelante- la estructura de variedad diferenciable. La definición que establezcamos, deberá ser tal que, si tomamos como variedad diferenciable de partida $\mathbb{R}^n$, las subvariedades sean precisamente las variedades euclídeas de $\mathbb{R}^n$. Este apartado generaliza por tanto la sección 3.1

En lo que sigue, $\overline{M}$, es una variedad diferenciable de dimensión $\overline{m}$.

3.6.1. Parametrizaciones Locales.

Sea M un subconjunto de $\overline{M}$. Una parametrización local de M, de dimensión m (o m -parametrización) es un homeomorfismo $\mathbf{P} :\mathbb{U} \to \mathcal{U}$, donde $\mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $\mathcal{U}$ es un abierto de M (en la topología relativa). Además se exige la siguiente propiedad de regularidad:

$\mathbf{P} :\mathbb{U} \to \overline{M}$ es una aplicación diferenciable, y $rg(d\mathbf{P}(u)) = m$ para todo $u \in \mathbb{U}$

3.6.2. Concepto de subvariedad

Un subconjunto no vacio M de $\overline{M}$ se llama subvariedad de $\overline{M}$ con dimensión m si para cada punto $p \in M$, *existe* una carta $\left(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi}\right)$ tal que $\varphi\left(\overline{\mathcal{U}} \cap M\right)$ es variedad euclidea m dimensional de $\mathbb{R}^{\overline{m}}$. Obviamente en esta condición puede sustituirse el *existe* por un *para todo*, ya que la propiedad de ser variedad euclidea se preserva por difeomorfismos. Se tiene el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata:

Proposición 3.39 *Sea M un subconjunto no vacío de la variedad $\overline{M}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(1) M subvariedad m-dimensional de M

(2) Para todo $p \in M$ existe una m -parametrización local $\mathbf{P} :\mathbb{U} \to \mathcal{U} \subset \overline{M}$ de M con dimensión m , y $p \in \mathcal{U}$

Aplicando el teorema de la función implícita (y en particular la observación 1) se concluye:

3.6.3. Subvariedades en implícitas

Sea $M = F^{-1}(0)$, el conjunto de los ceros de una función diferenciable $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$ siendo $\mathbb{D}$ un abierto de $\overline{M}$ ($\overline{m} > n$) Si $rang(dF(p)) = n$ para todo $p \in M$, entonces M es una subvariedad de $\overline{M}$ con dimensión $m = \overline{m} - n$.

Más general:

[6]Este epígrafe, no es necesario en una primera lectura.

Teorema 3.40 *$F : \overline{M} \to N$ es una submersión ($n = \dim N$) entonces para cada $x \in M$, el conjunto $F^{-1}(F(x))$ es una subvariedad de $\overline{M}$ con dimensión $m = \overline{m} - n$.*

3.6.4. Cartas adaptadas.

Veremos que si M es una subvariedad de $\overline{M}$, la estructura diferenciable de M, queda perfectamente predeterminada por la de $\overline{M}$, y la propiedad de ser subvariedad solo depende por tanto, del *subconjunto* M.

Teorema 3.41 *Si M es una subvariedad de $\overline{M}$ con dimensión $m = \overline{m} - r > 0$, entonces por cada $p \in M$, hay una carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ de $\overline{M}$ con $\overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}}) = \widetilde{\mathbb{U}} \times \widehat{\mathbb{U}}$, de forma que $\overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}} \cap M) = \widetilde{\mathbb{U}} \times \{\hat{0}\}$*

Demostración: Fijado $p \in M$ sea $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una m -parametrización de M en $\overline{M}$ con $p \in \mathcal{U}$, sea $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \cap M$ donde $(\overline{\mathcal{U}}, \chi = (x^1, \ldots, x^{\overline{m}}))$ es una carta de $\overline{M}$. Así $\chi \circ \mathbf{P} : \mathbb{U} \to \chi(\overline{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{R}^{\overline{m}}$ es una aplicación diferenciable de rango m , ya que $(\varphi = \mathbf{P}^{-1})$ es $rg(D\mathbf{P}(\varphi(p)) = m$. Tomando $\mathbf{P}^i = x^i \circ \mathbf{P}$, podemos suponer por ejemplo que

$$\left| \frac{\partial(\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^m)} \right| (\varphi(p)) \neq 0$$

admitir sin perdida de generalidad que $\chi(\overline{\mathcal{U}}) = \widetilde{\mathbb{U}} \times \widehat{\mathbb{U}}$ siendo $\widetilde{\mathbb{U}} \subset \mathbb{R}^m$ y $\widehat{\mathbb{U}} \subset \mathbb{R}^r$ abiertos, y que la función $\widetilde{\mathbf{P}} = (\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^m) : \mathbb{U} \to \widetilde{\mathbb{U}}$ tiene una inversa $\psi = \widetilde{\mathbf{P}}^{-1} : \widetilde{\mathbb{U}} \to \mathbb{U}$ que es diferenciable. La función $\mathbf{P} \circ \psi : \widetilde{\mathbb{U}} \to \widetilde{\mathbb{U}} \times \widehat{\mathbb{U}}$ tiene ecuaciones del tipo:

$$x^1 = \tilde{x}^1, \ldots, x^m = \tilde{x}^m,\ x^{m+1} = \zeta^1(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m), \ldots, x^{\overline{m}} = \zeta^r(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$$

Las igualdades

$$\begin{array}{c} \bar{u}^1 = x^1, \ldots, \bar{u}^m = x^m \\ \bar{u}^{m+1} = x^{m+1} - \zeta^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, \bar{u}^{\overline{m}} = x^{\overline{m}} - \zeta^r(x^1, \ldots, x^m) \end{array}, \qquad (11)$$

definen un difeomorfismo ,$\phi : \widetilde{\mathbb{U}} \times \widehat{\mathbb{U}} \to \overline{\mathbb{U}}$, y $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \phi \circ \chi : \overline{\mathcal{U}} \to \overline{\mathbb{U}}$, es la carta buscada. ∎

Nota 3.42 *A la carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ que aparece en el teorema de arriba, se le denomina* carta por p adaptada a M.

Nota 3.43 *Si $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una m -parametrización de M, y la aplicación $\varphi = \mathbf{P}^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$, es carta de M. Si M es subvariedad con dimensión m de $\overline{M}$, la familia*

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}, \varphi = \mathbf{P}^{-1}) : \mathbf{P} \text{ es } m\text{-parametrización de } M\}$$

constituye un atlas de M. Así resulta que M tiene estructura natural de variedad diferenciable de dimensión m.

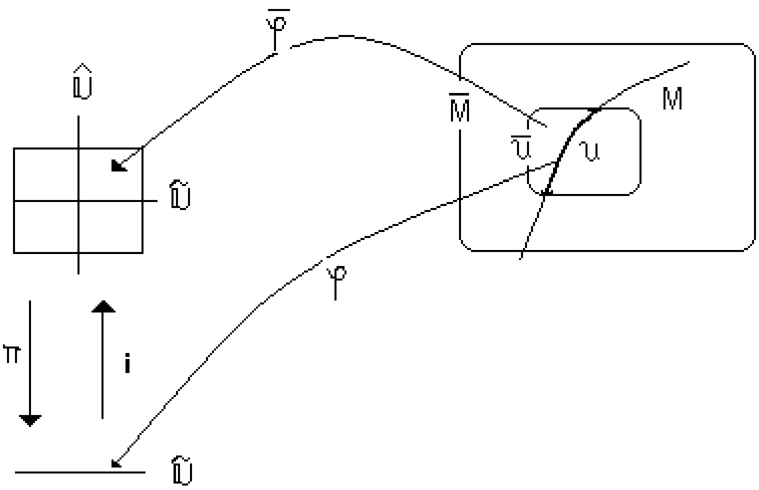
Con la ayuda de cartas adaptadas es fácil probar la siguiente

Proposición 3.44 *Sea $F : N \to \overline{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades, y M una subvariedad de $\overline{M}$ que contiene a $F(N)$. Entonces $F : N \to M$ es aplicación diferenciable.*

3.6.5. Estructura diferenciable de una subvariedad

Si M es una subvariedad de $\overline{M}$ con dimensión m , admite entonces una estructura de variedad de dimensión m.

En efecto, si $p \in M$, sea $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ es una carta por p adaptada a M. Usando las mismas notaciones que en el enunciado del teorema 3.41, y denotando por $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \cap M$, y $\varphi = \pi \circ (\overline{\varphi}|\mathcal{U}) : \mathcal{U} \to \widetilde{\mathbb{U}}$, resulta ser $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, donde $\pi : \widetilde{\mathbb{U}} \times \widehat{\mathbb{U}} \to \widetilde{\mathbb{U}}$ es la proyección canónica. Nótese que $\varphi^{-1} = \overline{\varphi}^{-1} \circ i$ siendo $i : \widetilde{\mathbb{U}} \to \widetilde{\mathbb{U}} \times \{\hat{0}\}$ es la inclusión canónica, y las aplicaciones i, y π son inversas la una de la otra $\widetilde{\mathbb{U}} \times \{\hat{0}\} \rightleftarrows \widetilde{\mathbb{U}}$ (véase figura)



Así, si $(\overline{\mathcal{U}_1}, \overline{\varphi}_1)$ y $(\overline{\mathcal{U}_2}, \overline{\varphi}_2)$ son dos cartas por p adaptadas a M, usando las notaciones obvias se tiene:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \pi \circ (\overline{\varphi}_2 \circ \overline{\varphi}_1^{-1}) \circ i : \varphi_1 (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to \varphi_2 (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

es diferenciable, y así $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$, $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ son cartas compatibles.

3.6.6. Embedings (Incrustamientos).

Una aplicación $F : M \to \overline{M}$ una función diferenciable entre variedades se llama incrustamiento si es una inmersión inyectiva y además F como aplicación $F : M \to F(M) \subset \overline{M}$ es un homeomorfismo. Nótese que si M es subvariedad de $\overline{M}$ una m -parametrización local $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U} \subset \overline{M}$ de M es un incrustamiento. Más general:

Teorema 3.45 *(a) Si $F : M \to \overline{M}$ es un incrustamiento entre variedades, entonces $F(M)$ es una subvariedad de $\overline{M}$, y además F como aplicación $F : M \to F(M) \subset \overline{M}$ es un difeomorfismo.*

(b) Si M es subvariedad de $\overline{M}$ entonces la inclusión $\iota_M : M \to \overline{M}$ es un incrustamiento.

Con ayuda de este teorema y de la proposición 3.44 es fácil resolver el siguiente

Ejercicio 3.46 *Sea* $F : M \to \overline{M}$ *un incrustamiento y* $\overline{\phi} : N \to \overline{M}$*, aplicación diferenciable. Una aplicación* $\phi : N \to M$ *tal que* $F \circ \phi = \overline{\phi}$ *es necesariamente diferenciable.*

Si solo se impone que F *sea inmersión el resultado sigue siendo cierto cuando pedimos además que* ϕ *sea continua.*

3.7. VARIEDAD PRODUCTO

Probaremos que puede darse estructura de variedad diferenciable (con la topología producto) de dimensión $m = m_1 + m_2$ al producto cartesiano $M = M_1 \times M_2$ de forma que las proyecciones $u_a : M \ni p = (p_1, p_2) \mapsto p_a \in M_a$ sean submersiones. La variable a tomará siempre los valores 1 y 2.

3.7.1. La Carta Producto

Si $(\mathcal{U}_a, \varphi_a = (u_a^1, \ldots, u_a^{m_a}))$ es una carta de M_a , se define la carta producto $(\mathcal{U}, \varphi)$ en M por la condición: $\varphi : \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \ni p = (p_1, p_2) \mapsto (\varphi_1(p_1), \varphi_2(p_2)) \in \varphi_1(\mathcal{U}_1) \times \varphi_2(\mathcal{U}_2)$, de forma que podemos escribir $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 = (u_1^1, \ldots, u_1^{m_1}, u_2^1, \ldots\ , u_2^{m_2})$. Podemos recubrir M de cartas producto, obteniendo así la estructura diferenciable pedida.

3.7.2. El Espacio Tangente del Producto. La Diferencial.

Sea N variedad diferenciable. Una función $\Phi : N \longmapsto M$ se puede descomponer en la forma $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ con $\Phi_a = u_a \circ \Phi$, así se tiene que Φ es diferenciable si y solo si lo son cada una de sus componentes.

Dos curvas diferenciables $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I_\varepsilon \longmapsto M$ y $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) : I_\varepsilon \longmapsto M$ con $\alpha(0) = \bar{\alpha}(0) = p = (p_1, p_2)$ definen para $t = 0$ el mismo vector tangente en T_pM si y solo si α_a y $\bar{\alpha}_a$ definen para $t = 0$ el mismo vector tangente en $T_{p_a}M$. En particular se tiene que la aplicación:

$$T_pM \ni \alpha'(0) \mapsto (\bar{\alpha}_1'(0), \bar{\alpha}_2'(0)) \in T_{p_1}M \times T_{p_2}M$$

es un isomorfismo lineal que permite identificar ambos espacios. Este isomorfismo canónico es exactamente el definido por $(du_1(p), du_2(p)) : T_pM \longmapsto T_{p_1}M \times T_{p_2}M$. Identificando $T_{p_a}M$ como subespacio vectorial de T_pM podemos escribir $T_pM = T_{p_1}M \oplus T_{p_2}M$ y es entonces válida la descomposición: $\xi = du_1(\xi) + du_2(\xi)$ para todo $\xi \in T_pM$. Así cuando $\Phi : N \longmapsto M$ es aplicación diferenciable, se verifica $d\Phi(q) = d\Phi_1(q) + d\Phi_2(q)$ para todo $q \in N$.

Si suponemos ahora $\Phi : M \longmapsto N$ fijado $p = (p_1, p_2) \in M$ y denotando por

$$\Phi_{p_1} : M_2 \ni x_2 \mapsto (p_1, x_2) \in M, \quad \Phi_{p_2} : M_1 \ni x_1 \mapsto (x_1, p_2) \in M$$

se concluye que $d\Phi(p)(\xi) = d\Phi_{p_2}(p_1)(du_1(\xi)) + d\Phi_{p_1}(p_2)(du_2(\xi))$ ó simbólicamente:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2$$

3.8. VARIEDAD COCIENTE.

Sea ρ una relación de equivalencia sobre una variedad M. Se denota al conjunto cociente M/ρ, y $\pi : M \to M/\rho$ denota la proyección natural que envía cada punto de M a su correspondiente clase de equivalencia. Si el conjunto $\overline{M} = M/\rho$ tiene estructura de variedad diferenciable tal que $\pi : M \to \overline{M}$ es una submersión, se dice que $\overline{M}$ es variedad cociente de M (por ρ).

Ejemplo 3.47 *Una submersión suprayectiva $\phi : M \to \overline{M}$ define una relación de equivalencia ρ en M*

$$x\rho y \Longleftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

cuyo conjunto cociente es $M/\rho = \left\{\phi^{-1}(\overline{x}) : \overline{x} \in \overline{M}\right\}$ llamado conjunto de fibras de la submersión. Podemos dar a M/ρ la estructura de variedad que hace difeomorfismo a la biyección canónica $\overline{x} \to \phi^{-1}(\overline{x})$, $\overline{M} \to M/\rho$, y obiamente con esta estructura M/ρ es variedad cociente de M por ρ.

3.8.1. Sobre la topología del cociente.

Si M es IIAN entonces la variedad cociente $\overline{M}$ también lo es, ya que $\pi : M \to \overline{M}$ es una aplicación continua sobreyectiva y abierta por ser submersión. Sin embargo, aunque M sea Hausdorf, $\overline{M}$ no tiene porqué serlo. El ejemplo 3.11 del *cero suplantador* es un caso no Hausdorff de variedad cociente. En todo caso $\overline{M}$ tiene la topología final de π (topología cociente), en la que un conjunto $\overline{\mathcal{U}} \subset \overline{M}$ es abierto de $\overline{M}$ si y solo si $\pi^{-1}\left(\overline{\mathcal{U}}\right)$ es abierto de M.

3.8.2. Sobre la estructura diferenciable del cociente.

No siempre M/ρ admite una estructura de variedad cociente de M.

Ejemplo 3.48 *En $M = \mathbb{R}^2$ se define la relación*

$$\left(x^1, x^2\right) \rho \left(y^1, y^2\right) \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^* \Big/ \begin{array}{l} y^1 = ax^1 \\ y^2 = ax^2 \end{array}$$

el espacio cociente $M/\rho = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cup \{\{(0,0)\}\}$, y no hay estructura diferenciable en M/ρ que haga submersión a $\pi : M \to M/\rho$, pues si existiera, todas sus fibras $\pi^{-1}(u)$ serían variedades unidimensionales (ver Teorema 3.40) pues lo son las $\pi^{-1}(u)$ para $u \neq (0,0)$, y no se puede dar a $\pi^{-1}\{(0,0)\} = \{(0,0)\}$ estructura de variedad unidimensional.

Sin embargo si hay una estructura de variedad cociente de M para M/ρ, ésta es única, en el sentido de que todas son difeomorfas.

En efecto, si $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_2$ son dos estructuras diferenciables cociente en M/ρ, entonces como $\pi : M \to \overline{M}_1$ es submersión, aplicando el Corolario 3.38 (b) se ve la aplicación $id : \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ es diferenciable por serlo $\pi = id \circ \pi : M \to \overline{M}_2$. Análogamente se ve que $id : \overline{M}_2 \to \overline{M}_1$ así id es un difeomorfismo de $\overline{M}_1$, a $\overline{M}_2$.

3.8.3. Acciones discontinuas.

Una acción (por la izquierda) de un grupo G, sobre una variedad M viene definida por una aplicación

$$\Phi : G \times M \to M$$

tal que:

i) La función $\phi_g : M \to M$ definida para cada $g \in G$ dado por $p \to \Phi(g,p)$ es diferenciable.

ii) Si $g, h \in G$, $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$.

iii) Si $e \in G$ es el elemento neutro del grupo entonces $\phi_e = id$

En particular cada ϕ_g es un difeomorfismo de M, ya que $\phi_g \phi_{g^{-1}} = \phi_e = id$.

La acción se dice efectiva si

iv) e es el único elemento del grupo tal que $\phi_g = id$.

En este caso la aplicación $g \to \phi_g$ induce un homomorfismo inyectivo de G en el grupo $difeo(M)$ de difeomorfismos de M. Identificamos g con ϕ_g y escribimos $g.p = \phi_g(p)$. Se considera $G \subset difeo(M)$ grupo de transformaciones. Sólo consideraremos a partir de aquí acciones efectivas.

Dado $p \in M$, el conjunto

$$G_p = \{g \in G : g.p = p\}$$

constituye un subgrupo de G denominado subgrupo de isotropía de p.

La acción es libre si $G_p = \{e\}$ para todo $p \in M$.

Finalmente la acción se llama discontinua si:

v) Para cada $p \in M$, existe $\mathcal{U}$ entorno de p en M, tal que $(g.\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \varnothing$ $\forall g \in G$, $g \neq e$.

Nótese que una acción discontinua es necesariamente libre y por tanto efectiva.

Una acción propiamente discontinua y libre se llama discontinua.

La acción de G induce sobre M una relación de equivalencia $\rho = G$ definida por

$$pGq \Leftrightarrow \exists g \in G,\ q = g.p$$

y podemos considerar el espacio cociente M/G, cuyos elementos $Gp = \{gp : g \in G\}$ se denominan órbitas de la acción

Proposición 3.49 *Si el grupo de transformaciones G actua de forma discontinua en la variedad M, entonces el cociente admite estructura de variedad cociente $\overline{M} = M/G$ con la misma dimensión que M.*

Demostración. Sea $\pi : M \to \overline{M}$ la proyección canónica. Esto significa que

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ con } y = g.x$$

Fijado $\overline{p} = \pi(p) \in \overline{M}$, sea $\mathcal{U}$ entorno abierto y conexo de p en M tal que $(g.\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \varnothing$ $\forall g \in G$, $g \neq e$. Entonces $\overline{\mathcal{U}} = \pi(\mathcal{U})$ es abierto conexo de $\overline{M}$ que contiene a $\overline{p}$ y la aplicación $\pi : \mathcal{U} \to \overline{M}$ es inyectiva (ya que si $x, y \in \mathcal{U}$ con $\pi(x) = \pi(y)$ entonces $\exists g \in G$ con $y = g.x$, y por tanto $y \in (g.\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$, así $g = e$ y $x = y$). En particular $\pi : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ es homeomorfismo. Si $\mathcal{U}$ es dominio de una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M, entonces $\left(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi} = (\pi|_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \varphi\right)$ es carta de $\overline{M}$ y claramente si $(\mathcal{U}, \psi)$ es otra carta de M entonces

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \psi(\mathcal{U})$$

y por tanto $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$, y $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\psi})$ son compatibles. Además $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ se descompone en unión disjunta de componente conexas abiertas en la forma

$$\pi^{-1}\left(\overline{\mathcal{U}}\right) = \bigcup_{g \in G} (g.\mathcal{U})$$

y sobre cada una de ellas $\pi : g.\mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ es homeomorfismo. Como $\pi \circ \phi_g = \pi$, no se obtienen nuevas cartas sobre $\overline{\mathcal{U}}$ a partir de cartas en $g.\mathcal{U}$, y la estructura de variedad cociente ha quedado establecida.

Nota 3.50 *Si M es $IIAN$ entonces M/G tambien lo es por ser $\pi : M \to \overline{M}$ submersión. Sin embargo no se puede garantizar que M/G sea Hausdorf, a no ser que se imponga la condición*

vi) Para todo par de puntos $p, q \in M$ en orbitas distintas, existen entornos $\mathcal{U}$, y $\mathcal{V}$ de p e q tales que $(g\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} = \varnothing$ para todo $g \in G$.

■

3.8.4. Espacios recubridores.

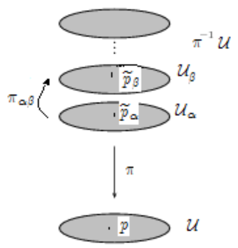
Sea $\widetilde{M}$ un espacio topológico conexo M una variedad diferenciable, y $\pi : \widetilde{M} \to M$ aplicación continua

Se dice que $\widetilde{M}$ es una cubierta (o recubridor) de la variedad M con proyección π, si para cada punto $p \in M$, existe un entorno conexo $\mathcal{U}$ de p tal que

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \cup \mathcal{U}_\alpha \tag{12}$$

es unión de componentes conexas abiertas $\mathcal{U}_\alpha$, y cada restricción $\pi : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}$ es un homeomorfismo. Se dice entonces que $\mathcal{U}$ es un entorno admisible. Se denomina a π aplicación recubridora.

Observese que $\pi_{\alpha\beta} = \left(\pi|_{\mathcal{U}_\beta}\right)^{-1} \circ \pi : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\beta$ define un homeomorfismo canónico entre cada par de componentes de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$



que es el único que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_\alpha \arrow[dl, "\pi_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
\mathcal{U}_\beta \arrow[rr, "\pi"'] & & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

Nótese que si el grupo G actua de forma discontinua en la variedad M, entonces $\pi : M \to \overline{M} = M/G$ es una aplicación recubridora del cociente (ver proposición 3.49.)

Nota 3.51 *Se demuestra que para una variedad diferenciable conexa M, existe un recubridor $\pi : \widetilde{M} \to M$ de forma que $\widetilde{M}$ es simplemente conexo. Se denomina recubridor universal, y viene unívocamente determinado salvo homeomorfismos*

De hecho el recubridor universal $\widetilde{M}$ tiene estructura canónica de variedad diferenciable. Más general:

Proposición 3.52 *Si $\pi : \widetilde{M} \to M$ es aplicación recubridora, existe una única estructura de variedad diferenciable para $\widetilde{M}$ que hace a $\pi : \widetilde{M} \to M$ difeomorfismo local.*

Demostración. La situación es análoga a la de la proposición 3.49 aunque *sutilmente* diferente. La idea es que podemos hacer a cada componente conexa $\mathcal{U}_\alpha$ en (12) dominio de una carta φ_α a partir de una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M tomando $\varphi_\alpha = \varphi \circ \pi : \mathcal{U}_\alpha \to \varphi(\mathcal{U})$ que es homeomorfismo con inversa $\varphi_\alpha^{-1} = \left(\pi|_{\mathcal{U}_\alpha}\right)^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Todas las cartas en $\mathcal{U}_\alpha$ así obtenidas son compatibles, pues para cualquier otra $(\mathcal{U}, \psi)$ es $\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$ ■

Una transformación de recubrimiento es un homeomorfismo $\gamma : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ tal que $\pi \circ \gamma = \pi$ es decir, para cada $p \in M$, la restricción de γ produce biyecciones $\gamma : \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p)$. Además γ aplica cada componente conexa $\mathcal{U}_\alpha$ de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ en (12) en otra $\mathcal{U}_\beta = \gamma(\mathcal{U}_\alpha)$ (ya que $\gamma(\mathcal{U}_\alpha) \subset \pi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto conexo $\pi(\gamma(\mathcal{U}_\alpha)) = \mathcal{U}$) y necesariamente es

$$\gamma = \pi_{\alpha\beta} = \left(\pi|_{\mathcal{U}_\beta}\right)^{-1} \circ \pi : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\beta \tag{13}$$

que es ahora difeomorfismo. Tenemos en estas condiciones

Proposición 3.53 *El conjunto $\Gamma = \{\gamma\}$ de todas las transformaciones recubridoras, constituye un grupo de difeomorfismos de $\widetilde{M}$, que actúa en $\widetilde{M}$ de forma discontinua.*

Demostración. Si $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ sea $\pi(\widetilde{p}) = p \in M$ y $\mathcal{U}$ un entorno admisible de p como en (12), pongamos $\widetilde{p} = \widetilde{p}_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$. Si $\gamma(\mathcal{U}_\alpha) \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \varnothing$ para cierto $\gamma \in \Gamma$ entonces por (13) $\gamma|_{\mathcal{U}_\alpha} = \pi_{\alpha\alpha} = id : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$. Con esta idea hay ahora un sencillo argumento para probar que el conjunto (cerrado) en donde γ es la identidad es tambien abierto y por tanto es todo $\widetilde{M}$. Además ha quedado implícitamente probado que ■

Lema 3.54 *Si dos transformaciones recubridoras coinciden en un punto entonces son iguales. cada $p \in M$.*

La proposición anterior, prueba una parte del siguiente

Teorema 3.55 *Si $\pi : \widetilde{M} \to M$ es un recubridor de la variedad M, entonces el grupo Γ de las aplicaciones recubridoras induce una acción discontinua $\Gamma \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ y la proyección natural $\pi_1 : \widetilde{M}/\Gamma \to M$ es aplicación recubridora. En particular si para algún punto $p \in M$ la acción $\Gamma \times \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p)$ es transitiva, entonces π_1 es un difeomorfismo.*

Demostración. Se define sin ambiguedad $\pi_1(\Gamma\widetilde{p}) = \pi(\widetilde{p})$, que hace conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{M} \arrow[dl, "\Gamma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
\widetilde{M}/\Gamma \arrow[rr, "\pi_1"'] & & M
\end{tikzcd}$$

así si $\mathbf{\Gamma} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}/\Gamma$ es la canónica y como $\pi = \pi_1 \circ \mathbf{\Gamma} : \widetilde{M} \to M$ es submersión se concluye que π_1 es diferenciable. Además si $\mathcal{U}$ es un entorno π-admisible de M, entonces también es π_1-admisible, ya que si $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \cup\mathcal{U}_\alpha$, es la descomposición en CC, entonces $\pi_1^{-1}(\mathcal{U}) = \cup\mathbf{\Gamma}(\mathcal{U}_\alpha)$ $\pi_1 : \pi_2(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}$ es un difeomorfismo pues $\pi : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}$ lo es. En el caso de que la acción de Γ sea transitiva en $\pi^{-1}(p)$, se concluye que $\pi_1^{-1}(p)$ tiene un único punto , y se concluye la demostración con el siguiente $\blacksquare$

Lema 3.56 *Si $\pi : \widetilde{M} \to M$ es un recubridor de la variedad M y $\pi^{-1}(p)$ es finito para algún p, entonces $\pi^{-1}(x)$ es finito para todo x, y $\#\pi^{-1}(p) = \#\pi^{-1}(x)$. En particular si $\pi^{-1}(p)$ tiene un único punto, entonces π es un difeomorfismo.*

Demostración. Nótese que la aplicación $\#\pi^{-1} : M \to \mathbb{N}$ es constante sobre cada entorno admisible, y es por tanto localmente constante. $\blacksquare$

Nota 3.57 *Si $\pi : \widetilde{M} \to M$ es el recubridor universal de M, se prueba que Γ actúa transitivamente sobre cada fibra $\pi^{-1}(p)$, y por tanto M es difeomorfa a la variedad cociente $\widetilde{M}/\Gamma$. Así cualquier variedad diferenciable se obtiene como cociente de una simplemente conexa por un grupo discontinuo de transformaciones.*

4. CAMPOS DE VECTORES

Un campo de vectores en una variedad diferenciable, es una *aplicación* que asigna de forma diferenciable a cada punto, un vector apoyado en él, y puede interpretarse como un operador de derivación de funciones diferenciables con valores reales que generaliza la idea clásica de derivada direccional. Es la denominada derivada de Lie de una función respecto a un campo. Las curvas cuya velocidad define en cada punto el vector del campo son sus curvas integrales. La teoría de existencia y unicidad de curvas integrales maximales, y de flujos, se corresponde en su versión local con la teoría de integración y dependencia diferenciable de las soluciones con las condiciones iniciales. Mirado así, un campo se denomina también Sistema Dinámico.

4.1. CAMPOS EN VARIEDADES EUCLIDEAS

La lectura de este epígrafe, no es en principio necesaria. Solo sirve para justificar los conceptos y definiciones que introduciremos más adelante relativos a campos en variedades abstractas.

4.1.1. Campos de vectores sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Un campo de vectores en un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$, viene definido por una aplicación diferenciable $\vec{X} : S \to \mathbb{R}^n$, y hace corresponder a cada punto $p \in S$, el vector $X(p) = \vec{X}(p)_p \in T_p\,\mathbb{R}^n$. De esta forma tomando $(x^1, ..., x^n)$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$ podemos escribir para todo $p \in S$:

$$X(p) = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

siendo X^i las componentes de $\vec{X}$. En particular $\delta_i = (\partial/\partial x^i)$ se interpreta como el campo que hace corresponder a cada p el vector $(\partial/\partial x^i)_p$

4.1.2. El módulo de los campos de vectores $\mathfrak{X}_S$.

El conjunto $\mathfrak{X}_S$ de los campos de vectores definidos sobre un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$, tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además es un $\mathfrak{F}(S)$-modulo, donde $\mathfrak{F}(S)$ es el anillo de las funciones diferenciables $f : S \to \mathbb{R}$. Tomando coordenadas $(x^1, ..., x^n)$) en $\mathbb{R}^n$, para cada campo $X \in \mathfrak{X}_S$, hay funciones $X^i \in \mathfrak{F}(S)$

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

así los campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ constituyen una base del módulo $\mathfrak{X}_S$.

4.1.3. Campos de vectores tangentes.

Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}_S$ sobre un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$, se dice tangente a S, si para todo $p \in S$ se verifica $V(p) \in T_pS$. Se denota por $\mathfrak{X}(S)$ al conjunto de los campos tangentes a S. Observese que:

a) Si $S = \mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{X}(\mathbb{U}) = \mathfrak{X}_{\mathbb{U}}$. En particular, $\mathfrak{X}_{\mathbb{U}}$ es un $\mathfrak{F}(\mathbb{U})$ módulo.

b) Si $S = M$ es una variedad de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{X}(M)$ está estrictamente contenido en $\mathfrak{X}_S$, y constituye un $\mathfrak{F}(M)-$ submódulo.

c) Nótese que si $\mathcal{U}$ es abierto de la superficie M, y $V \in \mathfrak{X}(M\ )$, entonces V se puede restringir a $\mathcal{U}$ y da lugar a $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ que denotamos por el mismo nombre.

4.1.4. Expresión local intrínseca de un campo tangente.

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta de la variedad euclidea M, entonces la asignación $\partial/\partial u^i$ que hace corresponder a cada $p \in \mathcal{U}$, el vector $(\partial/\partial u^i)_p$ define un campo tangente en $\mathcal{U}$, que denominamos campo coordenado. De hecho los campos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \cdots \frac{\partial}{\partial u^m}\right)$$

constituyen una base del $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ -módulo $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$, es decir: si $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}\ )$, existen $V^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ de forma que

$$V = \sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{14}$$

se denomina expresión analítica intrínseca de V, y las V^i son las componentes intrínsecas de V respecto a la carta φ.

4.1.5. Expresión analítica local de un campo.

Sea $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}_M$ un campo sobre la variedad euclídea M, y sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de M, y $\mathbf{P} = \varphi^{-1} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ la parametrización correspondiente. Las funciones X^i, pueden considerarse por restricción funciones diferenciables $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$. En la práctica, convendremos en establecer el abuso de notación dado por $X^i(u) = X^i(\mathbf{P}(u))$ para todo $u \in \mathbb{U}$, y así

$$X(\mathbf{P}(u)) = \sum_{i=1}^{n} X^i(u) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathbf{P}(u)}$$

Pero si ahora $X = V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}\ )$ es un campo tangente a M (como en 14) escribimos:

$$V(\mathbf{P}(u)) = \sum_{i=1}^{m} V^i(u) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\mathbf{P}(u)}$$

Las componentes V^i se llaman intrínsecas de V. Las componentes X^i se denominan *extrínsecas.*Existe la siguiente relación entre las componentes V^i, y las extrísecas X^j:

$$X^j = \sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial x^j}{\partial u^i}$$

4.2. CAMPOS TANGENTES EN VARIEDADES ABSTRACTAS

Se da aquí la definición de campo de vectores válida para una variedad abstracta, y que para variedades euclideas coincide con la ya dada. Se introduce el operador corchete de Lie de dos campos

4.2.1. Definición

Sea M una variedad abstracta de dimensión m . Un campo (tangente) en M, es un operador V que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $V(p) \in T_pM$, verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:

Para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$, la aplicación $V(f) : M \ni p \to V(p)(f) \in \mathbb{R}$, es diferenciable. Se tiene así una aplicación $V : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$que verifica las siguientes propiedades, para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1) $V(\lambda f + \mu g) = \ \lambda V(f) + \ \mu V(g)$ ($\mathbb{R}$-linealidad)

2) $V(fg) = (V(f))g + f(V(g))$ (Regla de Leibnitz)

Por otra parte, se ve que un operador $V : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ verificando las propiedades 1) y 2) anteriores define un campo de vectores, que denotamos también por V por medio de la condición:

$$V(p)(f) = V(f)(p) \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}(M) \text{ y todo } p \in M$$

A la vista de la identificación (7a), cuando M es variedad euclidea la definición de campo dada en 4.1.3 coincide con esta definición.

4.2.2. El $\mathfrak{F}(M)$-módulo de los campos tangentes

La familia $\mathfrak{X}(M)$ de campos (tangentes) en M, tiene estructura natural de $\mathfrak{F}(M)$-módulo, y para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ se tienen las identidades

a) $(V + W)(f) = V(f) + W(f)$

b) $(fV)(g) = fV(g)$.

4.2.3. Expresión analítica

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta de M, entonces la asignación $\partial/\partial u^i$ que hace corresponder a cada $p \in \mathcal{U}$, el vector $(\partial/\partial u^i)_p$ define un campo tangente en $\mathcal{U}$, que denominamos campo coordenado. Usando (9), se demuestra fácilmente para cada $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ la identidad:

$$V = \sum_{i=1}^{m} V(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

Naturalmente, un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ se restringe de forma natural a un campo $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ para cada abierto $\mathcal{U}$ de M . Así las componentes intrínsecas V^i que aparecen en (14) son $V^i = V(u^i)$.

4.2.4. Corchete de Lie de dos campos tangentes

Si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces el operador $[V, W]$ definido por:

$$[V, W] : \mathfrak{F}(M) \ni f \to [V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)) \in \mathfrak{F}(M)$$

verifica las propiedades de la definición 4.2.1, y define por tanto un campo tangente en M, que se denomina corchete de Lie de V y W.

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta de M, y V^j, W^i son las componentes de V W respectivamente, se tiene:

$$[V, W] = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(V^j \frac{\partial W^i}{\partial u^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

4.2.5. El álgebra de Lie de los campos tangentes

La aplicación *corchete de Lie* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (V, W) \to [V, W] \in \mathfrak{X}(M)$ verifica las siguientes propiedades $\forall U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$

1) Es $\mathbb{R}$-bilineal, y $[U, V] = -[V, U]$

2) $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0 \ \forall U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$

3) $[fV, W] = f[V, W] - W(f)V$

4) $[V, fW] = V(f)W + f[V, W]$

Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{X}$, dotado de un operador *corchete* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ni (V, W) \to [V, W] \in \mathfrak{X}$ que verifique las propiedades 1) y 2), se denomina *Álgebra de Lie.*

La propiedad 2) es conocida con el nombre de *identidad de Jacobi*.

4.2.6. Derivada de Lie

Un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ induce un operador L_V denominado derivada de Lie que actua de la siguiente forma:

a) Sobre los campos: $L_V : \mathfrak{X}(M) \ni W \to [V, W] \in \mathfrak{X}(M)$.

b) Sobre las funciones: $L_V : \mathfrak{F}(M) \ni f \to V(f) \in \mathfrak{F}(M)$

y se verifican para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$ y todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ las propiedades:

1) L_V es $\mathbb{R}$-lineal y $L_V(fW) = L_V(f)W + fL_V(W)$.

2) $[L_V, L_W] = L_{[V,W]}$ (donde $[L_V, L_W] = L_V \circ L_W - L_W \circ L_V$)

4.2.7. Campos relacionados

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades, y sean $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$. Se dice que V y $\bar{V}$ están ϕ-relacionados (y escribimos $\phi_* V = \bar{V}$) si se verifica:

$$d\phi(p)(V(p)) = \bar{V}(\phi(p)) \ \forall p \in M$$

Fijados $\phi : M \to \bar{M}$ diferenciable $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ son equivalentes las afirmaciones:

(a) $\phi_* V = \bar{V}$

(b) $\forall \bar{f} \in \mathfrak{F}(\bar{M}) \Longrightarrow V(\bar{f} \circ \phi) = \bar{V}(\bar{f}) \circ \phi$, es decir, la conmutatividad del primer diagrama implica la del segundo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "V(f)"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\bar{V}(\bar{f})"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Demostración.
(a)$\Longrightarrow$(b) Sea $f = \bar{f} \circ \phi$

$$\begin{aligned} \bar{V}(\bar{f})(\phi(p)) &= d\bar{f}(\phi(p))(\bar{V}(\phi(p)) =^{(a)} d\bar{f}(\phi(p)) \circ d\phi(p)(V(p)) = \\ &= d(\bar{f} \circ \phi)(p)(V(p)) = df(p)(V(p)) = (V(f))\,(p)\ \forall p \in M \end{aligned}$$

(b)$\Longrightarrow$(a) Todas las igualdades anteriores escepto la indicada por $=^{(a)}$están justificadas independientemente de la hipótesis (a). Nótese ahora que la hipótesis (b) une la *cabeza* y *la cola* de la *serpiente* anterior por un $=^{(b)}$.

Ejemplo 4.1 *Si M es variedad euclidea de $\mathbb{R}^n$, la aplicación inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, y la condición necesaria y suficiente para que una campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ esté i-relacionado con $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es que*

$$\bar{V}(p) = V(p)\ \forall p \in M$$

Nota 4.2 *Si $\phi : M \to \bar{M}$ es una aplicación diferenciable entre variedades, y $V \in \mathfrak{X}(M)$, no siempre existe $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ tal que $\phi_* V = \bar{V}$, y si existe, no tiene porqué ser único. Sin embargo, cuando ϕ es difeomorfismo, entonces fijado $V \in \mathfrak{X}(M)$ existe un único $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, tal que $\phi_* V = \bar{V}$, y la aplicación*

$$\phi_* : \mathfrak{X}(M) \ni V \to \phi_* V = \bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$$

resulta ser un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal. Denotaremos $\phi^* = (\phi_*)^{-1}$.
Por otra parte, si ϕ, y ψ son difeomorfismos y existe la composición $\psi \circ \phi$, entonces se verifica:

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*,\ (\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

4.2.8. Corchete de Lie de campos relacionados

Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\bar{V}, \bar{W} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ campos ϕ-relacionados, siendo $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable. Entonces $[V, W]$, está ϕ-relacionado con $[\bar{V}, \bar{W}]$.

Demostración. Basta probar que si $\bar{f} \in \mathfrak{F}(\bar{M})$, entonces $[V, W](\bar{f} \circ \phi) = [\bar{V}, \bar{W}](\bar{f}) \circ \phi$, y esto se sigue de

$$V(W(\bar{f} \circ \phi))) = V(\bar{W}(\bar{f}) \circ \phi) = \bar{V}(\bar{W}(\bar{f})) \circ \phi$$

es decir:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "W(f)"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\bar{W}(\bar{f})"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd} \quad \Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "V(W(f))"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\bar{V}(\bar{W}(\bar{f}))"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

intercambiando los papeles de V y W se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "W(V(f))"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\bar{W}(\bar{V}(\bar{f}))"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

y restando los dos últimos diagramas se obtiene la igualdad pedida.
■

4.2.9. Campos de Vectores en el Producto .

Continuando con las notaciones dadas en la sección 3.7, un campo V_a en M_a $(a = 1, 2)$ se identifica con un campo en M que denotamos por el mismo nombre V_a mediante la sencilla fórmula $V_a(x) = V_a(x_a)$ para todo $x \in M$. Así $\mathfrak{X}(M_a)$. es subespacio vectorial del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de los campos de vectores de M. En particular, si tenemos cartas $(\mathcal{U}_a,\alpha_a = (u_a^1, \dots, u_a^{m_a}))$ en cada M_a , entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_1^{m_1}}, \frac{\partial}{\partial u_2^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_2^{m_2}}\right)$$

forman una base local de campos, y V_a se podrá escribir localmente en la forma:

$$V_a = \sum_{i=1}^{m_a} V_a^i(u_a^1, \dots, u_a^{m_a}) \frac{\partial}{\partial u_a^i}$$

en particular se concluye que $[V_1, V_2] = 0$, y $[V_a, W_a] \in \mathfrak{X}(M_a)$ para .V_a, W $_a \in \mathfrak{X}(M_a)$., y $\mathfrak{X}(M_a)$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$. Denotando por $V = (V_1, V_2) = V_1 \oplus V_2$, $W = (W_1, W_2) = W_1 \oplus W_2$ los campos en $\mathfrak{X}(M)$ correspondientes se tiene: $[V, W] = ([V_1, W_1], [V_2, W_2]) = [V_1, W_1] \oplus [V_2, W_2]$

4.3. SISTEMAS DINÁMICOS

El objetivo es formalizar la reconversión de la teoría de integración de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, al ámbito de las variedades abstractas:

Dado un campo, las curvas cuya velocidad define en cada punto el vector del campo son sus curvas integrales. La teoría de existencia y unicidad de curvas integrales maximales, y de flujos, se corresponde en su versión local con la teoría de integración y dependencia diferenciable de las soluciones con las condiciones iniciales. Mirado así, un campo se denomina también Sistema Dinámico.

4.3.1. Curva integral de un campo tangente.

Una curva integral de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$, es una curva $\alpha : I \to M$ diferenciable que verifica la condición:

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \text{ para todo } t \in I$$

si $0 \in I$, y $\alpha(0) = p$, se dice que α es una curva integral de V por el punto $p \in M$.

Nota 4.3
- *Supuesto que $\alpha : I \to M$ es una curva integral de $V \in \mathfrak{X}(M)$, y si $\mathbf{t} : J \ni s \to \mathbf{t}(s) \in I$ es un cambio de parámetro, la curva $\bar{\alpha} : J \ni s \to \alpha(\mathbf{t}(s)) \in M$, no es en general curva integral de V a no ser que $d\mathbf{t}/ds \equiv 1$, (y esto sucede solo cuando $\mathbf{t}(s) = s_0 + s$). En efecto, se tiene*

$$\left.\frac{d\bar{\alpha}}{ds}\right|_s = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{\mathbf{t}(s)} \left.\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|_s = \alpha'(\mathbf{t}(s)),1 = V(\alpha(\mathbf{t}(s)) = V(\bar{\alpha}(s))$$

- *El conjunto de las curvas integrales de campos de vectores se denomina* Sistema dinámico

4.3.2. Curvas integrales de campos relacionados

Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ campos ϕ-relacionados, siendo $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable. Si α es curva integral de V por $p \in M$, entonces $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$ es curva integral de $\bar{V}$ por $\bar{p} = \phi(p)$.

Demostración. $\bar{\alpha}'(t) = (\phi \circ \alpha)'(t) = d\phi(\alpha'(t)) = d\phi(V(\alpha(t))) = \bar{V}(\phi \circ \alpha(t)) = \bar{V}(\bar{\alpha}(t))$ ■

Nota 4.4 *En particular si*

$$V = \sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

es la expresión analítica de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ respecto a una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots, u^m))$, con $\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{U}$,entonces, el campo $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ con identica expresión analítica.está φ-relacionado con V.

4.3.3. Teoremas de existencia en $\mathbb{R}^m$

La observación anterior, prueba que el problema de existencia y unicidad (local) de curvas integrales por un punto de un campo definido en una variedad diferenciable, puede plantearse directamente en un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ un campo de vectores definido sobre un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$.

Tomando en $\mathbb{R}^m$ coordenadas $(u^1, ..., u^m)$, si $\alpha(t) = (u^1(t), ..., u^m(t))$, y $\vec{X} = (X^1, ..., X^m)$ la condición necesaria y suficiente para que α sea curva integral de X es que las funciones $u^i(t)$ verifiquen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\frac{du^i}{dt} = X^i(u^1(t), ..., u^m(t)\right\}_{i=1,\ldots,m}$$

la teoría general de ecuaciones diferenciales asegura que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y cada $u_0 = (u_0^1, ..., u_0^m) \in \mathbb{U}$:

1. existe una curva integral de X, $\alpha : I \to \mathbb{U}$ con $t_0 \in I$, y $\alpha(t_0) = u^0$. Por otra parte si $\beta : J \to \mathbb{U}$ verifica la misma condición, entonces $\alpha = \beta$ en $I \cap J$

2. existe I intervalo con $t_0 \in I$, $\mathbb{V}$, abierto, con $u^0 \in \mathbb{V}$ y una función diferenciable
$$\psi : I \times I \times \mathbb{V} \ni (t, \bar{t}, u) \to \psi(t, \bar{t}, u) \in \mathbb{U}$$
de forma que $\forall u \in \mathbb{U}$ la curva $I \ni t \to \psi(t, \bar{t}, u) \in \mathbb{U}$ es curva integral de X con $\psi(\bar{t}, \bar{t}, u) = u$.

4.3.4. Existencia y unicidad de curvas integrales.

Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$. Existe entonces una curva integral $\alpha : I \to M$, por p. Por otra parte, si $\beta : J \to M$, es otra curva integral de V por p, entonces $\alpha(t) = \beta(t)\ \forall t \in I \cap J$.

Demostración. Tomando $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de M con $p \in \mathcal{U}$ y usando la observación 4.4 y el anterior epígrafe se deduce la existencia. La segunda parte se demuestra probando que el conjunto

$$K = \{t \in I \cap J : \alpha(t) = \beta(t)\}$$

es abierto y cerrado. La condición de ser abierto es también consecuencia de la observación 4.4 y el anterior epígrafe. La condición de ser cerrado usa la propiedad T_2 de M, ya que:

El conjunto de puntos en donde coinciden dos aplicaciones continuas sobre un espacio de Haussdorf, es cerrado.

Nota 4.5 *De la misma forma se prueba que si $\alpha : I \to M$, $\beta : J \to M$ son curvas integrales de V y $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algún $t_0 \in I \cap J$, entonces $\alpha(t) = \beta(t)$ $\forall t \in I \cap J$.*

La curva integral $\alpha : I \to M$ de V por p se dice *no* maximal, si existe $\beta : J \to M$ curva integral de V por p tal que $I \subsetneq J$. Es fácil ya obtener el siguiente resultado:

Teorema 4.6 *Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$. Existe entonces una única curva integral maximal $\alpha_p : I_p \to M$, de V por p.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}(p) = \{I$ intervalo de $\mathbb{R}$: Existe $\alpha_I : I \to M$ curva integral de V por $p\}$, y sea I la unión de los intervalos de la familia. Se define entonces la curva $\alpha_p : I_p \to M$ por la condición

$$\forall t \in I_p \text{ es } \alpha_p(t) = \alpha_I(t) \text{ si } t \in I \in \mathcal{I}(p)$$

la definición carece de ambigüedad y define la curva integral maximal de V por p. ■

4.3.5. Flujos locales

Proposición 4.7 *Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$. existe entonces un entorno abierto $\mathcal{U}$ de p, un intervalo abierto , con $0 \in J$, y una función diferenciable $\Phi : J \times \mathcal{U} \to M$ de forma que para cada $x \in \mathcal{U}$, la curva*

$$\alpha_x : J \ni t \to \Phi(t, x) \in M \tag{15}$$

es una curva integral de V por x. Se llama a $\Phi : J \times \mathcal{U} \to M$ flujo local de V por p.

Demostración. El resultado, cuando se toma $M = \mathbb{U}$ abierto de $\mathbb{R}^m$ es una caso particular de 4.3.3, para $t_0 = 0$ tomando $\Phi : I \times \mathbb{V} \ni (t, u) \to \psi(t, 0, u) \in \mathbb{U}$.

En el caso general basta tomar $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de M con $p \in \mathcal{U}$ y aplicar el siguiente Lema ■

Lema 4.8 *Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ campos ϕ-relacionados, siendo $\phi : M \to \bar{M}$ un difeomorfismo. Entonces, si $\Phi : J\times \mathcal{U} \to M$ es un flujo local de V por $p \in M$, entonces*

$$\bar{\Phi} : J \times \phi(\mathcal{U}) \ni (t, \bar{x}) \to \phi\left(\Phi(t, \phi^{-1}(\bar{x}))\right) \in \bar{M}$$

es un flujo local de $\bar{V}$ por $\bar{p} = \phi(p)$

Teniendo en cuenta que $\Phi(0, p) = p$, por razones de continuidad, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, $\mathcal{U}_0$ entorno de p, de forma que $\Phi(I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}$, y denotando $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ se tiene:$\{\Phi_t\}_{t\in I_\varepsilon}$

Corolario 4.9 *Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$. existe $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}, \varepsilon, \Phi)$ donde*

$\mathcal{U}_0$, y $\mathcal{U}$ son abiertos $p \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, y $\varepsilon > 0$

$\Phi : I_\varepsilon \times \mathcal{U} \to M$ es un flujo local de V por p. y $\Phi(I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}$

Se denomina a $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}, \varepsilon, \Phi)$ caja de flujo de V por p, y a $\{\Phi_t\}_{t\in I_\varepsilon}$ grupo uniparamétrico local de V en torno a p.

Nota 4.10 *En las condiciones anteriores, denotando $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ se obtiene una familia $\{\Phi_t\}_{t\in I_\varepsilon}$ que se denomina* grupo uniparamétrico local *de V en torno a p. Nótese que para $s, t \in I_\varepsilon$, tales que $s + t \in I_\varepsilon$, y $x \in \mathcal{U}_0$, por la observación 4.3, es $t \to \alpha_x(t + s) = \Phi_{t+s}(x)$ curva integral de V , por $\Phi_s(x)$ igual que $t \to \beta(t) = \Phi_t \circ \Phi_s(x)$, por tanto*

$$\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x) \ \forall x \in \mathcal{U}_0$$

Llamando $\Phi_t(\mathcal{U}_0) = \mathcal{U}_t$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_0 \arrow[rr, "\Phi_t"] \arrow[dr, "\Phi_{s+t}"'] & & \mathcal{U}_t \arrow[dl, "\Phi_s"] \\ & \mathcal{U}_{t+s} & \end{tikzcd}$$

si $s = -t$ se concluye que $\Phi_t \circ \Phi_{-t}(x) = x \ \forall x \in \mathcal{U}_0$, y por tanto $\Phi_t : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_t$ es un difeomorfismo para cada $t \in I_\varepsilon$

4.3.6. Campos completos.

Un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ se dice completo si para cada $p \in M$, la curva integral maximal de V por p está definida en todo $\mathbb{R}$ es decir: $\alpha_p : I_p = \mathbb{R} \to M$.

Proposición 4.11 *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y M es una variedad compacta, entonces V es necesariamente completo.*

Demostración. Sea $\alpha : I = (a, b) \to M$ curva integral de V. Probaremos por ejemplo que si $b < +\infty$, entonces existe una curva integral de V, $\bar{\alpha} : (a, \bar{b}) \to M$ con $b < \bar{b}$ y $\bar{\alpha} \mid (a, b) = \alpha$.

En efecto, por ser M compacta, es posible encontrar una sucesión $(t_n) \subset I$ con $\lim t_n = b$, y $p_n = \alpha(t_n) \to p \in M$. Si $\Phi : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ es una caja de flujo con $p \in \mathcal{U}_0$, tomemos N de forma que

$$b - t_N < \varepsilon, \ \alpha(t_N) = \ p_N \in \mathcal{U}_0$$

la curva $\sigma : I_\varepsilon(t_N) \ni t \to \sigma(t) = \alpha_{p_N}(t - t_N) = \Phi(t - t_N, p_N) \in M$ es curva integral de V que para valor $t = t_N$ del parámetro verifica $\sigma(t_N) = \alpha_{p_N}(0) = p_N = \alpha(t_N)$, así α y σ coinciden en la intersección de sus dominios, y la curva

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t) \text{ si } t \in (a, t_N) \\ \sigma(t) \text{ si } t \in I_\varepsilon(t_N) \end{cases}$$

es curva integral de V definida en $(a, t_N + \varepsilon) \supsetneq (a, b)$ que extiende a α ■

Teorema 4.12 *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo completo, entonces la aplicación:*

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \ni (t, x) \to \alpha_x(t) \in M$$

es diferenciable

Nota 4.13 *Tenemos así para un campo completo V una enorme caja de flujo $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}, \varepsilon, \Phi) = (M, M, \infty, \Phi)$. que se denomina* flujo global *de V. Este flujo global, da lugar a un grupo uniparamétrico global $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

La demostración del teorema depende del siguiente

Lema 4.14 *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $\alpha : I \to M$ es una curva integral por p, entonces para cada $\bar{t} \in I$, existe $\Phi : J \times \mathcal{U} \to M$ flujo local de V con $p \in \mathcal{U}$, y $\bar{t} \in J$*

Demostración. Sea $K = \{\bar{t} \in I : \exists\Phi : J \times \mathcal{U} \to M$ flujo local de V con $p \in \mathcal{U}$, y $\bar{t} \in J\}$, y demostremos que $K = I$. En efecto, K es evidentemente abierto, y no vacío. es más, si $\bar{t} \in K$ ($\bar{t} > 0$), entonces $[0, \bar{t}] \subset K$. Probemos que K es también cerrado (en I). Si $b \in I$, está en la adherencia de K, supongamos por ejemplo $b > 0$, y demostremos que $b \in I$:

Sea $(t_n) \subset K$ una sucesión creciente $\lim t_n = b$. Si $c(b) = \overline{p}$, entonces por continuidad $c(t_n) = p_n \to \overline{p}$. Tomemos un flujo local $(\overline{\mathcal{U}}, I_\varepsilon, \overline{\Phi})$ por $\overline{p}$, y sea $N > 0$ tal que $b - t_N < \varepsilon$, y $p_N \in \overline{\mathcal{U}}$. Como $t_N \in K$, podemos encontrar un flujo local $\Phi : J \times \mathcal{U} \to M$ con $p \in \mathcal{U}$ y $t_N \in J = (a, a')$. como $\alpha : I \to M$, y $\alpha_p : J \ni t \to \Phi(p, t) \in M$, son curvas integrales de X por p , coinciden en $I \cap J$. En particular es $\Phi(p, t_N) = \alpha_p(t_N) = p_N \in \overline{\mathcal{U}}$. Por continuidad, existe entorno $\widetilde{\mathcal{U}}$ de $\bar{p}$, de forma que $\Phi_{t_N}(\widetilde{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}$. Para cada $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$, sea $\sigma_x : I_\varepsilon(t_N) \ni t \to \overline{\alpha}_{\Phi(x,t_N)}(t - t_N) = \overline{\Phi}(t - t_N, \Phi(x, t_N)) \in M$. Como $\sigma_x(t_N) = \Phi(x, t_N) = \alpha_x(t_N)$ se concluye que $\sigma_x(t) = \alpha_x(t)$ $\forall t \in I_\varepsilon(t_N) \cap J$ y esto permite definir sin ambigüedad para $(t, x) \in (a, t_N + \varepsilon)$

$$\tilde{\Phi}(t, x) = \begin{cases} \Phi(t, x) = \alpha_x(t) \text{ si } t \in (a, t_N) \\ \overline{\Phi}(t - t_N, \Phi(x, t_N)) = \sigma_x(t) \text{ si } t \in I_\varepsilon(t_N) \end{cases}$$

así $\tilde{\Phi} : \tilde{J} \times \widetilde{\mathcal{U}} \to M$ es flujo local con $p \in \widetilde{\mathcal{U}}$, y $b \in \tilde{J} = (a, t_N + \varepsilon)$. Así $t_N + \varepsilon \in K$, y por como $b <.t_N + \varepsilon$, resulta que $b \in K$. ■

Demostración. (del Teorema)

Nótese que fijado $(\bar{t}, \bar{p}) \in \mathbb{R} \times M$, si $\Psi : J \times \mathcal{U} \to M$ es el flujo local de V por $\bar{p}$, con $\bar{t} \in J$, entonces usando el teorema 4.6 se concluye que $\Phi \mid J \times \mathcal{U} = \Psi$. ■

4.3.7. Interpretación dinámica de la derivada de Lie

Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y sea $\Phi : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ caja de flujo local para V. Si denotamos para $f \in \mathfrak{F}(M)$ $\Phi_t^*(f) = f \circ \Phi_t$ entonces en $\mathcal{U}_0$ se verifica la fórmula

$$L_V(f) = V(f) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(f) - f}{t}$$

Probaremos que también se tiene la fórmula:

$$L_V(W) = [V,W] = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(W) - W}{t} \tag{16}$$

donde hemos denotado para cada $t \in I_\varepsilon$, por Φ_t al difeomeorfismo $\Phi_t : \mathcal{U}_0 \ni x \to \Phi(t,x) \in \mathcal{U}_t$,.y se entiende que $\Phi_t^*(W)$ significa exactamente $\Phi_t^*(W) := \Phi_t^*(W \mid \mathcal{U}_t) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_0)$.

Nota 4.15 *Llamando $W_t := \Phi_t^*(W \mid \mathcal{U}_t) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_0)$, entonces para cada $p \in \mathcal{U}_0$, resulta que $I_\varepsilon \ni t \to W_t(p) = d\Phi_{-t}(W(\Phi_t(p))) \in T_pM$, es una curva en el espacio vectorial T_pM, con $W_0(p)$=$W(p)$, y así la fórmula (16) significa que:*

$$[V,W](p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W_t(p), \forall p \in \mathcal{U}_0$$

Demostración. Fijado $p \in \mathcal{U}_0$, y denotando $p_t = \Phi_t(p)$ se tiene para $f \in \mathfrak{F}(M)$:

$$\left[\frac{d\Phi_{-t}(W(p_t)) - W(p)}{t}\right](f) = \frac{d(f\circ\Phi_{-t})(W(p_t)) - W(f)(p))}{t} = A(t) + B(t)$$

en donde henos denotado:

$$\begin{aligned} A(t) &= W(p_t)\left(\frac{f\circ\Phi_{-t} - f}{t}\right) \\ B(t) &= \frac{W(f)(p_t) - W(f)(p)}{t} \end{aligned}$$

Claramente es $\lim_{t\to 0} B(t)$=$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W(f)(p_t) = \{V(W(f)\}(p)$. Probaremos que $\lim_{t\to 0} A(t) = -\{W(V(f)\}(p)$. En efecto, la función $\Psi : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \ni (t,x) \to \Psi(t,x) = \Psi_t(x) = f\circ\Phi_t(x) - f(x) \in \mathbb{R}$ es diferenciable, con $\Psi(0,x) = 0$ y para cada $t = \tau$ fijo se tiene

$$\frac{\partial\Psi(s\tau,x)}{\partial s} = \tau\frac{\partial\Psi}{\partial t}(s\tau,x)$$

por lo que

$$\Psi(\tau,x) = \int_0^1 \frac{\partial\Psi(s\tau,x)}{\partial s}ds = \tau\int_0^1 \frac{\partial\Psi}{\partial t}(s\tau,x)ds$$

tomando ahora,

$$g : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \ni (t,x) \to g_t(x) = \int_0^1 \frac{\partial\Psi}{\partial t}(st,x)ds \in \mathbb{R}$$

también es diferenciable y verifica:

$$g_0(x) = \frac{\partial\Psi}{\partial t}(0,x) = V(f)(x),\ \Psi(t,x) = tg_t(x)$$

así se tiene

$$\frac{f\circ\Phi_{-t} - f}{t} = \frac{\Psi_{-t}}{t} = \frac{-tg_{-t}}{t} = -g_{-t}$$

y por tanto, $A(t) = -W(p_t)(g_{-t})$, y $\lim_{t\to 0} A(t) = -W(p)(g_0) = -W(p)(V(f)$ ■

Una consecuencia de esto es

Proposición 4.16 *Sean* $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ *campos completos y sean* Φ, $\Psi : \mathbb{R} \times M \to M$ *sus correspondientes flujos globales. Entonces* $[V, W] = 0$ *si y solo si* $\Psi_s \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Psi_s$ *para todo* $s, t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Observese primero que si los flujos conmutan entonces

$$\Phi_t\left(\beta_x\left(s\right)\right) = \Phi_t\left(\Psi_s\left(x\right)\right) = \Psi_s\left(\Phi_t\left(x\right)\right) = \beta_{\Phi_t(x)}\left(s\right)$$

y por tanto Φ_t preserva las curvas integrales de W. Es facil concluir ahora que se tiene la equivalencia

$$\Psi_s \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Psi_s \ \forall s, t \Longleftrightarrow \left(\Phi_t\right)_* W = W \ \forall t$$

Supongamos primero que los flujos conmutan, entonces para cada p $W_t(p) = \left(\Phi_{-t}\right)_* \left(W(\Phi_t(p))\right) = W(p)$ es constante y

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W_t(p) = \left.[V, W]\right|_p$$

Recíprocamente $[V, W] = 0$ probaremos que para cada p es $W_t(p) = W(p)$ constante, así resulta que $\left(\Phi_t\right)_* W(p) = W\left(\Phi_t(p)\right)$ y por tanto $\left(\Phi_t\right)_* W = W$ $\forall t$.

Y $W_t(p)$ es constante porque para cada t_0 llamando $\left(\Phi_{t_o}\right)^* W = \widetilde{W}$, $\Phi_{t_o}\left(p\right) = \widetilde{p}$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} W_t(p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi_{t+t_o}\right)^* W\left(\Phi_{t+t_o}\left(p\right)\right) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi_t\right)^* \widetilde{W}\left(\Phi_t\left(\widetilde{p}\right)\right) = \left.\left[V, \widetilde{W}\right]\right|_{\widetilde{p}} = 0 \end{aligned}$$

ya que como $\left(\Phi_{-t_o}\right)_* V = V$ se tiene $\left.\left[V, \widetilde{W}\right]\right|_{\widetilde{p}} = \left(\Phi_{-t_o}\right)_* \left.[V, W]\right|_p = 0$. ■

4.4. DISTRIBUCIONES.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m, y sea n un entero tal que $1 \leq n < m$.

4.4.1. Definiciones.

Una distribución $\mathcal{D}$ de dimensión n en M,consiste en una *elección* de un subespacio n-dimensional $\mathcal{D}_p$ de T_pM, para cada $p \in M$. Se dice que $\mathcal{D}$ es diferenciable en torno a p, si existe $\mathcal{U}$ entorno abierto de p en M, y campos $V_1, \ldots, V_n$ en $\mathcal{U}$ que generan $\mathcal{D}$ en cada punto de $\mathcal{U}$, es decir

$$\mathcal{D}_x = Span\left\{V_1\left(x\right), \ldots, V_n\left(x\right)\right\} \ \forall x \in \mathcal{U}$$

La distribución se dice diferenciable, si es diferenciable en torno a cada punto de M. En adelante solo se consideraremos distribuciones diferenciables. Una distribución $\mathcal{D}$ en M, induce de manera obvia una distribución sobre cada abierto $\mathcal{U}$ de M, que por abuso denotamos por el mismo nombre $\mathcal{D}$.

Un campo V en (un abierto de) M se dice *pertenece* a $\mathcal{D}$, si $V\left(p\right) \in \mathcal{D}_p$ para todo p.

La distribución $\mathcal{D}$ se dice *involutiva* si $[V, W] \in \mathcal{D}$, cada vez que $V, W \in \mathcal{D}$.

Sea N variedad conexa. Una inmersión $\phi : N \to M$ se llama *integral de la distribución* $\mathcal{D}$, si $d\phi(q)(T_qN) = \mathcal{D}_{\phi(q)}$ para todo $q \in N$. Si además ϕ es incrustamiento, se llama *integral regular.*

Una variedad conexa $N \subset M$, se llama *variedad integral de la distribución* $\mathcal{D}$ si la inclusión $\iota : N \hookrightarrow M$ es una integral de $\mathcal{D}$. Si Además N es subvariedad de M, se llama *variedad integral regular.* Nótese que si $\phi : N \to M$ es integral regular de $\mathcal{D}$ entonces $\phi(N)$ es una variedad integral regular. En todo caso, una integral de $\mathcal{D}$ es en un entorno de cada punto una integral regular. Es decir

Lema 4.17 *Si $\phi : N \to M$ es una integral de $\mathcal{D}$ entonces por cada $q \in N$, existe $\mathcal{N}$ entorno abierto de q de forma que $\phi : \mathcal{N} \to M$ es integral regular.*

Sea $\left(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)\right)$ una carta de M. Se dice *adaptada* a $\mathcal{D}$, si $\varphi(\mathcal{U}) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$y las subvariedades en $\mathcal{U}$ definidas por las ecuaciones

$$u^{m+r} = cte,\ 1 \leq i \leq n - m$$

son variedades integrales de $\mathcal{D}$ (llamadas hojas integrales de $\mathcal{U}$). Si además $\varphi(p) = 0$ se dice *por* p.

Lema 4.18 *Sea $\left(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)\right)$ una carta de M y $\mathcal{D}$ una distribución generada en $\mathcal{U}$ por los campos $V_1, \ldots, V_n$. Entonces $(\mathcal{U}, \varphi)$ está adaptada a $\mathcal{D}$ si y solo si $V_j\left(u^{n+r}\right) = 0$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq m - n$.*

Por otra parte si N es una variedad integral de $\mathcal{D}$ contenida en $\mathcal{U}$, entonces N está contenida en alguna de las hojas de $\mathcal{U}$

Demostración. La primera afirmación es elemental. Respecto a la segunda afirmación, nótese que si $\pi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{m-n}$ es la proyección de $\mathcal{U}$ sobre las últimas $m - n$ coordenadas, entonces los vectores de $\mathcal{D}$ se anulan por $d\pi$, y por tanto $d\pi(\xi) = 0$ para todo $\xi \in TN$. Así que por ser N conexa y $d\left(\pi|_N\right) = 0$ es $\pi : N \to \mathbb{R}^{m-n}$ constante (ver ejercicio 3.35 en pág 33), y N está en una hoja de $\mathcal{U}$. ■

El siguiente resultado es también elemental:

Proposición 4.19 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución con dimensión n en la variedad M. Si por cada punto de M pasa una variedad integral de $\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{D}$ es involutiva.*

4.4.2. Teorema de Frobenius.

Este teorema establece entre otras cosas el resultado recíproco de la proposición anterior. En lo que sigue se supondrá que la dimensión de M es $m \geq 2$

Teorema 4.20 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución n-dimensional involutiva en M. Sea $p \in M$. Existe entonces una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ adaptada a $\mathcal{D}$ por p. Además si $\phi : N \to M$ es una integral de $\mathcal{D}$ con $\phi(N) \subset \mathcal{U}$ entonces $\phi(N)$ está contenida en alguna de las* hojas *de $\mathcal{U}$.*

La demostración se hace por inducción sobre la dimensión n de la distribución. Para $n = 1$, la demostración viene dada por el siguiente

Lema 4.21 *Sea V un campo en M y $V(p) \neq 0$. Existe entonces un sistema de coordenadas $\left(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)\right)$ con $\varphi(\mathcal{U}) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$ centrado en p de forma que $V = \partial/\partial u^1$.*

Demostración. Sea N una hipersuperficie que contiene a p, transversal a V (i.e $V(x) \notin T_xN$ $\forall x \in N$) supongase $\chi = \left(x^2, \ldots, x^m\right)$ un sistema de coordenadas globales N y $x^i(p) = 0$, $2 \leq i \leq m$. Considerese la aplicación $\phi(t,x) = \alpha_x(t) = \Phi(t,x)$

$$\phi : I_\varepsilon \times N \to M$$

siendo $\Phi(t,x)$ el flujo de V. Como $\phi : \{0\} \times N \to N \subset M$ es la identidad se concluye que $d\phi(x)| : T_{(0,x)}(I_\varepsilon \times N) \simeq \{0\} \times T_xN \to T_xN \subset T_xM$ es la identidad. Además

$$d\phi(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(t,x) = V(x) \notin T_xN$$

y se concluye que $d\phi(x) : T_{(0,x)}(I_\varepsilon \times N) \to T_xM$ es no singular.Así para ε suficientemente pequeño ϕ es difeomorfismo sobre su imagen $\mathcal{U}$ abierto de M que contiene a N en su interior. Tomando para cada $x \in \mathcal{U}$, $u^1(x) = pr_1\phi^{-1}(x)$, $u^i(x) = x^i(pr_2(x))$ $2 \leq i \leq m$ se concluye que $\left(u^1, \ldots, u^m\right)$ es un sistema de coordenadas en $\mathcal{U}$ con $V = \partial/\partial u^1$. ∎

Supóngase el teorema cierto para $n-1$, y demostrémoslo para $n < m$.

Como $\mathcal{D}$ es diferenciable existen campos $X_1, \ldots X_n$ que generan $\mathcal{D}$ en un entorno de p, y por el lema, es posible tomar un sistema de coordenadas $\chi = \left(x^1, \ldots, x^m\right)$ en centrado en p de forma que $X_1 = \partial/\partial x^1$.

Sean $V_i = X_i - X_i(x^1)$ ($i = 2, \ldots, n$ en el resto de la demostración). Entonces los campos $X_1, V_2 \ldots V_n$ generan $\mathcal{D}$ en dicho entorno. Sea N la subvariedad de ecuación $x^1 = 0$, y sea $W_i = V_i|_N$ que son tangentes a N ya que $V_i\left(x^1\right) = 0$, y los (W_i) generan una distribución $n-1$ dimensional $\mathcal{D}_N$ en N que es involutiva, ya que para cada $q \in N$ (usando que $\mathcal{D}$ es involutiva)

$$[V_i, V_j](q) = c_{ij}^1 X_1(q) + \sum c_{ij}^k V_k(q)$$

$[W_i, W_j] = [V_i, V_j]|_N$ es tangente a N, es $c_{ij}^1 X_1(q) = 0$, y $[W_i, W_j](q) = [V_i, V_j] = \sum c_{ij}^k W_k(q)$.

Aplicando la hipótesis de inducción, existe un sistema de coordenadas $\psi = \left(v^2, \ldots, v^m\right)$ en N adaptado a $\mathcal{D}_N$ por p de forma que las variedades

$$\left(v^{n+r} = cte,\ 1 \leq r \leq m-n\right)$$

son integrales de $\mathcal{D}_N$. Por el lema 4.18 tenemos $W_i\left(v^{n+r}\right) = 0$

Probaremos que el sistema de coordenadas $\varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$ definido por $u^1 = x^1$, $u^i = v^i \circ \pi$, define una carta adaptada a p por $\mathcal{D}$. Para esto, por el lema 4.18 es suficiente demostrar que

$$X_1\left(u^{n+r}\right) = 0 \text{ y } V_j\left(u^{n+r}\right) = 0,\ 1 \leq r \leq m-n$$

pero $X_1\left(u^{n+r}\right) = \partial u^{n+r}/\partial x^1 = \partial u^{n+r}/\partial u^1 = 0$ ya que

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$$

Además, como $\left.u^i\right|_N = v^i$ y $W_i = V_i|_N$ es tangente a N

$$\left.V_i\left(u^{n+r}\right)\right|_N = W_i\left(v^{n+r}\right) = 0$$

Así pues, fijado $u_0 = \left(u_0^2, \ldots, u_0^m\right)$ las funciones

$$F_i^r\left(u^1\right) = V_i\left(u^{n+r}\right)\left(u^1, u_0\right)$$

verifican $F_i^r(0) = 0$ y además

$$\frac{dF_i^r}{du^1} = X_1\left(V_i\left(u^{n+r}\right)\right)\big|_{(u^1,u_0)} = [X_1, V_i]\left(u^{n+r}\right)\big|_{(u^1,u_0)}$$

ya que $V_i\left(X_1\left(u^{n+r}\right)\right) = V_i\left(\partial u^{n+r}/\partial u^1\right) = 0$, pero la involutividad de $\mathcal{D}$ implica que existen funciones C_{ik} tales que

$$[X_1, V_i] = C_{i1}X_1 + \sum_{k=2}^{m} C_{ik}V_k$$

en particular, para cada r fijo, si $c_{ik}\left(u^1\right) = C_{ik}\left(u^1, u_0\right)$ se tiene por ser $X_1\left(u^{n+r}\right) = 0$

$$\frac{dF_i^r}{du^1} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}F_k^r$$

que satisface para $y_i = F_i^r$ el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{du^1} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}y_k$$

con una única solución para cada valor predeterminado de las $y_i(0)$. Como $F_i^r(0) = 0$, se concluye que $F_i^r = 0$.

El resto es inmediato a partir del lema 4.18.

Proposición 4.22 *Sea N una variedad integral de $\mathcal{D}$, $p \in N$, y $\left(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \ldots u^m\right)\right)$ cara adaptada por p. Entonces $N \cap \mathcal{U}$ es un abierto N y de la componente conexa N_0 de $N \cap \mathcal{U}$ que contien a p, es un abierto de la hoja S_0.*

Demostración. Como $\iota : N \to M$ es continua $N \cap \mathcal{U} = \iota^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de N y por tanto variedad diferenciable $n-$dimensional lo mismo que N_0 que sigue siendo variedad integral conexa incluida en $\mathcal{U}$. Por tanto por el lema 4.18, está contenida en una hoja, que no puede ser otra que la S_0 en donde está el punto p. ■

Corolario 4.23 *Si N y P son dos variedades integrales entonces $N \cap P$ es un abierto de N y de P.*

El corolario anterior sirve en particular para demostrar el siguiente resultado relativo a la unicidad de *soluciones*:

Corolario 4.24 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución n-dimensional involutiva en M. Sea $p \in M$. Existe entonces una única variedad integral N de $\mathcal{D}$ que contiene al punto p y que es maximal en el sentido de que cualquier otra variedad integral que corte a N, está necesariamente contenida en N.*

Demostración. Basta tomar $N = \bigcup \{N_\alpha : N_\alpha \text{ es variedad integral } p \in N_\alpha\}$ ■

Naturalmente no toda variedad integral de $\mathcal{D}$ es subvariedad regular de M, sin embargo mantiene la propiedad característica de las subvariedades dada en la proposición 3.44:

Proposición 4.25 *si N es una variedad integral de una distribución $\mathcal{D}$ en M, entonces $F : P \to M$ una aplicación diferenciable entre variedades y N contiene a $F(P)$. Entonces $F : P \to N$ es aplicación diferenciable.*

Demostración. Fijado $p \in P$, sea $\left(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \ldots u^m\right)\right)$ una carta adaptada a $\mathcal{D}$ por $F(p)$. Sea P_0 la componente conexa de $F^{-1}(\mathcal{U})$ que contiene al punto q, y N_0 la componente conexa de $N \cap \mathcal{U}$ que contiene a $F(p)$. Entonces $F(P_0) \subset N_0 \subset S_0$ y N_0 es ya subvariedad regular de M. Aplíquese ahora la proposición 3.44. ■

4.4.3. Versión clásica.

Considérese en $\mathbb{R}^3$ las coordenadas (x, y, u). Una distribución bidimensional $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^3$ viene determinada por las funciones

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, u) \\ q &= q(x, y, u) \end{aligned} \tag{17}$$

de forma que $\mathcal{D}$ está generado por los campos

$$\begin{aligned} X &= \partial/\partial x + p\partial/\partial u \\ Y &= \partial/\partial y + q\partial/\partial u \end{aligned}$$

con este esquema se pueden describir todas las distribuciones $\mathcal{D}$ que no contienen *planos verticales*. Por este motivo una variedad integral N puede escribirse (localmente) como el grafo de una función $u = u(x, y)$ y su plano tangente en $(x, y, u(x, y))$ está generado por

$$\begin{aligned} U &= \partial/\partial x + (\partial u/\partial x)\, \partial/\partial u \\ V &= \partial/\partial y + (\partial u/\partial y)\, \partial/\partial u \end{aligned}$$

La condición span(X, Y) =span(U, V) se escribe

$$\begin{aligned} \partial u/\partial x|_{(x,y)} &= p(x, y, u(x, y)) \\ \partial u/\partial y|_{(x,y)} &= q(x, y, u(x, y)) \end{aligned} \tag{18}$$

Así pues, dadas las funciones (17) se plantea encontrar una función $u = u(x, y)$ tal que verifique (18). La condición de integrabilidad $[X, Y] \in \mathcal{D}$ es entonces equivalente a la igualdad

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial u}$$

que expresa una condición para que las *soluciones* $u = u(x, y)$ del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (18) verifiquen la regla de Swartz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

El teorema de Frobenius garantiza que esta condición es también suficiente para la existencia de soluciones, es decir:

Fijado $z_0 = (x_0, y_0, u_0)$ existe una (localmente única) función $u_{z_0} = u_{z_0}(x, y)$ solución de la EDP (18) tal que $u_0 = u(x_0, y_0)$ y la función $\phi = \phi(x, y, x_0, y_0, u_0) = u_{z_0}(x, y)$ es tambien diferenciable

Ejercicio 4.26 *Completar los detalles del enunciado y demostración (usando el teorema 4.20) de la versión clásica general que se obtiene tomando en* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ *coordenadas* $(x, u) = \left(x^i, u^\alpha\right)$ *y las funciones* $p_i^\alpha = p_i^\alpha(x, u)$, *que determinan la EDP*

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = p_i^\alpha(x, u)$$

Indicación.
Aplíquese el teorema 4.20 a la distribución generada por los campos

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{p} p_i^{\alpha}(x,u) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$$

5. CÁLCULO TENSORIAL.

En esta sección se introduce el cálculo tensorial en variedades comenzando con los tensores covariantes. Esto permite entre otras cosas establecer los cimientos para presentar en capítulos siguientes el cálculo exterior de formas diferenciales. Se hace estudio especial de las formas lineales y las bilineales, deteniendose brevemente en las variedades dotadas de estructura Riemanniana.

Se pasa luego al estudio de tensores generales incluyendo las derivaciones tensoriales de Lie y la derivación general covariante inducida por una conexión lineal. Se construyen los tensores de torsión y curvatura de una conexión lineal y se estudian en particular los tensores clásicos de curvatura de la conexión de Levi_Civita en una variedad riemanniana.

5.1. PARALELIZACIONES

Una *paralelización* de un abierto $\mathcal{U}$ una variedad M, es un sistema de campos $(E_1, \dots, E_m) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, con la propiedad de que para cada $p \in \mathcal{U}$, $(E_1(p), \dots, E_m(p))$ sea base de T_pM. Si $\mathcal{U}$ admite una paralelización, se dice que es paralelizable.

Nota 5.1

- *Si $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \dots u^m))$ es una carta de M entonces $(\partial/\partial u^1, \dots, \partial/\partial u^m)$ es una paralelización en $\mathcal{U}$, así pues una variedad es localmente paralelizable.*
- *Si $\mathcal{U}$ es un abierto paralelizable de la variedad M, entonces $\mathcal{U}$ no tiene porqué ser dominio de una carta. De hecho, $\mathbb{S}^1$ es paralelizable, y sin embargo por ser un espacio compacto, no admite una carta global.*
- *Curiosamente, el hecho de que una variedad sea o no paralelizable, depende más de su topología, que de la estructura diferenciable. Hay condiciones topológicas (no orientabilidad, característica de Euler no nula ...) que garantizan que una variedad M no es paralelizable, y otras (conexión simple, contractibilidad ...) que garantizan todo lo contrario.*

5.1.1. Paralelizaciones y bases de $\mathfrak{X}(M)$

Probaremos que son equivalentes la afirmación de que una variedad M sea paralelizable, y la de que $\mathfrak{X}(M)$ sea $\mathcal{F}(M)$-módulo libre. La razón de esto, es que es lo mismo una paralelización de M que una base para el $\mathcal{F}(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. En efecto, si $(E_1, \dots, E_m) \subset \mathfrak{X}(M)$ es una paralelización de M entonces dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $p \in M$ existen unos números únicos, digamos $f_i(p)$ tales que $V(p) = \sum f_i(p)E_i(p)$, ya que $(E_1(p), \dots, E_m(p))$ es base de T_pM. Tenemos que demostrar que las funciones $f_i : M \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Para ello probaremos que lo son en el dominio de cualquier carta$\left(\mathcal{U}, \varphi = \left(u^1, \dots u^m\right)\right)$. En efecto, tenemos,$E_j = \sum \phi_{ij}\partial/\partial u^i$, donde $\left(\phi_{ij}\right)$ es una matriz cuadrada con entradas diferenciables y con det $\left(\phi_{ij}\right) \neq 0$ en cada punto. Por tanto admite función inversa $\left(\phi_{ij}\right)^{-1} = \left(\psi_{ij}\right)$ que también tiene entradas diferenciables y se vericfica $\partial/\partial u^j = \sum \psi_{ij} E_i$, como $V = \sum V_j^{\varphi} \partial/\partial u^j$, con V_j^{φ} diferenciables, se concluye que $V = \sum_i \left(\sum_j V_j^{\varphi} \psi_{ij} \right) E_i$, y por la unicidad de las funciones f_i se concluye que $f_i = \sum_j V_j^{\varphi} \psi_{ij}$ que son por tanto diferenciables en $\mathcal{U}$.

Recíprocamente, supongase que $(E_1, \ldots, E_r)$ es base de $\mathfrak{X}(M)$ siendo M variedad de dimensión m. Fijado $p \in M$, es claro que $(E_1(p), \ldots, E_r(p))$ constituyen un sistema generador, ya que fijado $\xi \in T_pM$, podemos tomar $V \in \mathfrak{X}(M)$ con $V(p) = \xi$, y así $\xi = V(p) = \sum f_i(p) E_i(p)$ si $V = \sum f_i E_i$. de esta forma, necesariamente es $r \geq m$. Si $r = m$, hemos terminado (pues $(E_1(p), \ldots, E_r(p))$ sería base de T_pM), si $r > m$, podemos extraer de $(E_1(p), \ldots, E_r(p))$ m vectores linealmente independientes, pongamos por ejemplo $(E_1(p), \ldots, E_m(p))$. Es facil ver (tomando una carta) que por razones de continuidad $(E_1, \ldots, E_m)$ constituyen una paralelización de un cierto abierto $\mathcal{U}$ de M que contiene a p, de forma que podemos escribir $E_{m+1} = \sum_1^m f_i E_i$, $f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$. Tomando finalmente una función meseta μ en torno a p con soporte contenido en $\mathcal{U}$, entonces $\mu u^i \in \mathcal{F}(M)$ (ver observación **??**) y $\mu E_{m+1} - \sum_1^m (\mu f_i) E_i = 0$ como μ no es identicamente nulo, se contradice la $\mathcal{F}(M)$-independencia lineal de $(E_1, \ldots, E_r)$.

5.2. FORMAS MULTILINEALES.

En lo que sigue $\mathfrak{X}$ es un módulo sobre un anillo $\mathfrak{F}$,y M será una variedad diferenciable La teoría de tensores que vamos a establecer aquí se aplicará fundamentalmente a tres ejemplos de $\mathfrak{F}$- módulos

a) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(M)$

b) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ donde $\mathcal{U}$ es un abierto paralelizable de M (por ejemplo, dominio de una carta)

c) $\mathfrak{X} = T_pM$ espacio tangente a M en un punto $p \in M$, y $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$.

Escribimos $\mathfrak{X}^r$ para denotar el producto cartesiano $\mathfrak{X}^r = \mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (r veces)

Al $\mathfrak{F}$-módulo $L^1(\mathfrak{X})$ se denomina módulo dual de $\mathfrak{X}$, y se denota por $\mathfrak{X}^*$.

Una *forma multilineal* o *tensor* (covariante) de órden r es una aplicación $\mathbf{A} : \mathfrak{X}^r \to \mathfrak{F}$ que es $\mathfrak{F}$-lineal respecto a cada componente, es decir, para cada $i = 1, \ldots, r$, cada $(V_1, \ldots, V_r) \in \mathfrak{X}^r$ cada $W_i \in \mathfrak{X}$, y cada $f, g \in \mathfrak{F}$ se tiene:

$$\mathbf{A}(\ldots, fV_i + gW_i, \ldots) = f\mathbf{A}(\ldots, V_i, \ldots) + g\mathbf{A}(\ldots, W_i, \ldots)$$

El conjunto $L^r(\mathfrak{X})$ de todos los tensores de órden r constituyen un $\mathfrak{F}$-módulo si se define para $\mathbf{B} \in L^r(\mathfrak{X})$, $(f\mathbf{A} + g\mathbf{B})(V_1, \ldots, V_r) = f\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r) + g\mathbf{B}(V_1, \ldots, V_r)$

Convenimos en escribir $L^0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{F}$ y

$$\mathfrak{L}^r(M) = L^r(\mathfrak{X}(M)), \text{para } r \geq 0$$

Usando la técnica de las funciones meseta, probaremos el siguiente resultado:

5.2.1. Localización.

Si $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$, $(V_1, \ldots, V_r) \in \mathfrak{X}(M)^r$, $(r \geq 1)$ $p \in M$, y para cierto $i = 1, \ldots, r$ es $V_i(p) = 0$, entonces

$$\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p) = 0$$

En particular el valor de $\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p)$ solo depende de los valores $V_i(p)$ de los campos V_i en el punto p.

Demostración: Sea $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots, u^m))$ una carta de M, con $p \in \mathcal{U}$, en donde V_i se escribe:

$$V_i = \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j \frac{\partial}{\partial u^j} \text{ con } \Lambda_j \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$$

tomemos $\mu \in \mathfrak{F}(M)$ una función meseta con $\mu(p) = 1$, y $sop(\mu) \subset \mathcal{U}$. Las funciones $\mu\Lambda_j$ pertenecen a $\mathfrak{F}(M)$, y los campos $U_j = \mu\partial/\partial u^j$ están en $\mathfrak{X}(M)$

$$\mu^2 V_i = \sum_{j=1}^{m} (\mu\Lambda_j) U_j \in \mathfrak{X}(M)$$

y se tiene: $\mu^2 \mathbf{A}(\ldots, V_i, \ldots) = \mathbf{A}(\ldots, \mu^2 V_i, \ldots) =$

$$= \mathbf{A}(\ldots, \sum_{j=1}^{m} (\mu\Lambda_j) U_j, \ldots) = \left(\sum_{j=1}^{m} \mu\Lambda_j \right) (\ldots, U_j, \ldots)$$

particularizando esto en el punto p, como $\Lambda_j(p) = 0$ (ya que $V(p) = 0$), y $\mu(p) = 1$ queda $\mathbf{A}(\ldots, V_i, \ldots) = 0$.

Para ver que el valor de $\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p)$ solo depende de los valores $V_i(p)$ de los campos V_i en el punto p, sean $\bar{V}_i \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\bar{V}_i(p) = V_i(p)$ para $i = 1, \ldots, r$. Pongamos para simplificar $r = 3$. Se tiene:

$$\mathbf{A}(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3) - \mathbf{A}(V_1, V_2, V_3) =$$

$$= \mathbf{A}(\bar{V}_1 - V_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3) + A(V_1, \bar{V}_2 - V_2, \bar{V}_3) + A(V_1, V_2, \bar{V}_3 - V_3)$$

El segundo miembro evaluado en p es naturalmente nulo. ■

El teorema anterior tiene dos importantes consecuencias ya inmediatas:

Corolario 5.2 *Cada tensor $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$ asigna a cada $p \in M$ un tensor $\mathbf{A}(p) \in L^r(T_pM)$ por la condición:*

$$\mathbf{A}(p)(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p) \text{ con } V_i(p) = \xi_i$$

y la asignación $\mathfrak{L}^r(M) \ni \mathbf{A} \to \mathbf{A}(p) \in L^r(T_pM)$ es $\mathbb{R}-$lineal.

Corolario 5.3 *Dada $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$ y $\mathcal{U}$ abierto de M, existe una único tensor $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{L}^r(M)$ verificando la propiedad para todo $V_1, \ldots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}}(V_1 \mid \mathcal{U}, \ldots, V_r \mid \mathcal{U}) = \mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r) \mid \mathcal{U}$$

denotaremos usualmente por el mismo nombre a las tensores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_{\mathcal{U}}$.

Nota 5.4 *Un tensor $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$ puede definirse también, como un operador que asigna a cada $p \in M$ un tensor $\mathbf{A}(p) \in L^r(T_pM)$ verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:*
Para cada $\mathcal{U}$ abierto de M, y campos $(V_1, \ldots, V_r) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, la función:

$$\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r) : M \ni p \to \mathbf{A}(p)(V_1(p), \ldots, V_r(p)) \in \mathbb{R}$$

es diferenciable. Naturalmente, es suficiente comprobar la condición solo para abiertos $\mathcal{U}$ de M que son dominios de cartas.

5.3. FORMAS LINEALES.

Los elementos de $\mathfrak{X}^*$ son 1-formas y se denominan formas lineales. Escribimos $\mathfrak{X}^*(M)$ en lugar de $\mathfrak{X}(M)^* = \mathfrak{L}^1(M)$

5.3.1. Diferencial de una función real.

Si $f \in \mathfrak{F}(M)$, se define $df \in \mathfrak{X}^*$ por la condición

$$df(V) = V(f) \text{ para todo } V \in \mathfrak{X}(M)$$

Nótese que para $p \in M$ se verifica $(df)(p) = df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$

5.3.2. Base dual

Supongamos que $\mathfrak{X}$ admite una base $(E_1, \ldots, E_m)$. Una forma lineal $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*$ queda unívocamente determinada por sus valores $\alpha_i = \boldsymbol{\alpha}(E_i)$. En particular denotando por $\varepsilon^i \in \mathfrak{X}^*$ la 1-forma tal que

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

se concluye que $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ es una base de $\mathfrak{X}^*$ y se denomina dual de $(E_1, \ldots, E_m)$. Para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*$, y $X \in \mathfrak{X}$ se tienen las identidades:

$$X = \sum \varepsilon^i(X)E_i, \; \boldsymbol{\alpha} = \sum \boldsymbol{\alpha}(E_i)\varepsilon^i$$

Si $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots, u^m))$ es una carta de M, podemos tomar $E_i = \partial/\partial u^i$ .como base de $\mathfrak{X}$ $(\mathcal{U})$ y

$$du^j \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial u^j}{\partial u^i} = \delta_{ij}$$

se por tanto

$$(du^1, \ldots, du^m) \text{ es base dual de } \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^m} \right)$$

Nótese que si $f \in \mathfrak{F}(M)$ se tiene la identidad:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i$$

5.3.3. Pullback

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable entre variedades, y sea $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathfrak{X}^*(\bar{M})$. Definimos el pullback de $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, como el operador $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ que hace corresponder: a cada $p \in M$, la $1 - forma$ $(\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}})_p$ en T_pM definida por:

$$(\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}})_p (\xi) = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_p(d\phi(p)(\xi) \; \forall \xi \in T_pM$$

Para todo $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}} \in \mathfrak{X}^*(\bar{M})$ y todo $\bar{f}$, $\bar{g} \in \mathfrak{F}(\bar{M})$ se verifica (punto a punto la identidad:

$$\phi^*(\bar{f}\bar{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{g}\bar{\boldsymbol{\beta}}) = (\phi^*\bar{f})(\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}) + (\phi^*\bar{g})\left(\phi^*\bar{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

en donde se ha denotado $\phi^*\bar{f} = \bar{f} \circ \phi$ que es el *pullback* de la función f

Para comprobar que $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ define una $1-forma$ en M, es suficiente demostrarlo para el caso $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = d\bar{f}$ con $\bar{f} \in \mathfrak{F}(\bar{M})$, ya que localmente en las coordenadas $\overline{\varphi} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}^{\bar{m}})$ de una carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$, se escribe:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum \bar{\alpha}_i d\bar{u}^i \text{ y } \phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum (\phi^*\bar{\alpha}_i)(\phi^* d\bar{u}^i) \tag{19}$$

y por tanto $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ definiría una $1-forma$ (diferenciable) en el dominio $\overline{\mathcal{U}}$. Se tiene en estas condiciones el siguiente:

Lema 5.5 *Si $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable entre variedades, y $\bar{f} \in \mathfrak{F}(\bar{M})$ entonces:*

$$\phi^*(d\bar{f}) = d(\phi^*\bar{f})$$

en particular $\phi^*(d\bar{f}) \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Nota 5.6 *Continuando entonces con la expresión local de $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ iniciada en (19) si suponemos ahora que $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots, u^m))$ es una carta en M con $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$ y $\bar{u}^i = \phi_i(u^1, \ldots, u^m)$ son las ecuaciones de ϕ, siendo $\phi_i = \phi^*\bar{u}^i$ se concluye que para*

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum \bar{\alpha}_i(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^{\bar{m}}) d\bar{u}^i$$

la expresión analítica de su pullback se obtiene haciendo en la expresión de $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ sustitución formal de $\bar{u}_i$ por $\phi_i(u^1, \ldots, u^m)$, es decir

$$\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum \bar{\alpha}_i(\phi_1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, \phi_{\bar{m}}(u^1, \ldots, u^m)) d\phi_i$$

Nota 5.7 *Naturalmente, si $\phi : M \to \bar{M}$, y $\psi : \bar{M} \to N$ son funciones diferenciables entre variedades, entonces:*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{X}^*(N) \to \mathfrak{X}^*(M)$$

5.4. FORMAS BILINEALES.

El $\mathfrak{F}$-módulo $L^2(\mathfrak{X})$ es el módulo de las *formas bilineales* de $\mathfrak{X}$,. que se denota por $\mathfrak{L}^2(M)$, cuando $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(M)$.

5.4.1. Producto tensorial de formas lineales

Si $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{X}^*$, se llama producto tensorial de $\boldsymbol{\alpha}$, y $\boldsymbol{\beta}$ a la forma bilineal

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ni V, W \to \boldsymbol{\alpha}(V)\boldsymbol{\beta}(W) \in \mathfrak{F}$$

Es obvio que la aplicación $\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^* \ni (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ es $\mathfrak{F}$-bilineal.

5.4.2. Expresión analítica de una forma bilineal

Si $(E_1, \ldots, E_m)$ es base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ es su base dual entonces

$$\{\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j : i, j = 1, \ldots m\}$$

constituye una base de $L^2(\mathfrak{X})$. De hecho, si $\mathbf{B} \in L^2(\mathfrak{X})$ se tiene la identidad:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}(E_i, E_j)(\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j)$$

a los elementos $b_{ij} = \mathbf{B}(E_i, E_j)$ se denominan componentes de la forma bilineal $\mathbf{B}$ respecto a la base $(E_1, \ldots, E_m)$.

Supóngase $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m)$. se tiene que

$$(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m) = (E_1, \ldots, E_m) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

con $p_{ij} = \varepsilon^i(\bar{E}_j)$ entonces, si $(\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_m)$ es la base dual se tiene

$$\varepsilon^i = \sum \varepsilon^i(\bar{E}_k)\bar{\varepsilon}_j = \sum p_{ik}\bar{\varepsilon}_k$$

en particular, si $\bar{b}_{ij} = \mathbf{B}(\bar{E}_i, \bar{E}_j)$ se tiene:

$$\mathbf{B} = \sum b_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j = \sum p_{ik}b_{ij}p_{jh}\bar{\varepsilon}_k \otimes \bar{\varepsilon}_h = \sum \bar{b}_{kh}\bar{\varepsilon}_k \otimes \bar{\varepsilon}_h$$

de donde se tiene la igualdad:

$$(\bar{b}_{ij}) = (p_{ij})^t(b_{ij})(p_{ij})$$

Si $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots, u^m))$ es una carta de M, podemos tomar $E_i = \partial/\partial u^i$ .como base de $\mathfrak{X}\ (\mathcal{U})$ y $\varepsilon^i = du^i$ de forma que podemos escribir:

$$\mathbf{B} = \sum b_{ij}(du^i \otimes du^j)$$

donde las componentes $b_{ij} = \mathbf{B}(\partial/\partial u^i, \partial/\partial u^j)$ son funciones diferenciables en $\mathcal{U}$, así si $(\mathcal{U}, \overline{\varphi}{=}(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m))$ es otra carta se verifica la identidad:

$$\bar{b}_{kh} = \sum b_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k}\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^h}$$

5.4.3. Pullback.

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable entre variedades, y sea $\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(\bar{M})$. Definimos el pullback de $\bar{\mathbf{B}}$, como el operador $\phi^*\bar{\mathbf{B}}$ que hace corresponder: a cada $p \in M$, la $2-forma$ $\left(\phi^*\bar{\mathbf{B}}\right)_p$ en T_pM definida por:

$$\left(\phi^*\bar{\mathbf{B}}\right)_p(\xi, \eta) = \bar{\mathbf{B}}_p(d\phi(p)(\xi), d\phi(p)(\eta))\ \forall \xi, \eta \in T_pM$$

Para todo $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(\bar{M})$ y todo $\bar{f}$, $\bar{g} \in \mathfrak{F}(\bar{M})$ se verifica (punto a punto) la identidad:

$$\phi^*(\bar{f}\bar{\mathbf{A}} + \bar{g}\bar{\mathbf{B}}) = (\phi^*\bar{f})\left(\phi^*\bar{\mathbf{A}}\right) + (\phi^*\bar{g})\left(\phi^*\bar{\mathbf{B}}\right)$$

Por otra parte, si $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}} \in \mathfrak{X}^*(\bar{M})$ se verifica:

$$\phi^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \bar{\boldsymbol{\beta}}) = (\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \otimes (\phi^*\bar{\boldsymbol{\beta}})$$

Fijados $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots, u^m))$ es una carta de M y carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi}{=}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}^{\bar{m}}))$ de $\bar{M}$, con $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, si

$$\bar{\mathbf{B}} = \sum \bar{b}_{ij}(d\bar{u}^i \otimes d\bar{u}^j)$$

entonces

$$\phi^*\bar{\mathbf{B}} = \sum \phi^*\bar{b}_{ij}(\phi^*d\bar{u}^i \otimes \phi^*d\bar{u}^j) = \sum (\bar{b}_{ij} \circ \phi)d\phi_i \otimes d\phi_j$$

siendo $\phi_i = \phi^*\bar{u}^i = \bar{u}^i \circ \phi$ las componentes de la expresión analítica de ϕ. En consecuencia $\phi^*\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(M)$ si $\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(\bar{M})$.

5.4.4. Métricas riemannianas.

Una *métrica (ó estructura) Riemanniana* sobre una variedad diferenciable M, es una forma bilineal $\mathbf{g} \in \mathfrak{L}^2(M)$ que verifica la siguiente propiedad:

Para cada $p \in M$, la forma bilineal $\mathbf{g}_p \in L^2(T_pM)$ define en T_pM un producto escalar euclídeo

Es decir: $\mathbf{g}(V,W) = \mathbf{g}(W,V)$ y $\mathbf{g}(V,V) \geq 0$ para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, además,

$$\mathbf{g}(V,V)(p) = 0 \Longrightarrow V(p) = 0$$

Se dice entonces que $(M, \mathbf{g})$ es una variedad Riemanniana. Cuando en una variedad M se supone prefijada una estructura Riemanniana $\mathbf{g}$, diremos que M *es riemanniana* y se denota genericamente por $\langle V, W\rangle = \mathbf{g}(V,W)$ al *producto escalar* de los campos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Análogamente si $\xi, \eta \in T_p(M)$ escribimos $\langle \xi, \eta \rangle$ en lugar de $\mathbf{g}_p(\xi, \eta)$. Observese que con esta notación se tiene la identidad:

$$\langle V, W\rangle (p) = \langle V(p), W(p)\rangle$$

Por ejemplo $\mathbb{R}^n$ tiene una estructura canónica de variedad Riemanniana, si se define para $\xi, \eta \in T_p\mathbb{R}^n$ el producto escalar canónico:

$$\langle \xi, \eta \rangle =< \vec{\xi}, \vec{\eta} >= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \text{ con } \vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \vec{\eta} = (\eta_1, \ldots \eta_n) \in \mathbb{R}^n$$

tomando en $\mathbb{R}^n$ la carta identidad $(x^1, \ldots x^n)$ esta métrica Riemanniana canónica se escribe:

$$dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$$

Nota 5.8 *Es fácil probar usando las particiones diferenciables de la unidad, que cualquier variedad abstracta admite al menos una estructura riemanniana, pero no existe a priori ninguna especialmentre privilegiada. Sin embargo, no es este el caso de las variedades euclideas.*

5.4.5. Estructura riemanniana canónica de una variedad euclidea

Una variedad euclídea M hereda una métrica Riemanniana canónica $\mathbf{g}$ del espacio $\mathbb{R}^n$ en el que está sumergida. En efecto, para cada $p \in M$, y vectores $\xi, \eta \in T_p(M)$ se define

$$\mathbf{g}(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle$$

siendo $\langle \xi, \eta \rangle$ el producto escalar canónico de los vectores $\xi, \eta \in T_p\mathbb{R}^n$. Esto equivale a decir que $\mathbf{g} = i_M^* \bar{\mathbf{g}}$, siendo $\bar{\mathbf{g}}$ la métrica Riemanniana canónica de $\mathbb{R}^n$, y $i_M : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión canónica.

Si $\mathbf{P} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una parametrización de M, y $(\mathcal{U}, \varphi = \mathbf{P}^{-1} = (u^1, \ldots u^m))$ es la correspondiente carta se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

siendo $x^j = x^j \circ \mathbf{P}$ de manera que

$$g_{ij} = \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j}$$

Nota 5.9 *En general, una subvariedad M de una variedad riemanniana $(\bar{M}, \bar{\mathbf{g}})$ hereda de $\bar{M}$ una estructura riemanniana canónica $\mathbf{g} = i_M^* \bar{\mathbf{g}}$, con $i_M : M \hookrightarrow \bar{M}$.*

5.5. APLICACIONES MULTILINEALES Y TENSORES.

5.5.1. Reflexividad.

Recuerdese que $\mathfrak{X}$ es un módulo sobre un anillo $\mathfrak{F}$, y $\mathfrak{X}^*$ denota al módulo dual. Existe un monomorfismo canónico de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^{**}$ definido por:

$$X(\alpha) = \alpha(X) \ \ \forall X \in \mathfrak{X}, \ \forall \alpha \in \mathfrak{X}^*$$

Se supondrá que $\mathfrak{X}$ es un espacio *reflexivo* en el sentido de que el monomorfismo anterior será por hipótesis isomorfismo. De hecho identificaremos de ésta forma canónica $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{X}^{**}$
M denotará una variedad diferenciable con dimensión $n \geq 1$, siendo $\mathfrak{X}(M)$ el álgebra de Lie de los campos de vectores sobre M que es un módulo sobre el anillo de funciones $\mathfrak{F}(M)$ de M.

Ejercicio 5.10 *Demostrar que todo módulo* libre *es* reflexivo. *Probar que* $\mathfrak{X}(M)$ *es* reflexivo.

Sea $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{X}_i$ el producto cartesiano de los $\mathfrak{F}$-módulos $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k$. Cuando $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}$ para $i = 1 \cdots = k$ se denota

$$\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{X}_i = \prod_{1}^{k} \mathfrak{X}$$

5.5.2. Definiciones.

a) Una aplicación $A : \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{X}_i \mapsto \mathfrak{X}$ se dice multilineal, si es $\mathfrak{F}$-lineal respecto a cada componente. Denotamos por $\mathfrak{L}(\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{X}_i, \mathfrak{X})$ al $\mathfrak{F}$-módulo de dichas aplicaciones.
b) Para $s > 0$ los elementos del $\mathfrak{F}$-módulo:

$$T_s^0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{L}(\prod_{1}^{s} \mathfrak{X}, \mathfrak{F})$$

se denominan tensores de $\mathfrak{X}$ covariantes de orden s.
Por convenio: $T_0^0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{F}$
c) Para $r > 0$ los elementos del $\mathfrak{F}$-módulo:

$$T_0^r(\mathfrak{X}) = \mathfrak{L}(\prod_{1}^{r} \mathfrak{X}^*, \mathfrak{F})$$

se denominan tensores de $\mathfrak{X}$ contravariantes de orden s.
d) Para $r > 0$ y $s > 0$, los elementos del $\mathfrak{F}$-módulo:

$$T_s^r(\mathfrak{X}) = \mathfrak{L}(\prod_{1}^{r} \mathfrak{X}^* \times \prod_{1}^{s} \mathfrak{X}, \mathfrak{F})$$

se denominan tensores de $\mathfrak{X}$ covariantes de orden s y contravariantes de orden r.
Por convenio: $T_0^0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{F}$
e) Un tensor de $T_s^r(\mathfrak{X}(M))$ se denomina campo tensorial de M covariante de orden s y contravariante de orden r. Denotamos:

$$\mathfrak{T}_r^s(M) = T_s^r(\mathfrak{X}(M))$$

Ejercicio 5.11 *Demostrar que fijado U abierto de M y un campo tensorial $A \in \mathfrak{T}_r^s(M)$, existe un único campo tensorial* restricción *a U, $A \mid U \in \mathfrak{T}_r^s(U)$ verificando:*

$$A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) \mid U =$$
$$= (A \mid U)(\alpha^1 \mid U, \ldots, \alpha^r \mid U, X_1 \mid U, \ldots, X_s \mid U)$$

5.5.3. Identificaciones canónicas.

1) $T_0^0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{F}$, y $T_1^0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^*$, por definición.
2) $T_0^1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, ya que $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{**}$.
3) $T_s^1(\mathfrak{X})$ es canónicamente isomorfo a $\mathfrak{L}(\prod_1^s \mathfrak{X}, \mathfrak{X})$.
En particular, $T_1^1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$

Ejercicio 5.12 *Probar que $T_{s+1}^0(\mathfrak{X})$ isomorfo a $\mathfrak{L}(\prod_1^s \mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$.*

5.5.4. Contracciones.

Supongase ahora que $\mathfrak{X}$ es módulo libre, o si se quiere, espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ Un tensor $A \in T_1^1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ es un edomorfismo $A : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ y cuya *traza* (que es independiente de su representación matricial) se denomina *Contracción* de A. y escribimos:

$$traza(A) = \mathfrak{C}(A) = \mathfrak{C}_1^1(A)$$

La aplicación $\mathfrak{C}_1^1 : T_1^1(\mathfrak{X}) \mapsto \mathfrak{F}$ es $\mathfrak{F}$-lineal.

Mas general: Dado un tensor $A \in T_s^r(\mathfrak{X})$ con $r > 0$ y $s > 0$, fijados enteros i, j con $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$ se define para $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) \in \prod_1^{r-1} \mathfrak{X}^* \times \prod_1^{s-1} \mathfrak{X}$, el tensor $A_j^i(\alpha^1, \ldots, \alpha^{r-1}, X_1, \ldots, X_{r-1}) \in T_1^1(\mathfrak{X})$ definido por:

$$\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X} \ni (\alpha, X) \mapsto A(\alpha^1, \ldots, \alpha^{i-1}, \alpha, \ldots, \alpha^{r-1}, X_1, \ldots, X_{j-1}, X, \ldots, X_{s-1}) \in \mathfrak{F}$$

y así la aplicación $A_j^i : \prod_1^{r-1} \mathfrak{X}^* \times \prod_1^{s-1} \mathfrak{X} \mapsto T_1^1(\mathfrak{X})$ es $\mathfrak{F}$-multilineal. Se define:

$$\mathfrak{C}_j^i(A) = \mathfrak{C}_1^1 \circ A_j^i \in T_{s-1}^{r-1}(\mathfrak{X})$$

La aplicación: $\mathfrak{C}_j^i : T_r^s(\mathfrak{X}) \mapsto T_{r-1}^{s-1}(\mathfrak{X})$ es $\mathfrak{F}$-lineal, y se denomina *Operador de Contracción* en los indices i y j.

Ejercicio 5.13 *Probar que si $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, el operador $\mathfrak{C}_j^i(A)$ está bien definido por la condición $(\mathfrak{C}_j^i(A)) \mid U = \mathfrak{C}_j^i(A \mid U)$ para todo abierto U* paralelizable *de M.*

5.6. PRODUCTO TENSORIAL.

Se define el *producto tensorial* de los tensores $A \in T_s^r(\mathfrak{X})$ y $B \in T_q^p(\mathfrak{X})$ como la aplicación $A \otimes B : \prod_1^{r+p} \mathfrak{X}^* \times \prod_1^{s+q} \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{F}$ definida por:

$$(A \otimes B)(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, \beta^1, \ldots, \beta^p, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_q) =$$

$$= A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s).B(\beta^1, \ldots, \beta^q, Y_1, \ldots, Y_p)$$

En estas condiciones se tiene el siguiente:

5.6.1. Teorema

$A \otimes B \in T^{s+q}_{r+p}(\mathfrak{X})$. Por otra parte, la aplicación

$$\otimes : T^r_s(\mathfrak{X}) \times T^p_q(\mathfrak{X}) \ni (A, B) \mapsto A \otimes B \in T^{r+p}_{s+q}(\mathfrak{X})$$

es $\mathfrak{F}$-bilineal, y verifica la propiedad asociativa, es decir:

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

para cualesquiera tres tensores A, B, y C.

5.6.2. Observaciones.

Es facil encontrar un ejemplo para comprobar que el *producto tensorial* no verifica la propiedad conmutativa. (Considérese el producto tensorial de dos formas lineales).

Sin embargo aplicando *literalmente* la definición anterior, se observa que por ejemplo el producto $X \otimes \alpha = \alpha \otimes X$ cuando $X \in \mathfrak{X}$ y $\alpha \in \mathfrak{X}^*$.

Analicemos como se comportan las contracciones respecto al producto tensorial:

5.6.3. Teorema.

Si $(\alpha^1, \ldots, \alpha^s, X_1, \ldots, X_r) \in \prod_1^r \mathfrak{X}^* \times \prod_1^s \mathfrak{X}$, entonces fijados enteros i, j con $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$ se tiene:

$$\mathfrak{C}^i_j(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s) =$$

$$\alpha^j(X_i)X_1 \otimes \cdots \otimes X_{j-1} \otimes X_{j+1} \otimes \ldots \otimes X_r) \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^{i-1} \otimes \alpha^{i+1} \otimes \cdots \alpha^s)$$

5.6.4. Expresiones analíticas

Sea $(E_1, \ldots, E_n)$ una base de $\mathfrak{X}$ y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ su base dual.
Sean $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) \in \prod_1^r \mathfrak{X}^* \times \prod_1^s \mathfrak{X}$. Entonces se tiene: $X_j = \varepsilon^h(X_j)E_h$ y $\alpha^i = \alpha^i(E_k)\varepsilon^k$
Si $A \in T^r_s(\mathfrak{X})$ se verifica: $A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) =$

$$A(\alpha^1(E_{i_1})\varepsilon^{i_1}, \cdots, \alpha^r(E_{i_r})\varepsilon^{i_r}, \varepsilon^{j_1}(X_1)E_{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_s}(X_s)E_{j_s}) =$$

$$\alpha^1(E_{i_1}) \cdots \alpha^r(E_{i_r})\varepsilon^{j_1}(X_1) \cdots \varepsilon^{j_s}(X_s)A(\varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_r}, E_{j_1}, \ldots, E_{j_s})$$

Denotando ahora $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = A(\varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_r}, E_{j_1}, \ldots, E_{j_s})$ se tiene el siguiente resultado:

5.6.5. Teorema.

Sea $(E_1, \ldots, E_n)$ una base de $\mathfrak{X}$ y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ su base dual, entonces:

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s} : 1 \leq i_k \leq n,\ 1 \leq j_h \leq n\}$$

constituye una base de $T^r_s(\mathfrak{X})$. De hecho,cada tensor $A \in T^r_s(\mathfrak{X})$ se escribe de una única manera como:

$$A = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s}$$

siendo $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = A(\varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_r}, E_{j_1}, \ldots, E_{j_s})$.

A los escalares $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ se denominan componentes del tensor A respecto a la base $(E_1, \ldots, E_n)$

Ejercicio 5.14 *Si $A \in \mathfrak{T}_r^s(M)$, probar que para cada $p \in M$ existe un único tensor $A(p) \in \mathfrak{T}_r^s(T_pM)$ verificando:*

$$A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s)(p) =$$

$$= A(p)(\alpha^1(p), \ldots, \alpha^r(p), X_1(p), \ldots, X_s(p))$$

Para todo $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) \in \prod_1^r \mathfrak{X}^* \times \prod_1^s \mathfrak{X}$.

Indicación: Usese el exercise 2 para localizar primero el tensor A sobre un abierto U paralelizable. Usar luego la expresión analítica de $A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s)(p)$

Ejercicio 5.15 *Determinar las componentes de la contracción de un tensor A en función de las componentes de A*

5.6.6. Cambio de coordenadas.

Estudiemos que relación hay entre las componentes $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ de un tensor $A \in T_s^r(\mathfrak{X})$ respecto a la base $(E_1, \ldots, E_n)$, y las componentes $\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s}$ del mismo tensor A respecto a la base $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$.

Sea (a^i_j) la matriz de cambio de base: $E_j = a^i_j \bar{E}_i$. por tanto, $\bar{E}_i = (a^{-1})^j_i E_j$. Si $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$, y $(\bar{\varepsilon}^1 \ldots, \bar{\varepsilon}^n)$ son las respectivas bases duales, se tiene: $\bar{\varepsilon}^i = a^i_j \varepsilon^j$.

Se tiene entonces:

$$\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s} = A(\bar{\varepsilon}^{h_1}, \ldots, \bar{\varepsilon}^{h_r}, \bar{E}_{k1}, \ldots, \bar{E}_{k_n}) =$$

$$A(a^{h_1}_{i_1} \varepsilon^{i_1}, \ldots, a^{h_r}_{i_r} \varepsilon^{j_r}, (a^{-1})^{j_1}_{k_1} E_{j_1}, \ldots, (a^{-1})^{j_s}_{k_s} E_{j_s})$$

Por ser A multilineal, se tiene finalmente:

$$\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s} = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} a^{h_1}_{i_1} \cdots a^{h_r}_{i_r} (a^{-1})^{j_1}_{k_1} \cdots, (a^{-1})^{j_s}_{k_s}$$

Nota 5.16 *Clásicamente un tensor A se identifica con sus componentes $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ respecto a una base $(E_1, \ldots, E_n)$, y se supone que dichas componentes çambian"según la fórmula indicada arriba al cambiar de base.*

Ejercicio 5.17 *Probar que un tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ puede verse como una asignación A que hace corresponder a cada punto $p \in M$ un tensor $A(p) \in T_s^r(T_pM)$ verificando la siguiente propiedad de diferenciabilidad:*

Para todo $p \in M$, existe un abierto U entorno de p en M, y una paralelización $(E_1, ..., E_n)$ en U tal que las funciones $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \in \mathfrak{F}(U)$ que verifican

$$A(x) = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}(x) E_{i_1}(x) \otimes \cdots \otimes E_{i_r}(x) \otimes \varepsilon^{j_1}(x) \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s}(x)$$

para todo $x \in U$ son diferenciables.

5.7. FUNTORIALIDAD TENSORIAL.

En este epígrafe se discutirá la posibilidad de extender *tensorialmente* homomorfismos.

5.7.1. Extensiones tensoriales de isomorfismos lineales

Las fórmulas de cambio de coordenadas admiten otra interpretación:

Supongase V y $\bar{V}$ espacios vectoriales reales, y $\varphi : V \mapsto \bar{V}$ un isomorfimo lineal. Se pretende *extender* de forma natural este isomorfismo a otro $\varphi_* : T^r_s(V) \mapsto T^r_s(\bar{V})$. Se denotará $\varphi^* = (\varphi_*)^{-1} : T^r_s(\bar{V}) \mapsto T^r_s(V)$

Se define: $\varphi_* = id : \mathbb{R} = T^0_0(V) \mapsto T^0_0(\bar{V}) = \mathbb{R}$, además, $\varphi_* = \varphi : V = T^1_0(V) \mapsto T^1_0(\bar{V}) = \bar{V}$ y $\varphi^* : \bar{V}^* = T^0_1(\bar{V}) \ni \bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} \circ \varphi \in T^0_1(V) = V^*$. Finalmente, para $A \in T^r_s(V)$ se toma:

$$(\varphi_* A)(\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^r, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s) = A(\varphi^*\bar{\alpha}^1, \ldots, \varphi^*\bar{\alpha}^r, \varphi^*\bar{X}_1, \ldots, \varphi^*\bar{X}_s)$$

Teorema 5.18 *La aplicación $\varphi_* : T^r_s(V) \mapsto T^r_s(\bar{V})$ es un isomorfismo lineal que verifica:*
(1) Para todo par de tensores A y B :$\varphi_*(A \otimes B) = \varphi_*(A) \otimes \varphi_*(B)$
(2) φ_* conmuta con las contracciones, es decir: $C^i_j(\varphi_*(A) = \varphi_*(C^i_j(A))$

Por otra parte, si $(E_1, \ldots, E_n)$ es base de V y $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$ es base de $\bar{V}$, siendo $\varphi(E_j) = a^i_j \bar{E}_i$, la relación entre las componentes $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ de un tensor $A \in T^r_s(X)$ respecto a la base $(E_1, \ldots, E_n)$, y las componentes $\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s}$ del tensor $\varphi_* A$ respecto a la base $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$ es:

$$\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s} = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} a^{h_1}_{i_1} \cdots a^{h_r}_{i_r} (a^{-1})^{j_1}_{k_1} \cdots , (a^{-1})^{j_s}_{k_s}$$

5.7.2. Extensión tensorial de difeomorfismos

Supongase M y $\bar{M}$ variedades diferenciables, y $\phi : M \mapsto \bar{M}$ un difeomorfismo. Se pretende *extender* de forma natural este difeomorfismo a biyecciones $\phi_* : \mathfrak{T}^r_s(M) \mapsto \mathfrak{T}^r_s(\bar{M})$. Se denotará $\phi^* = (\phi_*)^{-1} : \mathfrak{T}^r_s(\bar{M}) \mapsto \mathfrak{T}^r_s(M)$

Se define: $\phi^* : \mathfrak{F}(\bar{M}) = T^0_0(\bar{M}) \ni \bar{f} \mapsto \bar{f} \circ \phi \in \mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$. además,

$\phi^* : \mathfrak{X}^*(\bar{M}) = \mathfrak{T}^0_1(\bar{M}) \ni \bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} \circ d\phi \in \mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(\bar{M})$. Finalmente tenemos $\phi_* : \mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M) \mapsto \mathfrak{T}^1_0(\bar{M}) = \mathfrak{X}(\bar{M})$. Se define entonces para $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$:

$$(\phi_* A)(\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^r, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s) = A(\phi^*\bar{\alpha}^1, \ldots, \phi^*\bar{\alpha}^r, \phi^*\bar{X}_1, \ldots, \phi^*\bar{X}_s)$$

Teorema 5.19 *La aplicación $\phi_* : T^r_s(M) \mapsto T^r_s(\bar{M})$ es una biyección aditiva que verifica:*
(1) Para todo par de tensores A y B, $\phi_*(A \otimes B) = \phi_*(A) \otimes \phi_*(B)$
(2) ϕ_* conmuta con las contracciones, es decir: $C^i_j(\phi_*(A) = \phi_*(C^i_j(A))$
(3) Si $A \in T^r_s(M)$ entonces para todo $p \in M$ se verifica:

$$(\phi_* A)(\phi(p)) = d\phi(p)_*(A(p))$$

Por otra parte, si $(U, \varphi = (u^1, \ldots, u^n)$ y $(\bar{U}, \bar{\varphi} = (\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^n)$ son cartas de M y $\bar{M}$ respectivamente, con $\phi(U) = \bar{U}$, denotando: $\overline{u}^i \circ \phi = \overline{u}^i(u^1, \ldots, u^n)$, y $u^i \circ \phi^{-1} = u^i(\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^n)$ y supuesto que

$$A = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_s}$$

y que

$$\phi_*(A) = \bar{A} = \bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s} \frac{\partial}{\partial \overline{u}^{h_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial \overline{u}^{h_r}} \otimes d\overline{u}^{k_1} \otimes \cdots \otimes d\overline{u}^{k_s}$$

se verifica la relación:

$$\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s} = (\phi_* A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})\frac{\partial \overline{u}^{h_1}}{\partial u^{i_1}} \cdots \frac{\partial \overline{u}^{h_r}}{\partial u^{i_r}} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial \overline{u}^{k_1}} \cdots \frac{\partial u^{j_s}}{\partial \overline{u}^{k_s}}$$

En particular si $M = \bar{M}$ y $\phi = id$ (por tanto $\phi_* = id$) las ecuaciones anteriores expresan la relación entre las componentes $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ del tensor A en la carta (U, ϕ), y las componentes $\bar{A}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s}$ del mismo tensor A en la carta $(U, \bar{\phi})$.

Finalmente, el operador $_*$ es funtorial en el sentido de que si $\phi : M \mapsto \bar{M}$ y $\psi : \bar{M} \mapsto \bar{\bar{M}}$ son difeomorfismos, entonces se verifica:

$$(\psi \circ \phi)_* = (\psi_*) \circ (\phi_*)$$

en particular como $id_* = id$ se concluye $(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1} = \phi^*$.

5.7.3. Pull-back inducido por una aplicación diferenciable

Supongase ahora M y $\bar{M}$ variedades diferenciables, y $\phi : M \mapsto \bar{M}$ una aplicación diferenciable (no necesariamente difeomorfismo). Se prueba entonces que ϕ induce de forma natural una aplicación *pullback* $\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(\bar{M}) \mapsto \mathfrak{T}^0_s(M)$ que viene definida por la siguiente condición:

Si $\bar{A} \in T^0_s(\bar{M})$ y $p \in M$ es

$$(\phi^* A)_p(v^1, \cdots, v^n) = \bar{A}_{\phi(p)}(d\phi_p(v^1), \cdots, d\phi_p(v^n)\ \forall v^i \in T_pM$$

Por otra parte, si $(U, \varphi = (u^1, \ldots, u^n)$ y $(\bar{U}, \bar{\varphi} = (\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^n)$ son cartas de M y $\bar{M}$ respectivamente, con $\phi(U) = \bar{U}$, denotando: $\overline{u}^i \circ \phi = \overline{u}^i(u^1, \ldots, u^n)$, y supuesto que

$$\bar{A} = \bar{A}_{k_1,\ldots,k_s} d\overline{u}^{k_1} \otimes \cdots \otimes d\overline{u}^{k_s}$$

y que

$$A = \phi^*(\bar{A}) = A_{j_1,\ldots,j_s} du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_s}$$

se verifica la relación:

$$A_{j_1,\ldots,j_s} = (\phi^* \bar{A}_{k_1,\ldots,k_s})\frac{\partial \overline{u}^{h_1}}{\partial u^{j_1}} \cdots \frac{\partial \overline{u}^{h_s}}{\partial u^{j_s}}$$

Por otra parte, si ϕ es difeomorfismo, entonces ϕ^* coincide con el definido en el epígrafe anterior.

5.7.4. Subida y bajada de indices

Supongase ahora M dotada de una métrica Riemanniana g. Como es usual se denota $g(X, Y) =< X, Y >$ para $X, Y \in M$.

La métrica g induce un operador *bajada* de índices: $\mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto \downarrow X \in \mathfrak{X}^*(M)$ con $\downarrow X : \mathfrak{X}(M) \ni Y \mapsto < X, Y > \in \mathfrak{F}(M)$. Este operador es obviamente $\mathfrak{F}(M)$-lineal, y como se verá a continuación es un isomorfismo que admite por tanto una aplicación inversa denotada por:

$$\uparrow : \mathfrak{X}^*(M) \ni \alpha \mapsto \uparrow \alpha \in \mathfrak{X}(M)$$

En una carta $(U, \varphi = (u^1, \ldots, u^n)$ donde $g = g_{ij} du^i \otimes du^j$ se verifica $\downarrow (\frac{\partial}{\partial u^i}) = g_{ij} du^j$ de forma que si $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ entonces $\downarrow X = (\downarrow X)_j du^j$ con $(\downarrow X)_j = g_{ij} X^i$.

Denotando como es habitual $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ se ve que al menos en $\mathfrak{X}(U)$ la aplicación "$\downarrow$.ªdmite inversa "$\uparrow$"que viene *localmente* definida para $\alpha = \alpha_i du^i$ por: $\uparrow \alpha = (\uparrow \alpha)^j \frac{\partial}{\partial u^i}$ con $(\uparrow \alpha)^j = g_{ij} \alpha_i$.

Ejercicio 5.20 *Probar que existe globalmente* $\uparrow\colon \mathfrak{X}^*(M) \ni \alpha \mapsto \uparrow \alpha \in \mathfrak{X}(M)$

Estos operadores de *subida y bajada* de indices pueden generalizarse a los de campos tensoriales de manera natural:

Definición 5.21 *a) Para* $r > 0$ $s \geq 0$ *definimos* $\downarrow^i_j\colon T^r_s(M) \mapsto T^{r-1}_{s+1}(M)$ *por:*

$$(\downarrow^i_j A)(\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) =$$

$$= A(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \downarrow X_j, \alpha^i, \dots, \alpha^{r-1}, X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{s+1})$$

Para todo campo tensorial $A \in T^r_s(M)$
b) Para $r \ \geq 0$ $s > 0$ *definimos* $\uparrow^i_j\colon T^r_s(M) \mapsto T^{r+1}_{s-1}(M)$ *por:*

$$(\uparrow^i_j A)(\alpha^1, \dots, \alpha^{r+1}, X_1, \dots, X_{s-1}) =$$

$$= A(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^{r+1}, X_1, \dots, X_{j-1}, \uparrow \alpha^i, X_j, \dots, X_{s-1})$$

Para todo campo tensorial $A \in T^r_s(M)$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.22 *Las aplicaciones* $\downarrow^i_j\colon T^r_s(M) \mapsto T^{r-1}_{s+1}(M)$ *y* $\uparrow^i_j\colon T^r_s(M) \mapsto T^{r+1}_{s-1}(M)$ *son* F*-lineales.*

Por otra parte, si $A \in T^r_s(M)$ *tiene por componentes respecto a la carta* $(U, \varphi = (u^1, \dots, u^n))$, $A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ *entonces:*

$$(\downarrow^a_b A)^{i_1,\dots,i_{a-1},i_{a+1},\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_{b-1},j,\dots,j_s} = g_{j,i_a} A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$$

Además

$$(\uparrow^a_b A)^{i_1,\dots,i_{a-1},i,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_{b-1},j_{b+1},\dots,j_s} = g^{i,j_b} A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$$

Ejercicio 5.23 *Demostrar las fórmulas anteriores cuando* $r = 3$*,* $s = 2$*,* $a = 2$*,* $b = 1$

6. DERIVACIONES TENSORIALES.

Una derivación tensorial (u operador diferencial) en M es una colección $D = \{D^r_s : r \geq 0\, s \geq 0\}$ donde $D = D^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \mapsto \mathfrak{T}^r_s(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal que verifica:
D1) $D(A \otimes B) = D(A) \otimes B + A \otimes D(B)$ para todo A y B campos tensoriales de M.
D2) $(D\alpha)(X) = D(\alpha(X)) - \alpha(DX)$ para todo $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ y todo $X \in \mathfrak{X}(M)$

Ejercicio 6.1 *Probar que una derivación tensorial* D *es localizable, es decir:*

Para todo abierto U *de* M *existe* $D \mid U$ *derivación tensorial en* U *de forma que* $(D \mid U)(A \mid U) = D(A) \mid U$ *para todo campo tensorial* A *de* M*.*

Ejercicio 6.2 *Demostrar que el conjunto* $\mathfrak{D}(M)$ *de derivaciones tensoriales de* M *tiene estructura natural de* $\mathfrak{F}(M)$*-módulo. Tambien es un álgebra de Lie si se define:*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \ \forall D_1, D_2 \in \mathfrak{D}(M)$$

Ejercicio 6.3 *Demostrar que dos derivaciones tensoriales* D *y* $\bar{D}$ *coinciden si y solo si existe un recubrimiento* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de* M *tal que* $D \mid U_\alpha = \bar{D} \mid U_\alpha$ *para todo* $\alpha \in A$*.*

6.1. DETERMINACIÓN DE OPERADORES.

Sea D una derivación tensorial en M , y $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ una 1-forma. Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene, usando D2):

$$(D_1^0\alpha)(X) = D_0^0(\alpha(X)) - \alpha(D_0^1 X)$$

Es decir, el operador $D_1^0 : \mathfrak{T}_1^0(M) \mapsto \mathfrak{T}_1^0(M)$ queda unívocamente determinado por D_0^0 y D_0^1.

Por otra parte es claro (usando la condición D1)) que el conocimiento de D_0^0, D_1^0, y D_0^1 implica conocer como actua D_s^r sobre tensores que son (sumas de) *cosas* del tipo:

$$(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s)$$

Como cualquier tensor es *localmente* de esta forma, usando el **exercise 12** se obtiene:

6.1.1. Teorema.

Si D y $\bar{D}$ son derivaciones tensoriales de M tales que $D_0^0 = \bar{D}_0^0$, $D_1^0 = \bar{D}_1^0$ entonces necesariamente D y $\bar{D}$ coinciden en todos los órdenes.

De hecho se prueba que con datos tipo D_0^0 y D_1^0 se reconstruye toda la derivación D:

6.1.2. Teorema de Wilmore.

Sean $\delta^1 : X(M) \mapsto X(M)$ y $\delta_0 : F(M) \mapsto F(M)$ aplicaciones R-lineales que verifican para todo $f, g \in F^(M)$ y todo $X \in X^(M)$ las propiedades: i) $\delta_0(fg) = \delta_0(f)g + f\delta_0(g)$, ii) $\delta^1(fX) = \delta_0(f)X + f\delta^1(X)$

Existe entonces una única derivación tensorial D verificando: $D_0^0 = \delta_0$ y $D_0^1 = \delta^1$

Por otra parte, D verifica la condición:

$$D(A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s)) = (DA)(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} A(\alpha^1, \ldots, D\alpha^i, \ldots \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} A(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, DX_j, \ldots X_s)$$

6.1.3. Tensores tipo $\binom{1}{1}$ como Derivaciones Tensoriales.

Si D es una derivación tensorial en M entonces D_0^0 puede interpretarse como un campo de vectores actuando en $\mathfrak{F}(M)$. Se denomina a D_0^0 campo asociado a D. En el caso de que el campo D_0^0 sea identicamente nulo, entonces $D_0^1 : \mathfrak{X}(M) \mapsto \mathfrak{X}(M)$ es un tensor de $\mathfrak{T}_1^1(M)$. Usando el teorema de Wilmore se obtiene el recíproco de esta afirmación:

Corolario

Un tensor $A \in T_1^1(M)$ induce una única Derivación Tensorial, que denotamos también por A, con la condición:

$$A_0^0 = 0 : A_0^1 = A$$

6.2. DERIVADA DE LIE.

Fijado $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define la derivación tensorial derivada de Lie L_X por las condiciones: $L_X(f) = f : \forall f \in \mathfrak{F}(M)$ y $L_X(Y) = [X, Y] : \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Es facil ver que se verifican las condiciones del teorema de Wilmore, y por tanto puede definirse $L_X(A)$ para cualquier campo tensorial A. Si D es una derivación tensorial arbitraria con campo $D_0^0 = X$, entonces $D - L_X$ define una derivación tensorial con campo asociado nulo, por lo que es un tensor tipo $\binom{1}{1}$, y se tiene:

6.2.1. Teorema.

Toda derivación tensorial D, puede escribirse una única forma como:

$$D = L_X + A$$

siendo A un tensor tipo $\binom{1}{1}$ y $X = D_0^0$.
Por otra parte la aplicación $L : \mathfrak{X}(M) \mapsto \mathfrak{D}(M)$ define un monomorfismo de álgebras de Lie. En particular:

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$$

6.2.2. Interpretación Geométrica.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $(U, U_0, \varepsilon, \Phi)$ una *caja de flujo* de X por p. Fijado un tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ podemos definir "localmente"en U_0 el operador $\mathfrak{L}_X$

$$\mathfrak{L}_X(A) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^*(A) - A}{t} \tag{20}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.4 *El operador $\mathfrak{L}_X$ antes definido es una derivación tensorial que coincide con la derivación de Lie L_X sobre $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. Por tanto coinciden todos los órdenes y se tiene:*

$$L_X(A) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^*(A) - A}{t}$$

para todo campo tensorial A.
Por otra parte, se verifica para todo $t_0 \in I_\varepsilon$ y $p \in U_0$:

$$\Phi_{t_0}^*(L_X(A)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\Phi_t)^*(A(\Phi_t(p))$$

En particular, la condición $L_X(A) = 0$ equivale a decir:

$$\Phi_t^*(A) = A \ \forall t$$

para todo flujo Φ_t de X.

Demostración. Nótese primero que en virtud de las fórmulas (16) en la página (53 es $\mathfrak{L}_X f = L_X f$ y $\mathfrak{L}_X V = L_X V$, para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$ y todo $V \in \mathfrak{X}(M)$ y además es $(\mathfrak{L}_X \alpha)(V) = L_X(\alpha(V)) - \alpha(L_X V)$ para cada $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$.

En efecto, Denotando $p_t = \Phi_t p$ se tiene para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_X (\alpha(V))|_p &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left\{\alpha(p_t)(V(p_t)) - \alpha(p)(V(p))\right\}\right] \\
(\mathfrak{L}_X\alpha)(V)|_p &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left\{\alpha(p_t)((\Phi_t)_* V(p)) - \alpha(p)V(p)\right\}\right] \\
???0 &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left\{\alpha(p_t)(V(p_t)) - \alpha(p)((\Phi_{-t})_* V(p_t))\right\}\right] \\
\alpha(\mathfrak{L}_X V)|_p &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left\{\alpha(p)((\Phi_{-t})_* V(p_t)) - \alpha(p)(V(p))\right\}\right]
\end{aligned}$$

Por otra parte, fijado el campo tensorial A, y el punto $p \in M$ la aplicación

$$t \to A_p(t) = \Phi_t^*(A(\Phi_t p)) \in T_s^r(T_p M) \tag{21}$$

es diferenciable y la fórmula (20) se escribe en el punto p

$$\mathfrak{L}_X(A)|_p = \left.\frac{dA_p(t)}{dt}\right|_{t=0} \in T_s^r(T_p M)$$

Además punto a punto se verifica: $\mathfrak{L}_X(A) \otimes B = \mathfrak{L}_X(A) \otimes B + A) \otimes \mathfrak{L}_X(B)$ ya que

$$\begin{aligned}
&\Phi_t^*(A\otimes B) - A\otimes B \\
= \;&\Phi_t^*(A)\otimes\Phi_t^*B - A\otimes B = \\
&\Phi_t^*(A)\otimes\Phi_t^*B - \Phi_t^*(A)\otimes B \\
&+\Phi_t^*(A)\otimes B - A\otimes B
\end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_X\left(fV_1\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^s\right) \\
= \;&L_X(f)V_1\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^s \\
&+fL_X(V_1)\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^s + ... \\
&+fV_1\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\alpha^1\otimes\cdots\otimes L_X(\alpha^s)
\end{aligned}$$

debe se diferenciable. Como localmente todo campo tensorial A se escribe como sumas de tensores de este tipo se concluye que $\mathfrak{L}_X(A)$ es un campo tensorial, y que de hecho $\mathfrak{L}_X(A) = L_X(A)$.

Demostremos la última afirmación. Para ello denotando

$$\widetilde{A} = \Phi_{t_0}^* A,\ \widetilde{p} = \Phi_{t_0} p$$

y teniendo en cuenta que $\Phi_{t_0}^*(L_X A) = L_{\Phi_{t_0}^* X}\left(\Phi_{t_0}^* A\right) = L_X\left(\widetilde{A}\right)$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}(\Phi_t)^*(A(\Phi_t(p))) \\
= \;&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\Phi_{t+t_0})^*(A(\Phi_{t+t_0}(p))) \\
= \;&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\Phi_t)^*\left(\left(\Phi_{t_0}^* A\right)(\Phi_t(\Phi_{t_0} p))\right) \\
= \;&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\Phi_t)^*\left(\widetilde{A}(\Phi_t\widetilde{p})\right) \\
= \;&L_X\widetilde{A}\Big|_{\widetilde{p}} = \Phi_{t_0}^*\left(L_X A|_{\Phi_{t_0} p}\right) = \Phi_{t_0}^*(L_X A)\big|_p
\end{aligned}$$

En particular si $L_X A = 0$, entonces se tiene

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\Phi_t)^*(A(\Phi_t(p)) \ \forall t_0$$

y por tanto $((\Phi_t{}^* A)(\Phi_t(p)) = A(p)$ o de forma equivalente $\Phi_t^*(A) = A \ \forall t$. Recíprocamente, si esto sucede entonces la curva $A_p(t)$ definida en (21) es constante igual a p para todo p y por tanto su derivada en cero $\left. L_X A\right|_p$ es nula. ∎

6.3. DERIVACIÓN TENSORIAL COVARIANTE.

6.3.1. Conexiones lineales.

Una conexión lineal en una variedad diferenciable M viene definida por un operador

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M), \ (X, Y) \to \nabla_X Y$$

verificando las propiedades:
1) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X ZT$, $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
3) $\nabla_X fY = X(f) Y + f \nabla_X Y$

Ejercicio 6.5 *Probar que una conexión lineal ∇ sobre la variedad diferenciable M es localizable. Es decir, si $\mathcal{U}$ es abierto de M, existe una única conexión lineal (que llamamos por abuso, tambien ∇) de forma que*

$$(\nabla_X Y)|_{\mathcal{U}} = \nabla_{\left(X|_{\mathcal{U}}\right)} (Y|_{\mathcal{U}}) \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

En lo que sigue, ∇ es una conexión lineal en M. Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se define la derivación tensorial ∇_X por las condiciones: $\nabla_X(f) = X(f)$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$, tomando $\nabla_X(Y)$ su valor natural inducido por la conexión para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Aplicando el teorema de Wilmore se tiene el siguiente:

Teorema 6.6 *Una conexión ∇ en la variedad M, induce una aplicación $\mathfrak{F}(M)$-lineal*

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto \nabla_X \in \mathfrak{D}(M)$$

De hecho, para cada $A \in T_s^r(M)$ podemos definir:

$$(\nabla A)(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s, X) = (\nabla_X A)(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s)$$

y ∇A resulta ser un tensor de $T_{s+1}^r(M)$.
La aplicación $\nabla \mathfrak{T}_s^r(M) \mapsto \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$ se denomina derivada general covariante.

Nota 6.7 *En particular, si $p \in M$ entonces el tensor $(\nabla_X A)(p) \in T_s^r(T_p M)$ solo depende (del tensor A y) del valor de $X(p)$ de X en p. Por tanto tiene sentido referirse a $\nabla_v A$ cuando $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ y $v \in T_p(M)$.*

6.3.2. Cálculos en coordenadas.

Usando el ejercicio 6.5, podemos considerar la restricción de una conexión lineal ∇ en la variedad M a un abierto $\mathcal{U}$ de M con coordenadas $\varphi = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$. Esta conexión viene determinada por los símbolos de christoffel que son funciones Γ_{ij}^k en $\mathcal{U}$ definidas mediante las igualdades

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

Por otra parte, aplicando la propiedad D2) se tiene

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i}\left(du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} du^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) + du^j\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

de donde

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(du^j\right) = -\Gamma_{ik}^j du^k$$

Sea

$$A = A_{j_1,\ldots,j_s}^{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_s}$$

Si se denota por $A_{j_1,\ldots,j_s;j}^{i_1,\ldots,i_r}$ a las componentes de (∇A) se tiene

$$\begin{aligned}
A_{j_1,\ldots,j_s;j}^{i_1,\ldots,i_r} &= (\nabla A)\left(du^{i_1}, \ldots, du^{i_r}, \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} A)\left(du^{i_1}, \ldots, du^{i_r}, \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}}\right) = \\
&\quad -\sum_k A\left(\ldots \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} du^{i_k} \ldots\right) - \sum A\left(\ldots \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \ldots\right) \\
&= \sum_k \Gamma_{jh}^{i_k} A_{j_1,\ldots,\ldots j_s}^{i_1,\ldots,h,\ldots,i_r} - \sum_k \Gamma_{jj_k}^h A_{j_1,\ldots,h,\ldots j_s}^{i_1,\ldots,\ldots,\ldots,i_r}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si $A = A_{ij} du^i \otimes du^j$, entonces

$$A_{ij;k} = -\Gamma_{ki}^h A_{hj} - \Gamma_{kj}^h A_{ih}$$

6.3.3. Tensor de Curvatura

Lema 6.8 *La aplicación $\mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto \nabla_X \in \mathfrak{D}(M)$ no es en general un homomorfismo de álgebras de Lie Si X, Y son campos de vectores en M, entonces $\nabla_{[X,Y]}$ y $[\nabla_X, \nabla_Y]$ son dos derivaciones tensoriales con el mismo campo $[X,Y]$ asociado. Por este motivo:*

$$R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$$

define un tensor tipo $\mathfrak{T}_1^1(M)$ y se verifica:

$$R(X,Y) = R(Y,X)$$

Lema 6.9 *La aplicación $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \mapsto R(X,Y) \in T_1^1(M)$ es $\mathfrak{F}(M)$- bilineal.*
Al tensor tipo $T_3^1(M)$ $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (Z,X,Y) \mapsto R(X,Y)Z \in X(M)$, se le denomina Tensor de Curvatura.

Ejercicio 6.10 *Determinar en función de los símbolos de Christoffel las componentes del tensor de curvatura respecto a una carta.*

6.3.4. Identidades de Bianchi

Supóngase ∇ simétrica. Si R es el tensor de Curvatura, entonces para todo X, Y, Z campos en M se verifican las propiedades:
a) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (primera identidad de Bianchi)
b) $\nabla_Z R(X,Y) + \nabla_X R(Y,Z) + \nabla_Y R(Z,X) = 0$ (Segunda identidad de Bianchi).

6.3.5. Tensor de Ricci

El tensor de Curvatura R admite tres contracciones naturales de las cuales (debido a la primera identidad de Binachi) solo hay dos independientes.
Se define el tensor de Ricci $Ricc = \mathfrak{C}_3^1 R$ es decir, para X, Y campos en M es:

$$Ricc(X,Y) = TRAZA(\mathfrak{X}(M) \ni V \mapsto R(X,V)Y \in \mathfrak{X}(M))$$

y se verifica la identidad: $Ricc(X,Y) - Ricc(Y,X) = -(\mathfrak{C}_1^1 R)(X,Y)$.

6.3.6. La conexión de Levi-Civita.

Sea (M,g) una variedad (Semi-)Riemanniana. Una conexión lineal ∇ en M se dice compatible con la métrica g, si $\nabla g = 0$, o de forma equivalente, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$X\left(g\left(Y,Z\right)\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$$

La condición en coordenadas locales $\varphi = \left(u^1, \dots u^m\right)$ usando los símbolos de Christoffel se escribe:

$$g_{ij;k} = -\Gamma_{ki}^h g_{hj} - \Gamma_{kj}^h g_{ih} = 0$$

Las funciones $\Gamma_{kij} = \Gamma_{ki}^h g_{hj}$ se denomínan símbolos de Christoffel de primera especie, y determinan completamente los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k originales usando la matriz $\left(g^{hk}\right)$ inversa de la (g_{ij}):

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{hij} g^{hk}$$

Se tiene

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k} g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \Gamma_{kij} + \Gamma_{\ kji}$$

y teniendo en cuenta ahora que $\Gamma_{kij} = \Gamma_{ikj}$, se concluye que

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right) \quad (i,j,k = 1,2)\ ; \tag{22}$$

esto prueba que si hay una conexión ∇ compatible con g

6.3.7. Tensor de Curvatura de Riemann

Nota 6.11 *Si se supone ahora ∇ conexión de Levi-Civita de una variedad (Semi-)Riemanniana (M,g) se define el tensor de curvatura de Riemann:*

$$K(X,Y,Z,W) =< R(X,Y)Z, W > \ \forall X,\ Y,\ Z,\ W \in \mathfrak{X}(M)$$

y se verifica $\forall X,\ Y,\ Z,\ W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$K(X,Y,Z,W) = -K(Y,X,Z,W) = -K(X,Y,W,Z) = K(Z,W,X,Y)$$

Nota 6.12 *Usando estas simetrías y tomando una base local ortonormal, $(E_1, \dots E_n)$ puede probarse fácilmente que $\mathfrak{C}_1^1 R = 0$ y por tanto que el tensor de Ricci es simétrico en una variedad (Semi-)Riemanniana.*

6.3.8. Curvatura Escalar

El tensor de Ricci en la variedad (semi-)Riemanniana (M, g), es simétrico y admite una *contracción* natural denominada em Curvatura escalar:

$$S = \mathfrak{C}_1^1(\uparrow Ricc)$$

6.3.9. Otros Operadores asociados a una métrica

Se supone ∇ conexión de Levi-Civita de una variedad (Semi-)Riemanniana (M,g). Los siguientes operadores tienen interés matemático y físico:
1.- Operador Divergencia
Para un tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ siendo $r > 0$ es:

$$div(A) = \mathfrak{C}_{s+1}^r(\nabla(A))$$

Si $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ con $s > 0$ se toma:

$$div(A) = div(\uparrow_s^1 A)$$

Ejercicio 6.13 *Determinar la expresión analítica, en las coordenadas de una carta de el operador divergencia actuando sobre campos de vectores, y sobre tensores* 2-Covariantes.

Ejercicio 6.14 *La siguiente consecuencia de la segunda identidad de Bianchi es crucial para establecer los fundamentos de la Relatividad General:*

$$dS = 2div(Ricc)$$

Pruébese.

2.- Operadores Hessiano, Gradiente y Laplaciano.
Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ se define el Hessiano $Hess(f) = \nabla(df)$, el gradiente $grad(f) = \uparrow df$ y el Laplaciano $\Delta(f) = div(grad(f)$.

Ejercicio 6.15 *Determinar la expresión analítica de $Hess(f)$, $grad(f)$ y Δf en una carta. probar que Hess(f) es simétrico, y si $p \in M$ y $df(p) = 0$, entonces $Hess(f)(p)$ no depende de la conexión ∇ ni de la métrica g.*

7. CÁLCULO EXTERIOR

Esta sección está dedicada al cálculo exterior de formas diferenciables, y a los operadores diferenciales clásicos, culminando con la diferencial exterior y los grupos de cohomología. Nuestra atención se dirige aquí, hacia las formas exteriores de grado máximo, que permiten establecer los conceptos de elemento y forma de volumen. En particular se analiza la idea de orientación.

7.1. ÁLGEBRA EXTERIOR

En lo sucesivo, para $m \in \mathbb{N}^*$ denotaremos por $\mathfrak{S}^m$ al *grupo de permutaciones* de m elementos, es decir:

$$\mathfrak{S}^m = \{\sigma : \{1, \dots m\} \mapsto \{1, \dots m\}\ \sigma \,\text{es biyectiva}\}$$

que tiene $m!$ elementos. El homomorfismo *signatura* es

$$\mathfrak{S}^m \ni \sigma :\mapsto (-1)^\sigma \in \{-1, 1\}$$

Una permutación $\sigma \in \mathfrak{S}^r$ puede interpretarse como una aplicación

$$\sigma : \mathfrak{X}^r \ni (X_1, \dots, X_r) \mapsto (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \in \mathfrak{X}^r$$

y de esta forma se tiene una actuación natural por la derecha del grupo $\mathfrak{S}^r$ sobre el $\mathfrak{F}$-módulo $L^r(\mathfrak{X})$ de los tensores covariantes de órden r:

$$L^r(\mathfrak{X}) \times \mathfrak{S}^r \ni (\mathbf{A}, \sigma) \mapsto \mathbf{A} \circ \sigma = \mathbf{A}.\sigma \in L^r(\mathfrak{X})$$

Es fácil probar que se verifican las siguientes propiedades, para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L^r(\mathfrak{X})$, todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}^r$ y todo $f \in \mathfrak{F}$:
1) $(\mathbf{A}.\sigma).\tau = \mathbf{A}.(\sigma\tau)$
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\sigma = \mathbf{A}.\sigma + \mathbf{B}.\sigma$
3) $(f\mathbf{A}).\sigma = f(\mathbf{A}.\sigma)$.

7.1.1. El módulo de Formas Exteriores de grado r

Se dice que $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ es una *forma exterior* de grado r si:

$$\mathbf{A}.\sigma = (-1)^\sigma \mathbf{A} \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}^r$$

Evidentemente, el conjunto $\Omega^r(\mathfrak{X})$ de todas las formas diferenciables de grado r, es un $\mathfrak{F}$-submódulo de $L^r(\mathfrak{X})$. Se denota por $\Omega^r(M)$ al $\mathfrak{F}$-módulo $\Lambda^r(\mathfrak{X}(M))$

7.1.2. Operador de Alternación

Si $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ se define

$$\mathcal{A}(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \mathbf{A}.\sigma \ , \mathbb{A}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r!} \mathcal{A}(\mathbf{A})$$

No es dificil probar que $\mathcal{A}(\mathbf{A}) \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$, y que si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ entonces es $\mathcal{A}(\alpha) = r!\alpha$. En particular es $\mathcal{A}^2(\mathbf{A}) = r!\mathbf{A}$ y así el endomorfismo $\mathbb{A} : L^r(\mathfrak{X}) \mapsto L^r(\mathfrak{X})$ verifica $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$, y es por tanto una proyección con imagen $im(\mathbb{A}) = \Lambda^r(\mathfrak{X})$. Llamando $N^r = Ker(\mathbb{A})$ se verifica entonces:

$$L^r(\mathfrak{X}) = \Lambda^r(\mathfrak{X}) \bigoplus N^r$$

Lema 7.1 Si $\mathbf{A} \in N^r$ y $\mathbf{B} \in L^s(\mathfrak{X})$ *entonces se verifica que* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in N^{r+s}$ *y.*$\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} \in N^{r+s}$

Demostración. : Se hace, fijada $\mathbf{A} \in N^r$ por inducción sobre el grado s del tensor $\mathbf{B} \in L^s(\mathfrak{X})$. Para $s = 0$ el resultado es evidente. Para $s = 1$ se tiene:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}))(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{r+1}} (-1)^\sigma \mathbf{A}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \mathbf{B}(X_{\sigma(r+1)}) = (*)$$

sacando *factor común* $\mathbf{B}(X_1)$ después $\mathbf{B}(X_2)$ ... etc la suma anterior se reorganiza en la forma

$$(*) = \sum_{i=1}^{r+1} \pm \mathbf{B}(X_i) (\mathcal{A}(\mathbf{A})) (\dots, \widehat{X_i}, \dots) = 0$$

ya que por hipótesis $\mathcal{A}(\mathbf{A}) = 0$. (Hemos denotado por $(\ldots, \widehat{X_i}, \ldots)$ la $r-1$ étupla $(X_1, \ldots, X_r)$, en la que se ha prescindido de la componente i-ésima.)

Supongamos cierto el resultado para $s > 0$, y sea $\mathbf{B} = \mathbf{B}_s \otimes \mathbf{B}_1$ con $\mathbf{B}_s \in L^s(\mathfrak{X})$ y $\mathbf{B}_1 \in L^1(\mathfrak{X})$, entonces $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_s \in N^{r+s}$ por hipótesis, y asi $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_s) \otimes \mathbf{B}_1 \in N^{r+s+1}$ pues el resultado es cierto para $s = 1$. Como cualquier $\mathbf{B} \in L^{s+1}(\mathfrak{X})$ se obtiene como suma de elementos del tipo $\mathbf{B}_s \otimes \mathbf{B}_1$ se concluye la demostración.

7.1.3. Producto Exterior

Si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ y $\beta \in \Lambda^s(\mathfrak{X})$ se define el *producto exterior*:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{r!s!}\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)$$

Propiedades del producto exterior Es fácil probar que el producto exterior es una aplicación

$$\Lambda^r(\mathfrak{X}) \times \Lambda^s(\mathfrak{X}) \ni (\alpha, \beta) \to \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{r+s}(\mathfrak{X})$$

y además es $\mathfrak{F}$-bilineal, decir, para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$, $\beta \in \Lambda^s(\mathfrak{X})$ y $\gamma \in \Lambda^k(\mathfrak{X})$

$$(f\alpha + g\beta) \wedge \gamma = f\alpha \wedge \gamma + g\beta \wedge \gamma, \ \gamma \ \wedge (f\alpha + g\beta) = f\gamma \wedge \alpha + g\gamma \wedge \beta$$

.Probemos que es asociativa, es decir,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

En efecto, como cuestión previa observese que la descomposición

$$L^{r+s}(\mathfrak{X}) = \Lambda^{r+s}(\mathfrak{X}) \bigoplus N^{r+s}$$

permite escribir, para $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ y $\mathbf{B} \in L^s(\mathfrak{X})$, la igualdad:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \triangle \mathbf{B} + \mathbf{A} \square \mathbf{B}$$

donde $\mathbf{A} \triangle \mathbf{B} = \mathbb{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \in \Lambda^{r+s}(\mathfrak{X})$ y $\mathbf{A} \square \mathbf{B} \in N^{r+s}$. Así, usando el LEMA 7.1, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma)) &= \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta + \alpha \square \beta) \otimes \gamma) = \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \otimes \gamma + (\alpha \square \beta) \otimes \gamma) \ = \\
\mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \otimes \gamma)) &= \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma + (\alpha \triangle \beta) \square \ \gamma \ )) = \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma)) = \\
(\alpha \triangle \beta) \triangle \ \gamma &= \mathbb{A}(\ \alpha \otimes (\beta \ \otimes \gamma)) = \cdots = \alpha \triangle (\beta \triangle \ \gamma)
\end{aligned}$$

pero

$$\alpha \triangle \beta = \mathbb{A}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{r!s!}\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) = \frac{r!s!}{(r+s)!}\alpha \wedge \beta$$

por tanto

$$\begin{aligned}
(\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma &= \left(\frac{r!s!}{(r+s)!}\alpha \wedge \beta \right) \triangle \gamma = \frac{r!s!}{(r+s)!} \frac{(r+s)!k!}{(r+s+K)!}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
&= \frac{r!s!k!}{(r+s+k)!}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma
\end{aligned}$$

hemos probado por tanto que:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{1}{r!s!k!}\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$$

Proposición 7.2 *Si $\alpha_i \in \Lambda^{r_i}(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \cdots, s$ se tiene:*

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s = \frac{1}{r_1! \cdots r_s!} \mathcal{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s)$$

Demostración: Ya se ha probado el resultado para $s = 2$, y $s = 3$. Supuesto cierto para $s \geq 3$, probémoslo para $s + 1$. En efecto,

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s) \wedge \alpha_{s+1} = \frac{(r_1 + \ldots r_{s+1})!}{(r_1 + \ldots r_s)! r_{s+1}!} \mathbb{A} ((\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1}) =$$

$$= \frac{(r_1 + \ldots r_{s+1})!}{r_1! \cdots r_s! r_{s+1}!} \mathbb{A} (\mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1})$$

Pero

$$\mathbb{A} (\mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1}) =$$

$$= \mathbb{A} ((\mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) - \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s + \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1})$$

$$= \mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \otimes \alpha_{s+1})$$

de donde se concluye el resultado para $s + 1$.

7.1.4. Producto exterior de 1-formas

De la proposición anterior se deduce en particular, que si $\alpha_i \in \Lambda^1(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \cdots, r$ se tiene:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r)(X_1, \cdots, X_r) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \ (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r)(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}). =$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \alpha_r(X_{\sigma(r)}) &= \det(\alpha_i(X_j)) = \det(\alpha_i(X_j))^t \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)}(X_1) \ldots \alpha_{\sigma(r)}(X_r) &= \left\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(r)} \right\} (X_1, \ldots, X_r) \end{aligned}$$

$$\text{y queda : } \ \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(r)}$$

Proposición 7.3 *Si $\alpha_i \in \Lambda^1(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \ldots, r$, y $\tau \in \mathfrak{S}^r$ entonces:*

$$(-1)^\tau \alpha_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\tau(r)} = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r$$

7.1.5. Una base del espacio de las r–formas exteriores

Sea $(E_1, \ldots, E_m)$ una base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ su base dual. Si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ podemos escribir

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} \alpha_{i_1, \ldots, i_r} \varepsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_r}$$

donde $\alpha_{i_1, \ldots, i_r} = \alpha(E_{i_1}, \ldots E_{i_r})$ con lo que para todo $\sigma \in \mathfrak{S}^r$se tiene:

$$\alpha_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}} = (-1)^\sigma \alpha_{i_1, \ldots, i_r}$$

por tanto, $\alpha_{i_1,\ldots,i_r}$ será nulo cuando haya dos subíndices iguales, así:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq m} \left\{ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^r} \alpha_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}} \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(r)}} \right\} = \\
& \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r \quad \leq m} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \left\{ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(r)}} \right\} \\
&= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r \quad \leq m} \alpha_{i_1,\ldots,i_1} \varepsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_r}
\end{aligned}$$

hemos obtenido así el siguiente

Teorema 7.4 *Si $(E_1,\ldots,E_m)$ una base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^m)$ su base dual, entonces*

$$\left\{\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_r} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m\right\}$$

constituye una base de $\Lambda^r(\mathfrak{X})$. Concretamente, si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ podemos escribir

$$\alpha = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r \quad \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_r}$$

donde $\alpha_{i_1,\ldots,i_r} = \alpha(E_{i_1},\ldots E_{i_r})$. En particular $\Lambda^r(\mathfrak{X}) = \{0\}$ si $r > n$.

Corolario 7.5 *Si M es variedad diferenciable de dimensión n, entonces $\Omega^r(M) = 0$ si $r > n$.*

7.1.6. Pullback de formas exteriores por una aplicación diferenciable.

Como se vió en el epígrafe 7.2.6, una aplicación diferenciable $\phi : M \to \bar{M}$ entre variedades induce un *pullback* $\phi^*{:}\mathfrak{L}^r(\bar{M}) \to \mathfrak{L}^r(M)$, definido para $\bar{\alpha} \in \mathfrak{L}^r(\bar{M})$ por:

$$(\phi^*\bar{\alpha})(x)(\xi_1,\ldots,\xi_r) = \bar{\alpha}(\phi(x))(d\phi(x)(\xi_1),\ldots,d\phi(x)(\xi_1))$$

para todo $x \in M$, $\xi_1,..,\xi_r \in T_xM$. Es fácil comprobar que ϕ^* induce una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$$

y como ϕ^* preserva el producto tensorial, se concluye fácilmente de la definición 7.1.3, que ϕ^* preserva el producto exterior, es decir:

$$\phi^*(\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}) = (\phi^*\bar{\alpha}) \wedge (\phi^*\bar{\beta})$$

para todo $\bar{\alpha},\bar{\beta}$, formas exteriores de $\bar{M}$.

7.2. OPERADORES DE CARTAN.

El objetivo es estudiar los operadores diferenciales clásicos (derivada de Lie, producto interior, y diferencial exterior) que actuan sobre el álgebra de formas diferenciales de una variedad, y demostrar las fórmulas clásicas que los relacionan entre si.

7.2.1. Definiciones y resultados básicos.

En los sucesivo M es una variedad diferenciable de dimensión m.

Derivaciones y antiderivaciones *a) Una derivación de Cartan de grado k en M es un operador D que actua para cada $r \geq 0$ como aplicación D:$\Omega^r(M) \to \Omega^{r+k}(M)$, que es $\mathbb{R}$-lineal y verifica:*

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D\beta$$

para todo α, β formas exteriores de M.

b) Una antiderivación de Cartan grado r en M es un operador δ que actua para cada $r \geq 0$ como aplicación δ :$\Omega^r(M) \to \Omega^{r+r}M$, que es $\mathbb{R}$-lineal y verifica:

$$\delta(\alpha \wedge \beta) = (\delta\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \delta\beta$$

para todo $\alpha \in \Omega^r(M)$,y β formas exteriores de M

Las derivaciones y antiderivaciones, se denominan *Operadores de Cartan.* Se tiene el siguiente resultado preliminar suficiente para nuestras necesidades posteriores::

Operaciones Sean δ, δ' y D operadores de Cartan en la variedad M: δ y δ' antiderivaciones de grados 1 y -1, respectivamente, y D derivación de grado 0. Entonces:

1. $\delta \circ \delta$ es derivación de grado 2
2. $[D, \delta] = D \circ \delta' - \delta' \circ D$ es antiderivación de grado -1
3. $\delta' \circ \delta + \delta \circ \delta'$ es derivación de grado cero.

Se tiene el siguiente resultado general:

Teorema de Localización *a) Toda derivación (respect. antiderivación) es localizable. Es decir, si δ es una derivación (respec. antiderivación y $\mathcal{U}$ es abierto de M, existe una única derivación (respectivamente, antiderivación) $(\delta \mid \mathcal{U})$ en U de forma que para todo $\alpha \in \Omega^r(M)$ se verifica:*

$$(\delta \mid \mathcal{U})(\alpha \mid \mathcal{U}) = (\delta\alpha) \mid \mathcal{U}$$

b) Sea $\delta : \Omega^r(M) \to \Omega^r(M)$ $r \geq 0$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Una condición suficiente para que sea derivación (respect. antiderivación) es que para todo $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \Omega^1(M)$ se verifique:

$$\delta(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_r) = \Sigma\alpha_1 \wedge ...\delta\alpha_i ... \wedge \alpha_r \ \left(= \Sigma(-1)^{i+1}\alpha_1 \wedge ...\delta\alpha_i ... \wedge \alpha_r\right)$$

c) Una derivación (respect. antiderivación) δ queda unívocamente determinada, si se conoce $\delta(f)$ y $\delta(df)$ para toda función $f \in \mathfrak{F}(M)$.

La demostración es automática, usando la técnica de las funciones meseta.

7.2.2. Dos operadores básicos.

Daremos aquí dos ejemplos relevantes uno de derivación y otro de antiderivación, que nos permitirán construir en el siguiente epígrafe la derivada exterior.

La derivación de Lie. *Sea $D = L_V$ la derivada de Lie respecto a un campo $V \in M$, entonces D aplica $\Omega^r(M)$ en $\Omega^r(M)$*,y su *restricción induce una derivación de Cartan de grado* 0.

Demostración:

Usaremos que las transposiciones $\tau_i (i = 1, \dots r-1)$ de $\mathfrak{S}^r$ que intercambian i con $i+1$, generan todo el grupo de permutaciones $\mathfrak{S}^r$.

1) Si $\alpha \in \Omega^r(M)$, entonces para $V_1, \dots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$(D\alpha)(V_1, \dots, V_r) = D(\alpha((V_1, \dots, V_r)) - \sum_i \alpha(\dots, DV_i, \dots)$$

y se observa que dicha expresión se anula si $V_i = V_{i+1}$ para algún i. Esto prueba que $(D\alpha) \circ \tau_i = -D\alpha$, y por tanto $D\alpha \in \Omega^r(M)$.

Por otra parte, Es facil ver que para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{I}_r^0(M)$ y todo $\sigma \in \mathfrak{S}^r$, se verifica $D(\mathbf{A} \circ \sigma) = (D\mathbf{A}) \circ \sigma$

ya que la igualdad anterior es cierta cuando de toma $\sigma = \tau_i$. En efecto, por ejemplo para $i = 1$ se tiene:

$$\{D(\mathbf{A} \circ \tau_1)\}(V_1, \dots, V_r) =$$

$$= D((\mathbf{A} \circ \tau_1)(V_1, V_2, \dots, V_r)) - (\mathbf{A} \circ \tau_1)(DV_1, V_2, \dots, V_r) -$$

$$-(\mathbf{A} \circ \tau_1)(V_1, DV_2, \dots, V_r) - \sum_{i>2} \dots =$$

$$= D(\mathbf{A}(V_2, V_1, \dots, V_r)) - \mathbf{A}(V_2, DV_1, \dots, V_r) - \mathbf{A}(DV_2, V_1, \dots, V_r) - \dots$$

$$= \{(D\mathbf{A}) \circ \tau_1\}(V_1, \dots, V_r)$$

Tenemos así de forma inmediata que

$$D(\mathcal{A}(\mathbf{A})) = \mathcal{A}(D\mathbf{A})$$

y en consecuencia, para $\alpha \in \Omega^r(M), \beta \in \Omega^s(M)$ se verifica:

$$D(\alpha \wedge \beta) = \frac{1}{r!s!} D(\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)) = \frac{1}{r!s!} \mathcal{A}(D(\alpha \otimes \beta)) =$$

$$= \frac{1}{r!s!} \mathcal{A}\{(D\alpha) \otimes \beta) + \alpha \otimes D\beta\} = (D\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D\beta$$

Esta derivación de Cartan de acuerdo con (**??**) admite la siguiente interpretación geométrica para $\alpha \in \Omega^r(M)$:

$$L_V(\alpha) = \lim_{t \to 0} \frac{F_t^* \alpha - \alpha}{t}$$

siendo F_t el flujo local del campo V.

Además se tiene el siguiente:

Lema. *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $f \in \mathfrak{F}(M)$,se tiene $L_V(df) = d(L_V(f))$.*

Demostración:

Para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene,

$$(L_V(df))(W) = V(df(W)) - df([V, W]) =$$

$$= V(W(f)) - [V, W](f) = W(V(f)) = W(L_V f) = d(L_V(f))(W).$$

El producto interior Un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$, define naturalmente una antiderivación de Cartan de grado -1, $i_V : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M)$ de la siguiente forma: si $\alpha \in \Omega^r(M)$ y $r > 1$ es,

$$(i_V\alpha)(V_2, \dots, V_r) = \alpha(V, V_2 \dots, V_r) \forall V_2, \dots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$$

cuando α es 1-forma, $i_V\alpha = \alpha(V)$. Se supone $i_V f = 0$ para todo $f \in \mathfrak{X}(M)$.

Probaremos que i_V es una antiderivación (de grado -1). Por 7.2.1 es suficiente probar $i_V(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r) = \Sigma(-1)^{i+1}\alpha_1 \wedge \dots i_V\alpha_i \dots \wedge \alpha_r$, para $\alpha_i \in \Omega^1(M)$.

En efecto, si $V_2, \dots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$ tomando $V_1 = V$, se tiene:

$$\{i_V(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)\}(V_2, \dots V_r) = (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)(V, V_2, \dots, V_r) = \det(\alpha_i(V_j)) =$$

$$\Sigma(-1)^{i+1}\alpha_i(V_1)(\alpha_1 \wedge \dots \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \dots \alpha_r)(V_2, \dots, V_r) =$$
$$= \Sigma(-1)^{i+1}(i_V\alpha_i) \wedge \alpha_1 \wedge \dots \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \dots \alpha_r)(V_2, \dots, V_r) =$$
$$= \{\Sigma(-1)^{i+1}\alpha_1 \wedge \dots \wedge (i_V\alpha_i) \wedge \dots \alpha_r)\}(V_2, \dots, V_r)$$

7.2.3. La diferencial exterior.

Demostraremos que hay una antiderivación $\mathbf{d}$ de grado $+1$, que verifica $\mathbf{d}f = df$, y $\mathbf{d}(df) = 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$. Denominamos *diferencial exterior* a esta antiderivación.

Si $\mathbf{d}$ existe, por 7.2.1 c) se concluye que es única. De hecho, con estos datos podríamos determinar ya su actuación analítica local. Por ejemplo:

si $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$, entonces $d\alpha = dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz$=

$$= \frac{\partial A}{\partial y}(dy \wedge dx) + \frac{\partial A}{\partial z}(dz \wedge dx) + \frac{\partial B}{\partial x}(dx \wedge dy) +$$
$$+ \frac{\partial B}{\partial z}(dz \wedge dy) + \frac{\partial C}{\partial x}(dx \wedge dz) + \frac{\partial C}{\partial y}(dy \wedge dx) =$$

$$= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

Teorema de existencia *Dada M variedad diferenciable, existe una (única) antiderivación* $\mathbf{d}$ *de Cartan de grado* 1 *tal que:* $\mathbf{d}f = df$, *y* $\mathbf{d}(df) = 0$ *para todo* $f \in \mathfrak{F}(M)$.

La demostración se hace en dos etapas:

(1) *Supongamos $M = \mathcal{U}$ dominio de una carta:*

Sea $\varphi = (u^1, \dots u^m)$ una carta con dominio $M = \mathcal{U}$ sea $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^r(M)$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le m} \alpha_{i_1,\dots,i_1} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_r}$$

definamos entonces

$$\mathbf{d}_\varphi\boldsymbol{\alpha} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le m} (d\alpha_{i_1,\dots,i_1}) \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_r}$$

Evidentemente $\mathbf{d}_\varphi$:$\Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}-$lineal que verifica $\mathbf{d}_\varphi f = df$, para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$. Además,

$$\mathbf{d}_\varphi (df) = \mathbf{d}_\varphi \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u^j} du^j\right) = \left(\sum_{j=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right) \wedge du^j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right) du^i \wedge du^j =$$
$$= \sum_{1\leq i<j\leq m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \right) du^i \wedge du^j = 0$$

Demostraremos por último que $\mathbf{d}_\varphi(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{d}_\varphi\boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^r \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{d}_\varphi\boldsymbol{\beta}$ si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^r(M)$ y $\boldsymbol{\beta} \in \Omega^s(M)$. Creemos suficiente demostrarlo cuando $\boldsymbol{\alpha} = f du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r}$ y $\boldsymbol{\beta} = g du^{j_1} \wedge \ldots \wedge du^{j_s}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_\varphi(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) &= d(fg) \wedge du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \ldots \wedge du^{j_s} \\
&= (gdf + fdg) \wedge du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \ldots \wedge du^{j_s} \\
&= gdf \wedge du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r} + (-1)^r f du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r} \wedge dg \wedge du^{j_1} \wedge \ldots \wedge du^{j_s} \\
&= (\mathbf{d}_\varphi\boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^r \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{d}_\varphi\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{d}$ es única, no depende de la carta φ elegida, y podemos denotar $\mathbf{d}_\varphi = \mathbf{d}_\mathcal{U}$

(2) *Caso general:*

Si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^r(M)$ se define $\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}$, como la única $(r+1)-$ forma tal que para cada $\mathcal{U}$ abierto coordenado de M:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}|_\mathcal{U} = \mathbf{d}_\mathcal{U} \left(\boldsymbol{\alpha}|_\mathcal{U} \right)$$

■

7.2.4. Identidades Notables

Sea M variedad diferenciable y $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene entonces:

a) $\mathbf{d}(\mathbf{d}\alpha) = 0$ para toda forma α (es decir $\mathbf{d}^2 = \mathbf{d} \circ \mathbf{d} = \mathbf{0}$)

b) $L_V \circ \mathbf{d} - \mathbf{d} \circ L_V = 0$

c) $i_V \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ i_V = L_V$

d) $[L_V, i_W] = i_{[V,W]}$.

Demostración:

Para probar estas cuatro identidades, basta con usar las propiedades 1), 2) y 3) de 7.2.1 para los operadores de Cartan, y luego demostrar que el miembro de la izquierda toma el mismo valor sobre las funciones, y las diferenciales de las funciones. Se aplica ahora 7.2.1 (3) para demostrar la igualdad.

Probemos por ejemplo d):

Usando 7.2.1 (2) , se ve que $[L_V, i_W]$ es una antiderivación de grado -1 al igual que $i_{[V,W]}$. Claramente si $f \in \mathfrak{X}(M)$:

$$[L_V, i_W](f) = L_V(i_W f) - i_W(L_V f) = 0 - 0 = 0 = i_{[V,W]}(f).$$

además

$$L_V, i_W](df) = L_V(i_W df) - i_W(L_V df) = V(W(f)) - i_W(d(L_V f)) =$$
$$= V(W(f)) - (d(L_V f))(W) = V(W(f)) - W(V(f)) =$$
$$= [V, W](f) = df([V, W] = i_{[V,W]}(df)$$

7.2.5. Expresión analítica global de la diferencial

Grados 1 y 2 Usando la identidad c) de 7.2.4 puede obtenerse una expresión anlítica explícita de la diferencial. Por ejemplo, se puede probar que si $\alpha \in \Omega^1(M)$, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ entonces:

$$\mathbf{d}\alpha(V,W) = V(\alpha(W)) - W(\alpha(V)) - \alpha([V,W])$$

ya que $\mathbf{d}\alpha(V,W) = (i_V\mathbf{d}\alpha)(W) = (L_V\alpha - \mathbf{d}(i_V\alpha))(W) = V(\alpha(W)) - \alpha([V,W]) - W(\alpha(V))$, y supuesta cierta esta fórmula se concluye análogamente que si $\alpha \in \Omega^2(M)$, $V, W, U \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\alpha(V,W,U) &= V(\alpha(W,U)) - W(\alpha(V,U)) + U(\alpha(V,W)) \\ &-\alpha([V,W],U) + \alpha([V,U],W) - \alpha([W,U],V) \end{aligned}$$

de forma general se tiene:

Caso general Para $\alpha \in \Omega^r(M)$, y $V_0, V_1, ..., V_r \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\mathbf{d}\alpha(V_0,...,V_r) = \sum_i^r (-1)^i V_i(\alpha(...\hat{V}_i...)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\alpha([V_i,V_j],...\hat{V}_i,\hat{V}_j,...)$$

Demostración:

La fórmula es trivialmente cierta para $r = 0.$, y ya hemos probado la fórmula para $r = 1$ y $r = 2$. Supuesta cierta la fórmula para $r-1$, $(r > 1)$ probemosla para $\alpha \in \Omega^r(M)$. Sean $V = V_0, V_1, \dots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$\mathbf{d}\alpha(V,V_1,\dots,V_r) = (L_V\alpha)(V_1,\dots,V_r) - \mathbf{d}(i_V\alpha)(V_1,\dots,V_r) =$$

$$\begin{aligned} &V(\alpha(V_1,\dots,V_r)) - \sum_{i=1}^r \alpha(V_1\dots[V,V_i],\dots V_r) - \\ &-\sum_{i=1}^r (-1)^i V_i((i_V\alpha)(\dots,\hat{V}_i,\dots)) + \\ &\sum_{0<i\leq r} (-1)^{i+j}(i_V\alpha)([V_i,V_j],\dots,\hat{V}_i,\dots\hat{V}_j\dots) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^r (-1)^i V_i(\alpha(\dots\hat{V}_i\dots)) + \sum_{0\leq i<j\leq r} (-1)^{i+j}\alpha([V_i,V_j],\dots\hat{V}_i,...,\hat{V}_j,\dots)$$

7.2.6. Pullback

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable, y $\bar{\alpha} \in \Omega^r(\bar{M})$. Entonces:

$$\mathbf{d}(\phi^*\bar{\alpha}) = \phi^*(\mathbf{d}\bar{\alpha})$$

En particular $\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$ aplica $Z^r(\bar{M})$ en $Z^r(M)$, y $B^r(\bar{M})$ en $B^r(M)$.

Demostración:

Es suficiente comprobarlo para las funciones y diferenciales de funciones. Pero, $\phi^*(\mathbf{d}\bar{f}) = \phi^*(d\bar{f}) = \mathbf{d}(\phi^* f)$, y $\mathbf{d}(\phi^* d\bar{f}) = \mathbf{d}(\mathbf{d}(\phi^*\bar{f})) = 0 = \phi^*(\mathbf{d}(d\bar{f}))$. Así si $\alpha \in \Omega^r(\bar{M})$ se escribe $\bar{\alpha} = \bar{f}d\bar{f}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}^r$, es $\mathbf{d}\bar{\alpha} = d\bar{f} \wedge d\bar{f}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}^r$

$$\mathbf{d}(\phi^*\bar{\alpha}) = \mathbf{d}\{\phi^*(\bar{f}d\bar{f}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}^r)\} = \mathbf{d}\{(\phi^*\bar{f})\phi^*(d\bar{f}^1) \wedge \ldots \wedge \phi^*(d\bar{f}^r)\} =$$

$$\phi^* d\bar{f} \wedge \phi^*(d\bar{f}^1) \wedge \ldots \wedge \phi^*(d\bar{f}^r)\} = \phi^*(\mathbf{d}\alpha)$$

7.3. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

Se supondrá que M es variedad diferenciable abstracta de dimensión n, y $\mathbf{d}$ es la diferencial exterior asociada. Veremos que el operador $\mathbf{d}$ nos permite asociar a cada entero r con $0 \leq r \leq n$ un espacio vectorial real $H^r(M)$, denominado *grupo r-ésimo de Cohomología de De Rham* . La dimensión b_r de $H^r(M)$, se denomina *r-ésimo número de Betti* de M. Los números de Betti de M, son invariantes no solo diferenciales si no también topológicos (variedades diferenciables homeomorfas tienen los mismos números de Betti). De hecho, los números de Betti pueden obtenerse usando exclusivamente métodos de topología algebraica.

7.3.1. Formas cerradas y exactas

Se dirá que $\alpha \in \Omega^r(M)$ es cerrada si $\mathbf{d}\alpha = \mathbf{0}$, **y** *que $\beta \in \Omega^r(M)$ es exacta, si existe $\lambda \in \Omega^{r-1}(M)$ con $\mathbf{d}\lambda = \beta$.*

Tenemos $\Omega^{r-1}(M) \longrightarrow \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$

Se denotará por $Z^r(M)$ al conjunto de formas cerradas de $\Omega^r(M)$, y por $B^r(M)$ al de las formas exactas.

Como $\mathbf{d}$ es $\mathbb{R}$-lineal y $\mathbf{d}^2 = 0$ resulta que $B^r(M)$ y $Z^r(M)$ son subespacios vectoriales de $\Omega^r(M)$, y $B^r(M) \subseteq Z^r(M)$.

7.3.2. Cohomología de DeRham

El espacio vectorial cociente $H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$ para $0 \leq r \leq n$ se denomina r-ésimo grupo de De Rham de M. A la dimensión (real) b_r de $H^r(M)$ se denomina r-ésimo número de Betti.

7.3.3. Grupo cero de cohomología

En una variedad M el número de Betti b_0 de órden cero, es el número de componentes conexas de M.

Para probar que dos variedades difeomorfas tienen grupos de De Rham isomorfos necesitamos usar el resultado de 7.2.6

7.3.4. La cohomología como invariante diferencial

Dada la aplicación diferenciable $\phi : M \to \bar{M}$, la aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$ (ver 7.2.6) *induce por paso al cociente una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\phi^* : H^r(\bar{M}) \to H^r(M)$, de forma que, si $\psi : \bar{M} \to \tilde{M}$ es otra aplicación diferenciable, se tiene: $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$, además, $id_M^* = id : H^r(M) \to H^r(M)$.*

En particular, dos variedades difeomorfas tienen grupos de Cohomología de deRham isomorfos.

7.3.5. Primer grupo de cohomología

Analizemos el significado geométrico del primer grupo de Cohomología.

Si $\alpha \in \Omega^1(M)$, y $\gamma : I \to M$ es curva diferenciable, entonces $\gamma^*\alpha$ es una 1-forma en I, y admite una expresión del tipo $(\gamma^*\alpha)(t) = f(t)dt$, con $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable,así tiene sentido la siguiente

La integral de una 1-forma *Se llama integral de la 1-forma* $\alpha \in \Omega^1(M)$ a *lo largo de la curva diferenciable* $\gamma : [a,b] \to M$ a $\int_\gamma \alpha = \int_a^b \gamma^*\alpha$. *La definición no depende de los cambios (regulares) de parámetro, y se extiende de forma natural a curvas* γ *continuas y diferenciables a trozos. En todo caso la aplicación* $\int_\gamma : \Omega^r(M) \to \mathbb{R}$ *es* $\mathbb{R}$*-lineal, y verifica:* $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$

Teorema de Green en variedades *Sea* $r \in M$, y *sea* α *una 1-forma de* M. *Entonces:*

(a) α *es exacta si y solo si* $\int_\gamma \alpha = 0$ *para toda curva* $\gamma : [a,b] \to M$ *con* $\gamma(a) = \gamma(b) = r$.

(b) Si M *es simplemente conexa, entonces* α *cerrada* $\Leftrightarrow$ α *exacta, es decir* $H^1(M) = 0$.

(c) *Toda 1-forma cerrada es localmente exacta.*

NOTA: El apartado (c) se generaliza para cualquier r-forma cerrada. Se conoce este resultado por el nombre *Lema de Poincaré* , que es equivalente al siguiente enunciado: $H^r(\mathbb{R}^n) = 0$ para $r > 0$.

No haremos una demostración total de estos resultados pero como ilustración probaremos que $M = \mathbb{R}^2$ tiene primer grupo de cohomología trivial, es decir $Z^1\left(\mathbb{R}^2\right) \subset B^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

Sea $\vartheta = Pdx + Qdy$ en una $1-$forma de $\mathbb{R}^2$, donde $P = P(x,y)$, y $Q = Q(x,y)$ son funciones diferenciables con valores reales. Supongamos que ϑ es cerrada. Esto significa que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{23}$$

Probemos que existe una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $dF = \vartheta$. La idea es la siguiente: Si tal F existiera, entonces para cada curva diferenciable $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(a) = 0 = (0,0)$, $\gamma(b) = p$ se tendría (ver (**??**))

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vartheta &= \int_\gamma dF = \int_a^b \gamma^*(dF) = \int_a^b d(\gamma^* F) \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(0) - F(p) \end{aligned}$$

y por tanto se tendría

$$F(p) = F(0) + \int_\gamma \vartheta$$

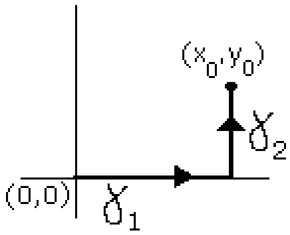
independientemente de la curva (diferenciable a trozos) γ en $\mathbb{R}^2$ que una el origen 0 con el punto $p \in \mathbb{R}^2$. Así que podemos proceder de esta manera:

Definimos $F(0,0) = 0$, y fijado $p = \left(x^0, y^0\right)$ debemos tomar

$$F(x^0, y^0) = \int_\gamma \vartheta = \int_{\gamma_1} \vartheta + \int_{\gamma_2} \vartheta$$

donde $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ es la curva diferenciable a trozos que une $(0,0)$ con $\left(x^0, y^0\right)$, siendo

$$\gamma_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ y = 0 \end{array} \right. \quad 0 \leq u \leq x^0, \; \gamma_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = x^0 \\ y = v \end{array} \right. \quad 0 \leq v \leq y^0$$



y queda entonces

$$\begin{aligned} F(x^0, y^0) &= \int_0^{x^0} \gamma_1^* \vartheta + \int_0^{y^0} \gamma_2^* \vartheta \\ &= \int_0^{x^0} P(u,0) du + \int_0^{y^0} Q(x^0, v) dv \end{aligned}$$

o sea

$$F(x,y) = \int_0^x P(u,0) du + \int_0^y Q(x,v) dv$$

por tanto

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x,y)} = \frac{d}{dx} \int_0^x P(u,0) du + \int_0^y \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,v)} dv$$

y usando (23) y la regla de barrow, queda

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x,y)} &= P(x,0) - \int_0^y \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,v)} dv \\ &= P(x,0) - \left[P\left(x,v\right) \right]_{v=0}^{v=y} \\ &= P(x,y) \end{aligned}$$

análogamente se prueba que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

En virtud del resultado de **??**, toda $1-$forma cerrada es exacta en cualquier espacio difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. . Con un argumento parecido se demuestra la misma afirmación para $\mathbb{R}^n$.Teniendo en cuenta que cada punto de una variedad admite un entorno difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se tiene el siguiente resultado

Toda 1-forma cerrada de una superficie M es localmente exacta.

(Una $1-$forma $\vartheta \in \Omega^1(M)$ se dice localmente exacta, si en un entorno $\mathcal{U}$ de cada punto de M existe una $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ con $df = \vartheta$ en $\mathcal{U}$.)

8. TEORÍA DE INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

El resto del libro está esencialmente dedicado a fabricar los cimientos, que nos permitan establecer de forma consistente una teoría de integración de funciones en variedades que generalize la de Riemann o Riemann-Stieljes o incluso la de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

8.1. ORIENTACIÓN Y FORMAS DE VOLUMEN.

Solo es posible estableceruna teoría de inetgración de funciones, cuando se cuenta sobre la variedad con un ingrediente más, denominado elemento (infinitesimal) de volumen. Este ingrediente viene canónicamente definido cuando disponemos de una estructura riemanniana, y en particular, si la variedad está sumergida en $\mathbb{R}^n$. La posibilidad de poder establecer teoremas de tipo Stokes requiere además de una orientación en la variedad. Comencemos estableciendo un concepto de orientación en espacios vectoriales:

8.1.1. Orientación en espacios vectoriales

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita m. El espacio $\Lambda^m(V)$ de las formas exteriores de grado m constituye un espacio vectorial de dimensión la unidad. Una *forma de volumen* en V es un elemento no nulo $\omega \in \Lambda^m(V)$.

Diremos que dos formas de volumen $\omega, \omega' \in \Lambda^m(V) - \{0\}$ definen la misma orientación, y escribimos $\omega \simeq \omega'$ cuando existe $\lambda > 0$ con $\omega' = \lambda\omega$.

Esta es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\Lambda^m(V) - \{0\}$ de las formas de volumen con exactamente dos clases: $(\Lambda^m(V) - \{0\}/\simeq) = \{\mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2\}$.Sea $\mathcal{O}^+ : \Lambda^m(V) - \{0\} \to (\Lambda^m(V) - \{0\}/\simeq)$ la proyección canónica

Definición *Una orientación para V es un elemento $\mathcal{O}^+ \in \Lambda^m(V) - \{0\}/\simeq$*

Podemos hacer otro planteamiento equivalente: Si $E = (E_1, \ldots, E_m)$ es base de V,y $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ es su base dual, entonces $\omega_E = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^m$ constituye la única forma de volumen tal que $\omega_\varepsilon(E_1, \ldots, E_m) = 1$. Si $E' = (E'_1, \ldots, E'_m)$ es otra base con $E' = E\ P$, y $P = (p^i_j)$ se verifica $\omega_{E'} = (\det\ P)\omega_E$ es decir, $\det\ P = \omega_E(E')$.

Las bases E y E' se dice que *definen la misma orientación*, y escribimos $E \simeq E'$, si $\omega_E(E') > 0$. Esta es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{E}$ de las bases de V, e induce sobre $\mathcal{E}$, conjunto de bases de V una partición con exactamente dos clases: $(\mathcal{E}/\simeq) = \{\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2\}$. Sea $\mathcal{E}^+ : \mathcal{E} \to (\mathcal{E}/\simeq)$ la proyección canónica

Bases positivas *Una orientación para V puede entenderse también como un elemento $\mathcal{E}^+ \in (\mathcal{E}/\simeq)$. Los elementos de $\mathcal{E}^+$ serán entonces las bases positivas.*

Por otra parte, una forma de volumen ω induce sobre el conjunto $\mathcal{E}$ de las bases de V una partición $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+(\omega) \cup \mathcal{E}^-(\omega)$ con: $\mathcal{E}^+(\omega) = \{E \in \mathcal{E} : \omega(E) > 0\}\mathcal{E}^-(\omega) = \{E \in \mathcal{E} : \omega(E) < 0\}$.

Observese que:

(1) Si $E \in \mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}^+(\omega_E) = \mathcal{E}^+(E)$.

(2) $E \in \mathcal{E}^+(\omega) \Longleftrightarrow \omega \simeq \omega_E$, ya que $\omega = \omega(E)\omega_E$

(3) $\mathcal{E}^+(\omega) = \mathcal{E}^+(\omega')$ si y solo si $\omega \simeq \omega'$.

En consecuencia si $E \in \mathcal{E}^+(\omega)$, entonces $\mathcal{E}^+(\omega) = \mathcal{E}^+(E)$ es un elemento de $\mathcal{E}/\simeq$.

Esto permite establecer sin más comentarios la equivalencia entre ambas definiciones de orientación.

Nótese que existe una biyección canónica:

$$(\mathcal{E}/\simeq) \leftrightarrows (\Lambda^m(V) - \{0\}/\simeq)$$

en consecuencia, elegir un elemento de $\mathcal{E}/\simeq$ equivale a elegirlo en $\Lambda^m(V) - \{0\}/\simeq$

8.1.2. Orientación en variedades.

Sea ahora M una variedad diferenciable real de dimensión finita m .

Definición *a) Una forma de volumen en M, es un elemento $\omega \in \Omega^m(M)$ tal que $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in M$.*

b) *Una orientación en M es una asignación $\mathcal{O}^+$ que hace corresponder a cada punto $p \in M$, una orientación $\mathcal{O}^+_p$ en el espacio vectorial T_pM, verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:*

*Para cada $p \in M$, existe un entorno $\mathcal{U}$ de p,*y *una base $(E_1, ..., E_m)$ de campos para $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ de forma que $(E_1(x), ..., E_m(x))$ es base positiva de T_xM para todo $x \in \mathcal{U}$.*

c) *Una variedad se dice orientable, si admite una orientación.*

Evidentemente una forma de volumen ω en M induce una orientación $\mathcal{O}^+(\omega)$ en M de forma que $\mathcal{O}^+(\omega)_p = \mathcal{O}^+(\omega(p))$ para todo $p \in M$. Además si ω' es otra forma de volumen, se verifica $\mathcal{O}^+(\omega) = \mathcal{O}^+(\omega')$ si y solo si existe $f : M \to \mathbb{R}^+$ diferenciable y $\omega' = f\omega$

Recíprocamente, si $\mathcal{O}^+$ es una orientación para M, es posible encontrar una partición diferenciable de la unidad $\{(\mathcal{U}_i, \mu_i) : i \in I\}$,y formas de volumen ω_i en $\mathcal{U}_i$ que induzcan la misma orientación que $\mathcal{O}^+$. Entonces $\omega = \Sigma\mu_i\omega_i$ es una forma de volumen que induce la orientación $\mathcal{O}^+$. Salvo cuestiones de detalle puede considerarse demostrado el siguiente teorema:

La condición de orientabilidad *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *M es orientable.*

ii) *Existe en M una forma de volumen ω.*

iii) Existe un atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i) : i \in I\}$ de M formado por cartas que "definen la misma orientación"

NOTA: Dos cartas $\varphi = (u^1, \ldots, u^m), \overline{\varphi} = (\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m)$ *definen la misma orientación* cuando en la intersección de sus dominios se tiene

$$\det\left(\frac{\partial(u^1, \ldots, u^m)}{\partial(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}_m)}\right) > 0$$

Fijada una orientación $\mathcal{O}$ en M, la carta φ se dice *positiva* si $\omega_\varphi = du^1 \wedge \ldots \wedge du^m$ define en el dominio de φ la orientación $\mathcal{O}^+$.

8.1.3. La forma de volumen riemanniana.

Sea $\mathbb{E} = (V, <,>)$ un espacio vectorial euclideo orientado, y sean $E = (E_1, \ldots, E_m)$, y $E' = (E'_1 \ldots, E'_m) = E\ P$ (con $P = (p^i_j)$) dos bases ortonormales positivas de $\mathbb{E}$. La matriz P es una matriz ortogonal (es decir $P^tP = I$) por lo que det $P = 1$. Así, $\omega_E = (\det P)\,\omega_{E'} = \omega_{E'}$. A la forma de volumen $\omega = \omega_E$ se le denomina volumen canónico de $\mathbb{E}$.

Si $\bar{E} = (\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m) = EA$ es una base cualquiera positiva de $\mathbb{E}$, denotando por G a la matriz $(g_{ij} =< \bar{E}_i, \bar{E}_j >)$, se verifica $G = A^t A$, y $\sqrt{\det G} = \det A$. Así:

$$\omega = \omega(\bar{E})\omega_{\bar{E}} = (\det\ A)\omega_{\bar{E}} = \sqrt{\det G}\bar{\varepsilon}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\varepsilon}_m$$

Así para variedades Riemannianas se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8.1 *Sea M una variedad Riemanniana orientada. Existe entonces una única forma de volumen ω compatible con la orientación, tal que en cada punto $p \in M$, $\omega(p)(e_1, ..., e_m) = 1$ para toda base ortonormal positiva de T_pM. Por otra parte, si $\varphi = (u^1, ..., u^m)$ es una carta positiva de M,y $G = (g_{ij})$ es la matriz de la métrica, entonces:*

$$\omega = \sqrt{\det G} du^1 \wedge \ldots \wedge du^m$$

8.2. TEORÍA DE INTEGRACIÓN DE m-FORMAS.

Supondremos ya conocida la teoría de integración de Riemann en $\mathbb{R}^m$ para funciones con soporte compacto. Se entiende que una función f definida en un dominio abierto $\mathbb{U}$de $\mathbb{R}^m$ con valores reales se dirá integrable si admite integral finita en cada compacto de $C \subset \mathbb{U}$. Es decir, si χ_C es la función carcaterística de C, debe existir

$$\int_C f = \int f\chi_C \in \mathbb{R}$$

Denotamos por $\mathfrak{F}_{int}(\mathbb{U})$ el anillo de las funciones integrables en $\mathbb{U}$.

Un subconjunto A acotado de $\mathbb{R}^m$ se dice medible, si la función característica χ_A es integrable, y en éste caso para una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrable se define la *integral de* f en A $\int_A f = \int_{\mathbb{R}^m} .\chi_A$.

Recordemos el siguiente:

8.2.1. Teorema del cambio de variable en $\mathbb{R}^m$

Sea $f : \mathbb{R}^m \supset \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una función integrable con soporte compacto contenido en el abierto $\mathbb{U}$, y sea $\phi : \mathbb{R}^m \supset \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ un difeomorfismo con ecuaciones $v^i = \phi_i(u^1, \ldots, u^m)$. Sea

$$J(\phi) = \det\left(\frac{\partial(v^1, \ldots, v^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^m)}\right)$$

Si $J(\phi) > 0$ entonces

$$\int_{\phi(\mathbb{U})} f = \int_{\mathbb{U}} (f \circ \phi)J(P)$$

Una función $f : M \to \mathbb{R}$ con soporte compacto se dirá *integrable*, si para cada $p \in M$ es integrable la función $f \circ \varphi^{-1}$ para cada (alguna) carta φ cuyo dominio contenga a p. Si ω es una forma de volumen en M,la m -forma $\vartheta = f\omega$ se llamará entonces *integrable*.

Nótese que en el concepto de m -forma integrable, no depende de la forma de volumen ω elegida.

8.2.2. Integral de una m -forma en una variedad

Sea ϑ una m -forma integrable con soporte compacto en la variedad orientable M. Se trata de definir $\int_M \vartheta$. Procedamos por pasos:

1) Supóngase que *sop* $\vartheta \subseteq \mathcal{U}$ siendo $\mathcal{U}$ dominio de una carta positiva φ. se define entonces: $\int_M \vartheta = \int_{\varphi(\mathcal{U})} (\varphi^{-1})^* \vartheta$. Si $\overline{\varphi}$ es otra carta positiva con dominio $\overline{\mathcal{U}} \supseteq$ *sop* ϑ, usando el teorema del cambio de variable en $\mathbb{R}^m$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}})} (\overline{\varphi}^{-1})^* \vartheta &= \int_{\overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})} (\overline{\varphi}^{-1})^* \vartheta = \int_{\varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})} (\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\overline{\varphi}^{-1})^* \vartheta \\ &= \int_{\varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})} (\overline{\varphi}^{-1} \overline{\varphi} \circ \varphi^{-1})^* \vartheta = \int_{\varphi(\overline{\mathcal{U}})} (\varphi^{-1})^* \vartheta \end{aligned}$$

y así el valor de la integral no depende de la carta positiva elegida, y dentro de ella son válidas las propiedades de aditividad de la integral.

2) En el caso general, puede probarse fácilmente usando particiones diferenciables de la unidad, el siguiente:

8.2.3. Lema

Sea M variedad orientada y K compacto de M. Existe entonces un abierto $\mathcal{U} \supset K$ una función diferenciable con soporte compacto $\mu : M \to \mathbb{R}$ tal que $\mu \geq 0$, y $\mu \equiv 1$ en $\mathcal{U}$. Admás podemos suponer que $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_r$ siendo cada μ_k función diferenciable, $\mu_k \geq 0$, cuyo soporte (compacto) está incluido en una carta positiva.

Demostración:

Sea $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ una partición diferenciable de la unidad, sobordinada a un atlas de la variedad M. Podemos suponer, por tanto que cada $\mathcal{U}_a$ es dominio de una carta.Para cada $p \in K$ sea $\mathcal{U}^p$ un entorno abierto de p, tal que el conjunto $A_p = \{a \in A : \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}^p \neq \emptyset\}$ es finito.Como K es compacto, podemos suponer $K \subset \mathcal{U}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}^{p_s}$. El conjunto $B = A_{p_1} \cup \ldots \cup A_{p_s}$ es finito, y verifica la propiedad de que

$$\alpha \notin B \Longrightarrow \mathcal{U}_a \cap (\mathcal{U}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}^{p_s}) = \emptyset \supseteq \mathcal{U}_a \cap K \Longrightarrow \mu_a | K = 0$$

así la función $\mu = \sum_{b \in B} \mu_b$, verifica para cada $x \in K$:

$$1 = \sum_{a \in A} \mu_a(x) = \sum_{b \in B} \mu_b(x) = \mu(x)$$

■

Como sop ϑ es compacto, aplicando el lema se tiene la descomposición $\vartheta = \Sigma \mu_i \vartheta$, y cada $\vartheta_i = \mu_i \vartheta$ tiene soporte contenido en una carta orientada. Definamos pues:

$$\int_M \vartheta = \sum_{i=1}^{r} \int_M \vartheta_i$$

. Es necesario ahora probar que si $\vartheta = \bar{\vartheta}_1 + \ldots + \bar{\vartheta}_s$ es otra descomposición de ϑ en suma de m -formas con soportes contenidos en cartas positivas, entonces:

$$\sum_{i=1}^{r} \int_M \vartheta_i = \sum_{j=1}^{s} \int_M \bar{\vartheta}_j$$

En efecto: Si K es el compacto unión de todos los soportes de ϑ_i, y de $\bar{\vartheta}_j$, sean $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ las funcines resultantes de aplicar el lema a K. Las m -formas $\mu_k \vartheta_i, \mu_k \bar{\vartheta}_j$ tienen soporte compacto, contenido en una misma carta positiva, y son por tanto válidas las igualdades:

$$\sum_{i=r}^{r} \int_M \vartheta_i = \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_M \mu_k \vartheta_i \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{r} \int_M \mu_k \vartheta_i \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_M \mu_k \vartheta = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{s} \int_M \mu_k \bar{\vartheta}_j \right] = \ldots = \sum_{j=1}^{s} \int_M \bar{\vartheta}_j$$

8.3. INTEGRACION DE FUNCIONES EN VARIEDADES .

Supóngase definida en la variedad M, una forma de volumen ω. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función integrable con soporte compacto, se define la integral de f en M como la integral en M de la forma $f\omega$, es decir: $\int_M f\ \omega$.

Si A es un conjunto medible se llama volumen de A,a la integral $\int_M \chi_A \omega$,y se denomina i*ntegral de* f *en* A :

$$\int_A f\ \omega = \int_M f.\chi_A\ \omega$$

La integral de funciones en M verifica todas las propiedades usuales de aditividad, así como el siguiente teorema del cambio de variable:

8.3.1. Cambio de variable

Sean M, y N *variedades con volumen* ω_M y ω_N *respectivamente, y sea* $\phi : M \to N$ *un difeomorfismo. Si* $f : N \to \mathbb{R}$ *es una función integrable con soporte compacto,* y A *es un conjunto medible de* M *entonces:*

$$\int_{\phi(A)} f\omega_N = \int (f \circ \phi)\ \det(\phi)\ \omega_M$$

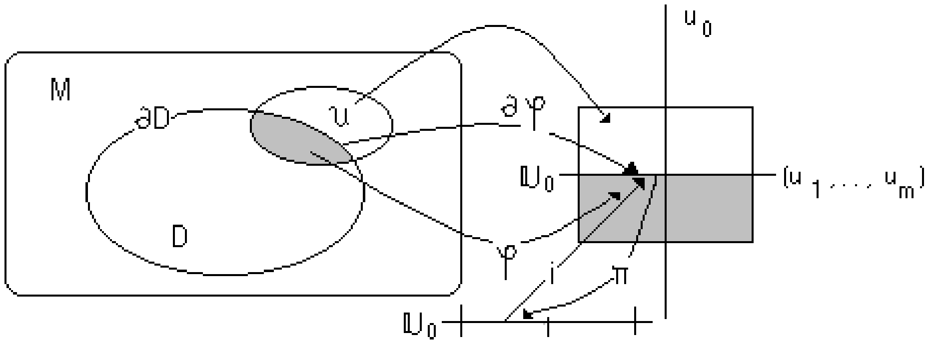
siendo $\det(\phi)$ *la función de* M *en* $\mathbb{R}$ *definida por:* $\phi^*(\omega_N) = \det(\phi)\omega_M$.

8.4. TEOREMAS DE STOKES EN VARIEDADES.

En lo sucesivo M será una variedad diferenciable con dimensión finita $m+1$, conexa y orientada por una forma de volumen ω.

8.4.1. Dominios regulares.

Cartas adaptadas *Un dominio regular* es un subconjunto D de M que cerrado con interior $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, cuya frontera ∂D verifica la siguiente propiedad: para todo punto $p \in \partial D$ existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ positiva de M, con $\varphi = (u^0, \ldots, u^m), p \in \mathcal{U}, \varphi(\mathcal{U}) = (-a, a) \times \mathbb{U}_0$ y tal que $\varphi(\mathcal{U} \cap D) = (-a, 0] \times \mathbb{U}_0$. . Se dice entonces que $(\mathcal{U}, \varphi)$ es *una carta de* M *adaptada a* D. La aplicación $\partial\varphi = (u^1, \ldots, u^m) : \mathcal{U} \cap \partial D \to \mathbb{U}_0$ define una carta sobre ∂D, y el conjunto de dichas cartas proporciona un atlas que da estructura a ∂D de hipersuperficie de M (ver 3.6.5).



Obsérvese que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}(\partial D)\cap\mathcal{U} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial\varphi"'] & \mathcal{U} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{U}_0 \arrow[r, "j"'] & (-a,a)\times\mathbb{U}_0\end{tikzcd}$$

donde j denota las inclusiones canónicas. Esto prueba, que la aplicación $j : \partial D \to M$, es diferenciable, y $dj(p) : T_p\partial D \hookrightarrow T_pM$ es aplicación lineal inyectiva (canónica), que permite considerar a $T_p\partial D$ como hiperplano vectorial de T_pM.

También se llaman *cartas de M adaptadas* a D, aquellas cuyo dominio (conexo) está contenido en $\mathring{D}$ (*interiores* a D) o en el complementario de D (*exteriores a* D).Por razones de tipo técnico (para la demostración del teorema de Stokes), cuando M tiene una orientación, usaremos solo cartas adaptadas positivas $(\mathcal{U}, \varphi = (u^0, \ldots, u^m))$, donde $\varphi(\mathcal{U}) \subset [-1,1]^{m+1}$ y si:

- Si $\mathcal{U}$ es interior a D se supondrá $\varphi(\mathcal{U}) \subset [-1,0] \times [-1,1]^m$
- Si $\mathcal{U}$ es exterior a D se supondrá $\varphi(\mathcal{U}) \subset [0,1] \times [-1,1]^m$

Nótese que con la definición que hemos adoptado, se verifica que para cada $p \in M$, existe $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta adaptada a D con $p \in \mathcal{U}$, y con estos dominios $\mathcal{U}$ puede construirse una base de entornos de p. Es fácil probar entonces el siguiente resultado:

Proposición 8.2 *Si D es un dominio regular de la variedad diferenciable M, existe entonces una partición diferenciable de la unidad $\{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ formada por dominios $\mathcal{U}_a$ de cartas adaptadas.*

Vectores entrantes y salientes. Si $p \in \partial D$, entonces $T_pM - T_p\partial D$, tiene dos componentes conexas. El vector $\left(\partial/\partial u^0\right)_p$ de la carta adaptada por p a D, define una componente que se denomina de vectores *salientes*. Los vectores de la otra componente, se denominan *entrantes*. El concepto de vector entrante o saliente, no depende de la carta adaptada a D ,y puede establecerse mediante el siguiente criterio geométrico:

Un vector $\xi \in T_pM - T_p\partial D$ es saliente si para toda curva diferenciable $\gamma : I \to M$ por p tal que $\gamma'(0) = \xi$ se verifica que existe $\varepsilon > 0$, tal que $\gamma(t) \in M - D$ para $0 < t < \varepsilon$.

Demostración:

Si $\xi = \sum_{i=0}^m \xi_i \left(\partial/\partial u^i\right)_p$ es saliente, entonces $\xi_0 > 0$, de forma que para $\gamma : I \to \mathcal{U}$ con $\gamma'(0) = \xi$, se verifica que $(u^0 \circ \gamma)'(0) = \xi_0 > 0$. Así por análisis elemental, podemos suponer que para cierto $\varepsilon > 0$, la función $u^0 \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, y $u^0 \circ \gamma(t) > u^0 \circ \gamma(0) = 0$ (y en particular $\gamma(t) \notin D$) para $0 < t < \varepsilon$. Recíprocamente, si $\xi_0 < 0$, entonces para cualquier curva $\gamma : I \to \mathcal{U}$ con $\gamma'(0) = \xi$ no existe tal ε, (ya que la curva $u^0 \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente a partir de cierto $\varepsilon > 0$) y si $\xi_0 = 0$, la curva $\gamma : I \to \mathcal{U}$ con $\gamma'(0) = \xi$ y $(u^0 \circ \gamma)(t) = 0$ $\forall t$, está contenida en $\partial D \subset D$.. ■

Hay un resultado análogo para vectores entrantes.

La orientación establecida para ∂D responde entonces al siguiente criterio: Si $e_0 \in T_pM - T_p\partial D$ es un vector saliente, una base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $T_p\partial D$ es positiva, si $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ es base positiva de M. De esta forma un vector v será saliente si y solo si $\omega(v, e_1, \ldots, e_m) > 0$.

De hecho, usando particiones diferenciables de la unidad, puede probarse que existe un campo $\nu \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\nu(p)$ es vector saliente en cada $p \in \partial D$. La forma de volumen que orienta ∂D es entonces, si $j : \partial D \to M$ es la inclusión:

$$j^*(i_\nu \omega)$$

Ejemplos **(1)** *Considerese una función $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, diferenciable con $N = F^{-1}(0) \neq \emptyset$, y para cada $p \in N$, $dF(p) \neq 0$. Entonces $D = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : F(x) \leq 0\}$ es un dominio regular con frontera $\partial D = N$.*

En efecto, $\partial D \supseteq N$ ya que si $p \in N$, como $F(p) = 0$, y $dF(p) \neq 0$, se concluye que p no es extremo local de F, por tanto cada entorno $\mathbb{U}$ de p tiene puntos x con $F(x) > 0$, y otros con $F(x) < 0$. Así $\mathbb{U} \cap D \neq \emptyset$ y $\mathbb{U} \cap \left(\mathbb{R}^{m+1} - D\right) \neq \emptyset$, con lo que $p \in \partial D$. Recíprocamente, si $F(p) \neq 0$, por razones de continuidad, es $F(x) \neq 0$ para todo x de un entorno $\mathbb{U}$ de p. Así o bien $\mathbb{U} \subset D$ o bien $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{m+1} - D$ por lo que $p \notin \partial D$.

Supóngase $p \in \partial D$, y $\left(\partial F/\partial x^0\right)(p) \neq 0$, por el teorema de la función implícita (ver 2.2.11, y la figura) se concluye que:

a) Existe $\varepsilon > 0$, $\widetilde{\Omega}$ abierto conexo de $\mathbb{R}^m$ tal que $p \in \Omega = (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon) \times \widetilde{\Omega}$

b) Existe una función $\zeta : \widetilde{\Omega} \to (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$(\partial D) \cap \Omega = \left\{ \left(\zeta(x^1, \ldots x^m), x^1, \ldots x^m\right) : (x^1, \ldots x^m) \in \Omega \right\}$$

y $\Omega - ((\partial D) \cap \Omega)$ tiene exactamente dos componentes conexas:

$$\Omega^- = \{(x^0, \ldots x^m) \in \mathbb{V} : x^0 - \zeta(x^1, \ldots x^m) < 0\}$$

$$\Omega^+ = \{(x^0, \ldots x^m) \in \mathbb{V} : x^0 - \zeta(x^1, \ldots x^m) > 0\}$$

como $F(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega^- \cup \Omega^+$. Si por ejemplo es $F(x) < 0$ para $x \in \Omega^-$, restringiendo Ω si fuera necesario podemos suponer que las ecuaciones :

$$\varphi : \begin{cases} u^0 = x^0 - \zeta(x^1, \ldots x^m) \\ u^1 = x^1 \\ \vdots \\ u^m = x^m \end{cases}$$

y definen una carta $\varphi = (u^0, \dots u^m) : \Omega \to \mathbb{U} = (-a, a) \times \mathbb{U}_0$ que por construcción está adaptada a D.

(2) El ejemplo anterior, puede generalizarse sustituyendo $\mathbb{R}^{m+1}$ por una variedad M de dimensión $m+1$:

Si $F : M \to \mathbb{R}$, diferenciable con $N = F^{-1}(0) \neq \emptyset$, y para cada $p \in N$, $dF(p) \neq 0$. Entonces $D = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : F(x) \leq 0\}$ es un dominio regular con frontera $\partial D = N$.

En efecto, si $p \in \partial D$ basta con empezar tomando una carta en torno a p con imagen $\mathbb{R}^{m+1}$.

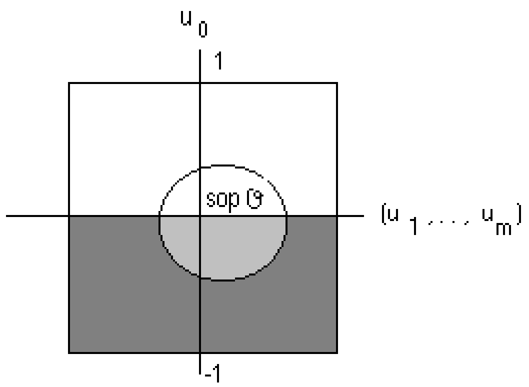
8.4.2. Teorema de Stokes

Sea D un dominio regular de M,y $\vartheta \in \Omega^m(M)$. Si D es compacto o ϑ tiene soporte compacto. Entonces: $\int_D d\vartheta = \int_{\partial D} j^*\vartheta$, donde $j : \partial D \to M$ es la inclusión. En particular, si ∂D o *$sop(\vartheta) \cap \partial D$ es el vacio se tiene: $\int_D d\vartheta = 0$.*

Nota 8.3 *Si D es compacto, por el lema 8.2.3,podemos construir un abierto $\mathcal{U} \supset D$, $\mu \in \mathfrak{F}(M)$ $\mu \geq 0$, $\mu \mid \mathcal{U} = 1$, y sop μ compacto, y es equivalente trabajar con $\mu\vartheta$, cuyo soporte es compacto contenido en sop μ.*
Por otra parte, nótese que $sop(d\vartheta) \subset sop(\vartheta)$, ya que si $x \notin sop(\vartheta)$, existe un entorno $\mathcal{U}^x$ de x, en donde ϑ es identicamente nula, por tanto $d\vartheta = 0$ en $\mathcal{U}^x$, y $x \notin sop(d\vartheta)$.

Probaremos pues el teorema suponiendo que *sop* ϑ compacto. Primero analizaremos algunos particulares

Caso 1 $M = \mathbb{R}^{m+1}$, $D = \mathbb{H}^{m+1} = \{(u^0, \dots, u^m) : u^0 \leq 0\}$, $sop\vartheta \subset [-1, 1]^{m+1}$.



Supóngase para simplificar $m = 2$, y sea $\vartheta = \vartheta_0 du^1 \wedge du^2 - \vartheta_1 du^0 \wedge du^2 + \vartheta_2 du^0 \wedge du^1$, entonces

$$d\vartheta = \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial u^0} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u^1} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u^2} \right) du^0 \wedge du^1 \wedge du^2$$

si el soporte de ϑ está contenido en $Q = [-1, 1]^3$, entonces $sop(d\vartheta) \subset sop(\vartheta) \subset Q$ y se tiene en particular que para $i = 0, 1, 2$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial ui} du^i = \left[\vartheta_i(u^0, u^1, u^2 \right]_{-1}^{1} = 0$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\int_D d\vartheta &= \int_{-1}^{0}\left[\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial u^2}du^2+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial u^0}+\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u^1}\right)du^2\right)du^1\right]du^0 = \\
&= \int_{-1}^{0}\left[\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u^1}du^1+\int_{-1}^{1}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial u^0}du^1\right)du^2\right]du^0 = \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{0}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial u^0}du^0\right)du^1\right]du^2 \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left(\vartheta_0(0,u^1,u^2)-\vartheta_0(-1,u^1,u^2)\right)du^1\right]du^2 \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\vartheta_0(0,u^1,u^2)du^1\right]du^2 = \int_{\partial D} i^*\vartheta
\end{aligned}$$

ya que $j^*\vartheta = \vartheta_0(0,u^1,u^2)du^1$. Nótese por último que si $Sop(\vartheta)\cap\partial Q=\emptyset$, entonces:

$$\vartheta_0(0,u^1,u^2)=\vartheta_0(-1,u^1,u^2)=0 \text{ y } \int_D d\vartheta = 0 = \int_{\partial D} i^*\vartheta$$

Caso 2: sop (ϑ) contenido en una carta adaptada $(\mathcal{U},\varphi=(u^0,\dots,u^m))$.

Sabemos que $sop\left((\varphi^{-1})^*(\vartheta)\right)\subset\varphi(\mathcal{U})\subset[-1,1]^{m+1}$.

Supongamos que $\mathcal{U}\cap\partial D\neq\emptyset$. Como $\varphi(D\cap\mathcal{U})=(-a,0]\times\mathbb{U}_0\subset\mathbb{H}^{m+1}$, podemos aplicar el caso 1 la la forma $(\varphi^{-1})^*(\vartheta)$, quedando:

$$\begin{aligned}
\int_D d\vartheta &= \int_{D\cap\mathcal{U}} d\vartheta = \int_{H^{m+1}\cap\varphi(\mathcal{U})}\left(\varphi^{-1}\right)^*(d\vartheta) = \\
&= \int_{H^{m+1}}\left(\varphi^{-1}\right)^*(d\vartheta) = \int_{\partial H^{m+1}} j^*\left(\varphi^{-1}\right)^*\vartheta = \\
&= \int_{\partial H^{m+1}}\left(\varphi^{-1}\circ j\right)^*\vartheta = \int_{\mathbb{U}_0}\left(\partial\varphi^{-1}\right)^* j^*\vartheta = \\
&= \int_{\mathcal{U}\cap\partial D} j^*\vartheta = \int_{\partial D} j^*\vartheta
\end{aligned}$$

ya que $\varphi\circ j = j\circ\partial\varphi$.

Si $\mathcal{U}\cap\partial D=\emptyset$ entonces si $\mathcal{U}\cap D=\emptyset$ es evidente que $\int_D d\vartheta = 0 = \int_{\partial D} j^*\vartheta$. En el caso $\mathcal{U}\subset\overset{\circ}{D}$, podemos remitirnos al caso 1, (al final) cuando $sop(\varphi^{-1})^*(\vartheta)\cap(\partial Q)=\emptyset$ para concluir que ambas integrales son nulas.

Caso 3: (Caso general) Tomemos $(\mathcal{U}_i,\mu_i)_{i\in I}$ una partición diferenciable de la unidad, tal que cada $\mathcal{U}_i$ es dominio de una carta de M adaptada a D. Como $sop(\vartheta)$ es compacto, existe un conjunto finito $F=\{1,2,\dots,m\}\subseteq I$ tal que $sop(\vartheta)$ está contenido en la unión de los $(\mathcal{U}_i)_{i\in F}$. Si $\vartheta_i=\mu_i\vartheta$ entonces según el epígrafe 8.2.2 teniendo en cuenta que $sop(\vartheta_i)\subseteq\mathcal{U}_i$, $i=1,\dots,m$ se tiene: $\vartheta=\sum_{i=1}^m\vartheta_i$, $d\vartheta=\sum_{i=1}^m d\vartheta_i$, y

$$\begin{aligned}
\int_D d\vartheta &= \textstyle\sum_{i=1}^m\int_D d\vartheta_i = \displaystyle\sum_{i=1}^m\int_{\partial D} j^*\vartheta_i = \\
&= \int_{\partial D}\sum_{i=1}^m j^*\vartheta_i = \int_{\partial D} j^*\vartheta
\end{aligned}$$

8.5. LOS TEOREMAS CLÁSICOS TIPO STOKES.

8.5.1. Integrales de linea

Sea L una subvariedad unidimensional de la variedad riemanniana orientada M. L es necesariamente difeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{S}^1$, por lo que es orientable, y es posible elegir un campo τ tangente a L con $|\tau| = 1$, τ define entonces una orientación en L, respecto a la cual $\tau(u)$ es base ortonormal positiva para todo $u \in L$, y la forma dl de L definida por la condición $dl(\tau) = 1$, define la forma de volumen canónica asociada a la variedad riemanniana L orientada por el vector τ.

Supongamos $\gamma : (a, b) \to \mathcal{U}_L = \mathcal{U} \cap L \subset M$ un difeomorfismo que preserva la orientación. Esto significa que:

$$\gamma'(t) \neq 0 \text{ ,y } \gamma'(t) = \tau(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \ \text{ , } t \in (a, b).$$

y se tiene la identidad

$$j_L \circ \gamma = \gamma$$

Vamos a suponer que γ se "extiende" a $\gamma : [a, b] \to L \subset M$ de forma difenciable y que $L = \gamma(a, b)$ o bién $L = \gamma[a, b]$. Si α es una 1-forma de M entonces $j_L^*\alpha$ es 1-forma de L, y tiene sentido la integral $\int j_L^*\alpha$. Como el soporte de $j_L^*\alpha$ está contenido en una carta orientada $\mathcal{U}_L$ se tiene:

$$\int_L j_L^*\alpha = \int_L \gamma^*(j_L^*\alpha) = \int_a^b (j_L\gamma)^*\alpha = \int_a^b \gamma^*\alpha \tag{24}$$

Por otra parte se tiene:

$$\gamma^*(dl) = |\gamma'(t)| \, dt \tag{25}$$

ya que:

$$\begin{aligned} \gamma^*(dl) &= \left((\gamma^*(dl)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dt = dl \left(d\gamma(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dt = \\ &= dl(\gamma'(t))dt = dl(|\gamma'(t|)\tau)dt = |\gamma'(t)| \, dt \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_L dl = \int_L \gamma^*(dl) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

Sea X es un campo de M, se define la *circulación* de X a lo largo de L como $\int_L < X, \tau > dl$. Se tiene entonces:

$$\int_L < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \gamma'(t) > dt$$

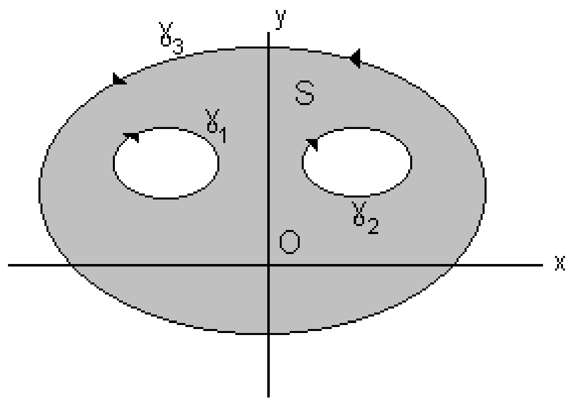
ya que usando (25)

$$\begin{aligned} \int_L &< X, \tau > dl = \int_a^b < X, \tau > \circ\gamma(t)\gamma^*(dl) = \\ &= \int_a^b < X, \tau > \circ\gamma(t) \, |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b < X, \gamma'(t) > dt \end{aligned}$$

8.5.2. Teorema de Green

Sea S un dominio regular de $\mathbb{R}^2$, cuya frontera es unión de curvas $L_i = \gamma_i([a_i, b_i])$ $i = 1, \ldots r$ en donde cada $\gamma_i : [a_i, b_i] \to L_i \subset \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable, $\gamma_i(a_i) = \gamma_i(b_i)$,y $\gamma_i : (a_i, b_i) \to \mathbb{R}^2$ es inmersión inyectiva, y γ_i' da a L_i la orientación inducida. Si $\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, entonces:

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{i=1}^{r} \int_{a_i}^{b_i} \gamma_i^* \alpha$$



Demostración:
Es consecuencia del teorema de Stokes, y la identidad (24).

8.5.3. Operador Rotacional

Sea M variedad Riemanniana tridimensional orientada, y sea $dv = \omega^3$ su forma de volumen canónica.

Cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene canónicamente asociada una 2-forma $\omega_X^2 = i_X(dv)$, y una 1-forma ω_X^1, que es la métricamente equivalente a X (i.e. $\omega_X^1(Y) = < X, Y >$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$).

Las aplicaciones $\mathfrak{X}(M) \ni X \to \in \omega_X^2 \in \Omega^2(M)$, $\mathfrak{X}(M) \ni X \to \omega_X^1 \in \Omega^1(M)$, son isomorfismos $\mathfrak{F}(M)$- lineales, y permiten escribir de forma compacta la acción de los operadores diferenciales clásicos. Así, si $f \in \mathfrak{F}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$\omega_{gradf}^1 = df, \; d\omega_X^1 = \omega_{rot(X)}^2, \; d\omega_X^2 = div(X)\omega^3$$

8.5.4. Cálculo de la circulación

Sea L una subvariedad unidimensional de la variedad riemanniana orientada M como en el epígrafe 8.5.1 y parametrizada como allí por γ. Si X es un campo en M, se tiene la identidad:

$$\int_L j_L^*(\omega_X^1) = \int_L < X, \tau > dl$$

Demostración:

$$\int_L j_L^*(\omega_X^1) = \int_L [j_L^*(\omega_X^1)](\tau)dl = \int_L \omega_X^1(\tau)dl = \int_L < X, \tau > dl$$

8.5.5. Teorema clásico de Stokes.

Sea Σ una superficie orientada de una variedad riemanniana tridimensional M, y *S un dominio regular de Σ con borde $\partial S = L$,* y *$S \cup L$ compacto. Denotamos respectivamente por dv, ds , dl, las formas de volumen canónicas asociadas* a *M, S,* y *L. ν es el vector normal unitario* a *S,*y *τ el tangente unitario a L. ambos compatibles con las orientaciones establecidas. Finalmente sea $\gamma : [a, b] \to L$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$,*y *$\gamma : (a, b) \to M$ parametrizació*n *positiva de L. Si X es un campo en M, entonces se verifica:*

$$\int_S < rotX, \nu > ds = \int_L < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \gamma' > dt$$

Demostración:

Sean j_S, j_L, las correspondientes inclusiones de S y L en M,y $j : L \hookrightarrow S$.

Usando la definición de rotacional, y el Lema de 8.5.5, se tiene:

$$dj_S^*(\omega_X^1) = j_S^*(d(\omega_X^1)) = j_S^*(\omega_{rotX}) = j_S^*[i_{rotX}(dv)] =< rotX, \nu > ds$$

Por tanto:

$$\int_S < rotX, \nu > ds = \int_S dj_S^*(\omega_X^1) = \int_L j^*(j_S^*(\omega_X^1)) = \int (i_S \circ j)^*(\omega_X^1) = \int_L j_L^*(\omega_X^1)$$

Por una parte se tiene usando el resultado de 8.5.4:

$$\int < rotX, \nu > ds = \int_L j_L^*(\omega_X^1) = \int < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \gamma' > dt$$

Flujo de un campo a traves de una superficie Sea S una hipersuperficie orientada compacta de la variedad riemanniana orientada M, con vector normal unitario ν. Si dv es la forma de volumen canónica en M inducida por la métrica, es fácil probar que la forma de volumen ds en S, está relacionada con dv por la igualdad:

$$j_S^*(i_\nu(dv)) = ds$$

siendo $j_S : S \to M$ la inclusión canónica.

Se denomina flujo de un campo X sobre S, a la integral:

$$\int_S < X, \nu > ds$$

Nota 8.4 *El teorema clasico de Stokes, puede ahora parafrasearse así :*
El flujo del rotacional de un campo sobre una dominio superficial compacto, coincide con la circulación del campo a lo largo de su borde

Lema *Con las anteriores hipótesis se verifica* $j_S^*(i_X dv) =< X, \nu > ds$.

Demostración:

Para cada $u \in S$ se tiene $X(u) =< X(u), \nu(u) > \nu(u) + Y(u)$, donde Y es un campo tangente a S. Fijados $X_1, .., X_m \in T_x S$, como $(Y(x), X_1, .., X_m)$ es linealmente dependiente $dv(Y(x), X_1, .., X_m) = 0$ por tanto:

$$\begin{aligned}(dv)(X(x), X_1, .., X_m) &= < X(x), \nu(x) > [(dv)(\nu(x), X_1, .., X_m)] \\ &= < X(x), \nu(x) > [(i_\nu dv)(X_1, .., X_m)] \\ &= < X(x), \nu(x) > ds((X_1, .., X_m)\end{aligned}$$

8.5.6. Teorema de la divergencia de Gauss.

Operador Divergencia. Se denomina *divergencia* de un campo X de M respecto a una forma de volumen ω (en M) a la única función $div\ X$, que verifica la identidad: $L_X \omega = (div\ X)\omega$.

Sea $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_0, \varepsilon, F)$, un flujo local para X por el punto p de M. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \quad | \quad {}_{t=0}(vol(\mathcal{U}_t)) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\mathcal{U}_0} F_t^*(\omega) - \int_{\mathcal{U}_0} \omega \right) = \\ = \int_{\mathcal{U}_0} \lim_{t \to 0} \frac{F_t^* \omega - \omega}{t} &= \int_{\mathcal{U}_0} div(X)_p \omega.\end{aligned}$$

Es fácil ahora probar la siguiente fórmula que proporciona una definición geométrica de divergencia:

$$(divX)_p = \lim_{vol(\mathcal{U}_0) \to 0} \left(\lim_{t \to 0} \frac{vol(\mathcal{U}_t) - vol(\mathcal{U}_0)}{vol(\mathcal{U}_0)} \right).$$

Teorema de Gauss.

Con las notaciones anteriores, y supuesto que S es el borde de un dominio regular D compacto de M, se verifica:

$$\int_D (divX) dv = \int_S < X, \nu > ds$$

Demostración:

$(div\ X)dv = L_X(dv) = (i_X.d + d.i_X)(dv) = d(i_x(dv))$ con lo que por el teorema de Stokes y el lema anterior se tiene:

$$\int_D (divX) dv = \int_D d(i_x(dv)) = \int_S j_S^*(i_X dv) = \int_S < X, \nu > ds$$

8.6. APLICACIONES.

El Teorema de Stokes constituye una herramienta fundamental para la obtención de algunos de los teoremas más profundos de la Geometría. He aquí una breve lista:

A) El Teorema de los residuos de variable compleja.

B) El teorema de Gauss-Bonnet.

C) El teorema de deRham.

D) El Teorema de dualidad de Poincaré.

E) El teorema del punto fijo de Brauwer ... etc.

Todos estos resultados requieren de cierta elaboración previa que está fuera del alcance de nuestros objetivos. Nuestra pretensión aquí, es establecer algunos resultados geometricamente interesantes, que utilizando el teorema de Stokes no requieran gran elaboración. Por ejemplo:

8.6.1. Sobre el último grupo de cohomología.

Remitimos al lector a la sección 7.3 para recordar la definición del *grupo r-ésimo de Cohomología de De Rham* $H^r(M)$ $(0 \leq r \leq n)$ de una variedad diferenciable compacta abstracta M. Se trata realmente de un espacio vectorial (real) y su dimensión $b_r(M) < \infty$ se denomina *r-ésimo número de Betti* de M. La afirmación $b_r(M) > 0$ indica que hay r-formas α en M que son cerradas $(\mathbf{d}\alpha = 0)$ pero no exactas.

Trivialmente se comprueba que $b_0(M)$ es el número de componentes conexas de M, solo hace falta tener en cuenta que $H^n(M) = Z^n(M)$ y que toda función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ con $\mathbf{d}f = 0$, es localmente constante y por tanto es constante sobre cada componente conexa. Así que si M es conexa, $b_0(M) = 1$

¿Que podemos afirmar del último número de Betti $b_n(M)$ de una variedad M compacta y conexa?

Pues que también es igual a la unidad ($b_n(M) = 1$)

Indicaremos cual es la línea de la demostración de esta afirmación, en la que el teorema de Stokes juega un papel fundamental.

Si M es orientable, podemos definir una forma lineal natural $I : Z^n(M) = \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ con

$$I(\theta) = \int_M \theta$$

Por el teorema de Stokes se concluye que para $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$

$$I(d\alpha) = \int_M \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial M} \alpha = \int_{\varnothing} \alpha = 0$$

y así $B^n(M) \subset \ker I$. Por tanto I induce una aplicación lineal en el cociente $J : H^n(M) = Z^n(M)/B^n(M) \to \mathbb{R}$

$$J(\theta + B^n) = \int_M \theta$$

La demostración se concluye si se prueba que J es isomorfismo lineal.

Por un lado, la aplicación J no es idénticamente nula ya que si ω es forma de volumen en M, entonces

$$J(\omega + B^n) = \int_M \omega$$

pero el volumen de un abierto (en particular el volumen de M) es siempre mayor que cero. Este argumento prueba que $H^n \neq 0$, y que la aplicación $J : H^n \to \mathbb{R}$ es epimorfismo.

Para ver que J es inyectiva es necesario y suficiente probar que $\ker I \subset B^n$ es decir

Teorema. Si ω es una forma de grado máximo de una variedad M conexa orientada y compacta, tal que $\int_M \omega = 0$, entonces ω es exacta.

8.6.2. Sobre las funciones armónicas

Si M es una variedad riemanniana y f es una función diferenciable, se llama *Laplaciano* de f a la función.

$$\Delta f = div(grad(f))$$

La función f se dice *armónica,* si su Laplaciano es cero es nulo.

Teorema

Sea D un dominio regular con frontera $S = \partial D$ de una variedad riemanniana orientada M, y *sea $\mathcal{U}$ abierto que contiene* a $D \cup S$,y $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ *una función armónica con soporte compacto. Entonces, si $S = \emptyset$, f es necesariamente constante en D. Si $S \neq \emptyset$,* y $f \mid S = 0$, *se concluye que* $f \mid D = 0$.

Demostración:

Como $div(fgrad(f)) = fdiv(grad(f)) + (gradf)(f) = f\Delta f + < gradf, gradf >$y $\Delta f = 0$ se tiene:

$$div(fgrad(f)) = |gradf|^2$$

Usando el teorema de la divergencia, queda

$$\int_D |gradf|^2\, dv = \int_D div(fgrad(f)) = \int_S f < gradf, \nu > ds$$

donde dv, ds, son las formas de volumen canónicas, y ν es el campo exterior normal unitario en S. Si $S = \emptyset$ o $f = 0$ en S, se concluye que

$$\int_D |gradf|^2\, dv = 0$$

en consecuencia, $df = 0$,y f es constante en cada componente conexa de D.

En el caso $S \neq \emptyset$, se deduce por continuidad, $f = 0$

8.6.3. Teorema del punto fijo de Brauwer

Sea $\mathbb{V}$ abierto de $\mathbb{R}^{m+1}$ que contiene a la bola

$$\mathbb{B}^* = \{(u^0, \ldots, u^m) : \Sigma \left(u^i\right)^2 \leq 1\}$$

y sea $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^{m+1}$ diferenciable, con $\phi(\mathbb{B}^*) = \mathbb{B}^*$. Entonces ϕ tiene necesariamente un punto fijo en $\mathbb{B}^*$.

Demostración:

Si ϕ no tuviera un punto fijo en $\mathbb{B}^*$, entonces existe un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ que contiene a $\mathbb{B}^*$, una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, en donde $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}^* = \{(u^0, \ldots, u^m) : \Sigma \left(u^i\right)^2 = 1\}$ tal que $f \mid \mathbb{S} = id$.

La función f se construye de la siguiente forma:

$$f(x) = \{\lambda x + (1 - \lambda)g(x) : \lambda > 0\} \cap \mathbb{S}$$

y esto es contradictorio, por la siguiente:

Sean $(f_0, \ldots, f_m)$ las componentes de f. Como $f \mid \mathbb{S} = id$ se tiene $j_{\mathbb{S}}^* x^i = f_i$ por lo que se verifica la igualdad:

$$\int j_{\mathbb{S}}^*(x^0 dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m) = \int j_{\mathbb{S}}^*(f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_m)$$

aplicando a cada miembro el teorema de Stokes, se concluye:

$$0 < \int_D dx^0 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m) = \int_D df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_m$$

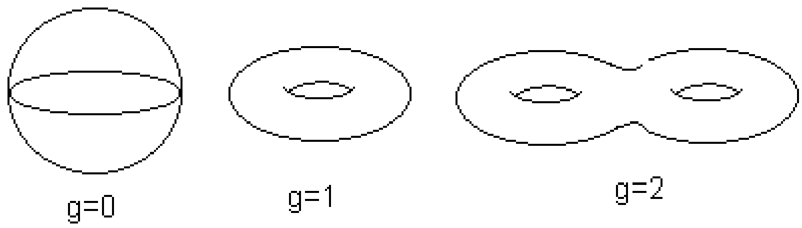
Pero esto es contradictorio, ya que $df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_m = 0$, pues como $im(f) \subseteq \mathbb{S}$, se tiene $df(x) : T_x\mathbb{R}^{m+1} \to T_{f(x)}\mathbb{S}$ tiene rango m y $(df_0, df_1, \ldots, df_m)$ son linealmente dependientes.

9. TEOREMAS DE POINCARÉ-HOPF Y DE GAUSS-BONNET.

Estamos ahora en condiciones de comprender el enunciado de algunos bellos teoremas con nombre propio, que muestran la fuerte relación que existe entre la curvatura y la topología de la superficie.

Conocemos el significado y sabemos calcular la integral de funciones sobre recintos de una superficie M. En el caso de que la superficie sea compacta, es posible definir la integral de una función continua sobre toda la superficie. La integral de la curvatura de Gauss $K : M \to \mathbb{R}$ se denomina curvatura íntegra der M.

Uno de los resultados más profundos y paradigmáticos de la teoría global intrínseca de superficies lo constituye el teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona la *Curvatura Íntegra* de la superficie compacta orientada M con su "género" (topológico) g. El género es un entero que determina de hecho la clase topológica de la superficie, y que intuitivamente cuenta el número de agujeros: La esfera tiene genero cero, el toro uno,...etc.



De hecho se puede probar que el género g coincide con la dimensión del primer grupo de cohomología de deRham de M.

Se llama característica de Euler de la superficie M al número χ_M dado por

$$\chi_M = 2 - 2g$$

La característica de Euler de una superficie puede calcularse en la práctica por alguno de los siguientes métodos:

a) Usando una triangulación cualquiera de la superficie.

b) Calculando su curvatura íntegra

c) Determinando la dimensión del primer grupo de Cohomología de DeRham

d) Usando cualquier campo con ceros aislados.

El método a) es estrictamente topológico. El género se obtiene por medio de una función determinada que depende del número de caras aristas y vértices de la triangulación (ver (43))

El método b) viene avalado por el Teorema de Gauss-Bonnet que establece

$$\int_M K\Omega = 2\pi\chi_M$$

El método d) constituye la versión Poincaré-Hopf del teorema de Gauss-Bonnet, que es lo que nos proponemos desarrollar en esta sección. Como referenca general para esta sección recomendamos [9] Cap 21, y [5] Cap III

9.1. Una revisión de la teoría de superficies[7]

Se trata en esta primera sección, de aproximarse rápidamente al manejo y comprensión de ciertos conceptos relevantes de la Geometría Diferencial de Superficies, que intervienen en el resultado y la demostración del teorema de Poincaré-Hopf. Nos ha parecido aconsejable hacer esta aproximación usando el método de la referencia móvil de Cartan. El motivo, es que este planteamiento utiliza al máximo una supuestamente conocida teoría de formas exteriores y diferencial exterior en superficies, y por otra parte requiere de mínimos recuerdos del curso de anterior. Además permite obtener rápidamente la fórmula (27) de la pág 109. Con ella se demuestra el teorema Egregio de Gauss, y será crucial en el de Poincaré-Hopf.

En lo que sigue M es una superficie sumergida en $\mathbb{R}^3$ y denotamos por $\iota_M : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión canónica. En cada punto $p \in M$, el espacio tangente a M en p, T_pM, se considera sumergido en $T_p\mathbb{R}^3$. No obstante en ocasiones $T_p\mathbb{R}^3$podrá identificarse con $\mathbb{R}^3$ y T_pM con un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$ Las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ serán denotadas por (x, y, z) o $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ indistintamente, y entonces $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ representa la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (dx, dy, dz) su base dual. Observese que $\partial/\partial x^i$ puede interpretarse como campo constante en $\mathbb{R}^3$ de forma que $\left((\partial/\partial x)_p, (\partial/\partial y)_p, (\partial/\partial z)_p\right)$ es base canónica en $T_p\mathbb{R}^3$, y $(dx(p), dy(p), dz(p))$ es su base dual.

Finalmente se denota $\Omega^r(M)$ $(r = 0, 1, 2)$ al espacio de las formas exteriores de grado r sobre M, y

$$\mathcal{F}(M) = \Omega^0(M) = \{f : M \to \mathbb{R}, \text{ diferenciables}\}$$

es el anillo de funciones.

9.1.1. Orientación y volumen

Recordemos que una superficie M en $\mathbb{R}^3$ se dice orientable si admite un campo ν con $\langle\nu, \nu\rangle = 1$, y normal a M, es decir, para todo $p \in M$:

$$T_pM = \left\{\xi \in T_p\mathbb{R}^3 : \langle\nu(p), \xi\rangle = 0\right\}$$

Se denomina a ν campo unitario normal a M, y se determina una orientación en M. Recordemos que si M es conexa admite exactamente dos orientaciones la de ν y la de $-\nu$.

La forma de volumen canónica $\Omega \in \Omega^2(M)$ es

$$\Omega|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \ (\xi, \eta) \to \det(\xi, \eta, \nu)$$

[7]Este sección no es necesaria para aquellos lectores que tengan reciente un curso clásico de Geometría diferencial de curvas y superficies.

El par de vectores (ξ, η) de T_pM es base , si y solo si $\Omega(\xi, \eta) \neq 0$, y si $\Omega(\xi, \eta) > 0$ se dice que es positiva, o está positivamente orientada. De la identidad de Graham:

$$\Omega(\xi, \eta)\,\Omega\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}\right) = \det\begin{pmatrix} \left\langle \xi, \bar{\xi} \right\rangle & \left\langle \xi, \bar{\eta} \right\rangle \\ \left\langle \eta, \bar{\xi} \right\rangle & \left\langle \eta, \bar{\eta} \right\rangle \end{pmatrix} \tag{26}$$

se concluye que en efecto, es la única forma de volumen en M que toma el valor 1 sobre las bases ortonormales positivas.

9.1.2. Angulo orientado

Si $M = (M, \nu)$ es superficie orientada y $\xi, \eta \in T_pM$ son vectores no nulos, por la identidad de Graham (26) se tiene $\Omega(\xi, \eta)^2 = |\xi|^2 |\eta|^2 - \langle \xi, \eta \rangle^2$ y por tanto

$$\left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi|\,|\eta|}, \frac{\Omega(\xi, \eta)}{|\xi|\,|\eta|} \right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

representa un punto de la circunferencia $\mathbb{S}^1$y por tanto un ángulo $\measuredangle(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$ cuyo valor numérico θ está determinado salvo múltiplo de 2π. Se denomina, ángulo orientado definido por ξ, η. Usualmente se tomarán determinaciones θ del ángulo con $-\pi \leq \theta < \pi$.

9.1.3. Forma de conexión y Curvatura de Gauss.

Sea M una superficie orientada, y Ω su forma de volumen canónica. Sea $\mathcal{U}$ un abierto paralelizable de M, y $E \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un campo tangente a M y unitario ($|E| = 1$) .Existe entonces un único campo $E_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ de forma que $(E = E_1, E_2)$ constituye una paralelización ortonormal positiva en $\mathcal{U}$. Este campo E_2 necesariamente único viene definido por $E_2 = \nu \times E_1$

Versión 1. Esta versión va dedicada a los lectores que tengan reciente un curso clásico de Teoría de Superficies sumergidas en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$.

Se tiene:

a)Hay una única 1-forma $\omega_E \in \Omega^1(\mathcal{U})$, que viene caracterizada por la propiedad

$$\nabla_\xi E_1 = \omega_E(\xi)\, E_2$$

para cada vector ξ tangente a M en un punto de $\mathcal{U}$. La forma de conexión puede también caracterizarse por verificar[8]

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_V E_1 = \omega_E(V)\, E_2 \\ \nabla_V E_2 = -\omega_E(V)\, E_1 \end{array}\right\} \forall V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$$

(b) Si $K : M \to \mathbb{R}$ es la función curvatura de Gauss de M entonces se tiene en $\mathcal{U}$

$$d\omega_E = -K\Omega \tag{27}$$

Demostración:

(a) Podemos escribir para cada $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$:

$$X = \langle X, E_1 \rangle E_1 + \langle X, E_2 \rangle E_2 \tag{28}$$

[8]Naturalmente ∇ representa la derivada intrínseca covariante en la superficie.

En particular tomando $X = \nabla_V E_1$ tenemos

$$\nabla_V E_1 = \langle \nabla_V E_1, E_1 \rangle E_1 + \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle E_2$$

pero como $\langle E_1, E_1 \rangle = 1$, es $0 = V(\langle E_1, E_1 \rangle) = 2 \langle \nabla_V E_1, E_1 \rangle$, por lo que $\nabla_V E_1 = \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle E_2$, y podemos tomar

$$\omega_E(V) = \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle$$

y queda

$$\nabla_V E_1 = \omega_E(V) E_2$$

Por otra parte, como $\langle E_1, E_2 \rangle = 0$, es $0 = V(\langle E_1, E_2 \rangle) = \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle + \langle E_1, \nabla_V E_2 \rangle$ y así

$$\nabla_V E_2 = \langle \nabla_V E_2, E_1 \rangle E_1 = -\omega_E(V) E_1$$

(c) Recordemos que la curvatura de Gauss, viene definida por $K = \det \mathcal{L}$, siendo $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ la aplicación de Weingarten. definida por $\mathcal{L}(V) = -\nabla_V \nu$ siendo ν el vector normal a la superficie compatible con la orientación. Tomando en (28) $X = \mathcal{L}(E_i)$ $i = 1, 2$ queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_1) &= \langle \mathcal{L}(E_1), E_1 \rangle E_1 + \langle \mathcal{L}(E_1), E_2 \rangle E_2 \\ \mathcal{L}(E_1) &= \langle \mathcal{L}(E_2), E_1 \rangle E_1 + \langle \mathcal{L}(E_2), E_2 \rangle E_2 \end{aligned}$$

y por tanto:

$$K = \langle \mathcal{L}(E_1), E_1 \rangle \langle \mathcal{L}(E_2), E_2 \rangle - \langle \mathcal{L}(E_1), E_2 \rangle^2$$

Por otra parte puede probarse la identidad

$$-\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 + \nabla_{[E_1, E_2]} E_1 = < \mathcal{L}E_1, E_1 > \mathcal{L}E_2 - < \mathcal{L}E_2, E_1 > \mathcal{L}E_1 \,.$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} d\omega_E(E_1 E_2) &= \\ &= E_1(\omega_E(E_2)) - E_2(\omega_E(E_1)) - \omega_E([E_1, E_2]) \\ &= E_1(\langle \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle) - E_2(\langle \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle) - \left\langle \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \right\rangle \\ &= -\left(\langle \mathcal{L}(E_1), E_1 \rangle \langle \mathcal{L}(E_2), E_2 \rangle - \langle \mathcal{L}(E_1), E_2 \rangle^2 \right) \\ &= -K = -K\Omega(E_1 E_2) \end{aligned}$$

En la cuarta igualdad se ha utilizado la identidad:

$$\nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{E_2} E_1 = [E_1, E_2]$$

y la regla de derivación de Leibnitz.

Versión 2. Otra forma de alcanzar la fórmula (27), para los lectores que no familiarizados con la teoría clásica de superficies es la siguiente. Pongamos $M = \mathcal{U}$.

En lo sucesivo los indices i, j, k varían entre 1, y 2 y los a, b, c entre 1 y 3.

Los campos $(E_1, E_2, E_3 = \nu)$ constituyen lo que se llama una referencia euclídea adaptada a M . Sea $\left(\theta^1, \theta^2\right) \subset \Omega^1(M)$ la base dual de 1-formas asociadas a la (E_1, E_2) paralelización (E_1, E_2) de M, es decir se tiene la identidad:

$$V = \theta^1(V)\, E_1 + \theta^2(V)\, E_2$$

para todo V campo tangente a M. Nótese que $\theta^i(V) = \langle V, E_i \rangle$ para $i = 1, 2$.

Una aplicación diferenciable $V = \left(V^1, V^2, V^3\right) : M \to \mathbb{R}^3$ puede *interpretarse* como un campo *a lo largo* de M, en el sentido de que asocia de forma diferenciable a cada punto p de M el vector $V(p) \in T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ con

$$V = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix}$$

Asociados a V podemos definir las 1-formas ω_V^a en M, con $\omega_V^a(\xi) = \langle dV(\xi), E_a \rangle$ si $\xi \in T_pM$

$$\omega_V^a = \langle dV, E_a \rangle$$

donde se entiende que

$$dV = \left(dV^1, dV^2, dV^3\right) = \Sigma \omega_V^a E_a = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} \omega_V^1 \\ \omega_V^2 \\ \omega_V^3 \end{pmatrix}$$

. En particular tomando $\omega_b^a = \omega_{E_b}^a$ podemos escribir

$$dE = (dE_1, dE_2, dE_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_1^3 & \omega 3 & \omega_3^3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

o más brevemente $dE = E\omega$. En estas condiciones se tiene el siguiente

Lema.

1. La matriz de 1-formas (ω_b^a) es hemisimétrica es decir $\omega_b^a = -\omega_a^b$. En particular, $\omega_a^a = 0$ y (29) se transforma en

$$(dE_1, dE_2, dE_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_E & -\omega_1^3 \\ \omega_E & 0 & -\omega_2^3 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

donde hemos llamado $\omega_E = \omega_1^2$.

2. Si $P : M \to \mathbb{R}^3$ es el campo de posición $P(x) = x$ para todo $x \in M$, entonces se tiene

$$dP = \theta^1 E_1 + \theta^2 E_2 \tag{31}$$

Por otra parte

Las ecuaciones de Maurer-Cartan se obtienen por manipulación formal de (29) y (31) al imponer: $d^2P = 0$, y $d^2E_j = 0$ el resultado es el siguiente:

Lema.

$$\begin{array}{c} d\theta^i + \sum \omega_j^i \wedge \theta^j = 0 \\ d\omega_j^i + \sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0 \end{array} \tag{32}$$

Como (θ^1, θ^2) es una base de 1-formas en M podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

para ciertas funciones $l_{ij} : S \to \mathbb{R}$ diferenciables

La segunda de las ecuaciones (32), da ahora para $i = 1$, $j = 2$:

$$d\omega_E = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = -K\theta^1 \wedge \theta^2 \tag{34}$$

donde $K = \det(l_{ij})$ es independiente de la referencia 1-adaptada, y $K : M \to \mathbb{R}$ es la llamada curvatura de Gauss que solo depende M.. De hecho (l_{ij}) es la matriz, de la aplicación lineal (llamada aplicación de Weingarten) $-\left. d\nu\right|_p : T_pM \to T_pM \subset T_p\mathbb{R}^3$ en la base $.\left.(E_1, E_2)\right|_p$

En efecto, para $\xi \in T_pM$, se tiene usando (30)

$$\begin{aligned} -\left. d\nu\right|_p (\xi) &= -dE_3(\xi) = \left.(E_1, E_2)\right|_p \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix}_\xi \\ &= \left.(E_1, E_2)\right|_p \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}_\xi \end{aligned}$$

Observese que un cambio de orientación de ν a $-\nu$ cambia (l_{ij}) por $(-l_{ij})$ pero no afecta al valor de K.

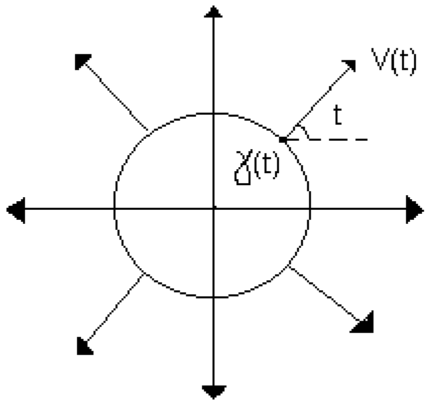
9.2. El Teorema de Poincaré-Hopf

Ya es bastante sorprendente constatar que la integral de la curvatura de Gauss sobre una superficie compacta *cualquiera* es necesariamente un múltiplo entero de 2π, digamos $2\pi\chi$. Pero sorprende aún más constatar que el entero χ -llamado característica de Euler- depende solamente de la topología de la superficie. Es más, caracteriza su topología. En este apartado, trataremos de acercarnos suavemente y con las herramientas de la geometría diferencial a este fascinante festival Geométrico-Topológico. ¡Comienza el espectáculo

9.2.1. Indice de un campo en un cero aislado

Ejemplos previos Intuitivamente el índice de un campo en un cero aislado, es el número (con signo) de vueltas que da el vector del campo, al restringirlo a una pequeña curva simple (recorrida en el sentido *positivo*) que rodea el punto. Para despertar nuestra intuición sobre el concepto de índice, presentaremos algunos ejemplos significativos en el plano $\mathbb{R}^2$.

A) Por ejemplo consideremos el campo $V = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ de $\mathbb{R}^2$, que tiene un cero aislado en $o = (0, 0)$. Sobre la circunferencia γ, de ecuaciones $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ el campo V toma *valores* $\overrightarrow{V(\gamma(t))} = (\cos t, \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$. Así, $\theta(t) = t$ determina el ángulo que va formando $\overrightarrow{V(\gamma(t))}$ con el eje de las x, y se ve por tanto que el campo V da una sola vuelta (en el mismo sentido que γ) alrededor del origen. Por esto se dice que su indice es igual a $+1$.



Debemos observar que el índice no depende de la parametrización positiva γ de la circunferencia, y ni siquiera de la curva γ simple elegida que rodee el origen

B) Variaciones del ejemplo A) pueden obtenerse *girando* el campo V del ejemplo, un ángulo constante σ es decir, tomando

$$V_\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

todos ellos tienen índice $+1$ en el origen. Como caso particular, tenemos $V_{\pi/2} = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$

C) consideremos ahora el campo

$$V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Una buena forma de visualizar la dirección y el sentido del campo en cada punto, consiste en dibujar sus curvas integrales. En general, las curvas integrales de $V = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ son aquellas $\gamma = \gamma(t)$ tales que

$$V(\gamma(t)) = \gamma'(t) \text{ para todo } t$$

es decir deberán satisfacer las eucaciones diferenciales $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(x,y) \\ dy/dt &= B(x,y) \end{aligned}$$

En el caso particular que nos ocupa tenemos

$$\begin{aligned} dx/dt &= x \\ dy/dt &= -y \end{aligned}$$

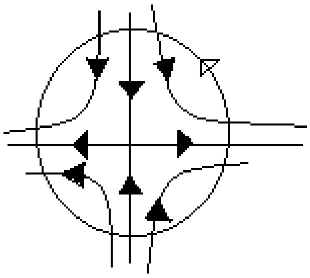
cuya solución general, viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x^0 e^{t-t_0} \\ y(t) &= y^0 e^{-(t-t_0)} \end{aligned}$$

cuya ecuación implícita viene dada por

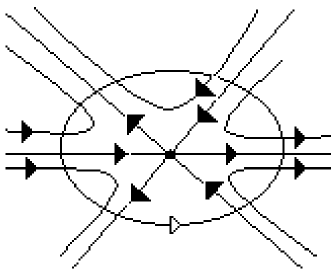
$$xy = cte$$

una idea del flujo de curvas integrales es:



El lector debería ser capaz de explicar ahora porqué el indice en el origen de este campo es igual a -1.

D) Se pueden dar ejemplos gráficos de campos con índice negativo arbitrario. Por ejemplo, el campo cuyas curvas integrales se sugieren en el siguiente dibujo:



debería tener índice -2 en torno al origen.

Proponemos al lector la generalización de este ejemplo, y la construcción gráfica de campos con índice entero positivo arbitrariamente alto.

Hipótesis de trabajo $M = (M, \nu)$ es una superficie orientada, y $\gamma : I = [a, b] \to M$ una curva diferenciable. U es campo unitario tangente definido en un entorno de $im\,(\gamma)$, supongase definida en un entorno de $im(\gamma)$ una paralelización ortonormal positiva $(E = E_1, E_2)$. Por último, ω_E, ω_U denotan las formas de conexión de E y U definidas en sus correspondientes dominios.

Recordemos que la curva revertida de γ es la curva $\sim \gamma : [a, b] \to M$ definida por

$$(\sim \gamma)\,(t) = \gamma(-t + b + a)$$

que tiene la misma imagen recorrida en sentido inverso.

Determinación diferenciable del ángulo (DDA) Sean $M, \gamma, (E = E_1, E_2)$, U, como en 9.2.1

Una determinación diferenciable del ángulo (DDA) $\measuredangle\,(E_1, U \circ \gamma)$ es una aplicación diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$U \circ \gamma = (\cos\theta)\,(E_1 \circ \gamma) + (\sin\theta)\,(E_2 \circ \gamma)$$

Si θ y $\bar{\theta}$ son DDA $\measuredangle(E_1, U \circ \gamma)$ entonces la diferencia $\bar{\theta} - \theta : I \to \mathbb{R}$ es una función continua que toma valores sobre $2\pi\mathbb{Z}$, y es (ya que I es conexo), constante de la forma $2\pi k, \in k \in \mathbb{Z}$. Esto prueba que todas las DDA se obtienen sumandole a una dada un múltiplo entero de 2π.

Probemos que existen DDA. Supongamos $I = [a, b]$, entonces obviamente se tiene:

1) Para todo $t_0 \in I$, existe un $\varepsilon > 0$ y $\theta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I \to \mathbb{R}$ que es DDA.

Por otra parte, usando la compacidad de I, se tiene que

2) Existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ y funciones $\bar{\theta}_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ que son DDA.

Finalmente la demostración se concluye así

Pongamos $\bar{\theta}_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $\bar{\theta}_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ entonces $\bar{\theta}_2(t_1) - \bar{\theta}_1(t_1) = 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$, y se construye $\theta_2 : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}$, DDA de la forma:

$$\theta_2(t) = \begin{cases} \bar{\theta}_1(t) \text{ si } t \in [t_0, t_1] \\ \bar{\theta}_2(t) - 2n\pi \text{ si } t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

Tenemos así definida paso a paso $\theta_r : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es DDA.

La DDA y las formas de conexión Sean M, γ, $(E = E_1, E_2)$, U, ω_U, ω_E, como en 9.2.1 . Para cualquier DDA $\theta : I \to \mathbb{R}$ de $\measuredangle(E, U \circ \gamma)$ se tiene

$$\theta' = \omega_U(\gamma') - \omega_E(\gamma') \tag{35}$$

Demostración

Identificando $U = U(t) = (U \circ \gamma)(t)$, $E_a = E_a(t) = (E_a \circ \gamma)(t)$, se tiene

$$U = (\cos\theta) E_1 + (\sin\theta) E_2 \tag{36}$$

y por tanto

$$U^{\perp} = -(\sin\theta) E_1 + (\cos\theta) E_2 \tag{37}$$

Calculando dU/dt teniendo en cuenta las identidades (**??**) y (37) queda

$$\frac{dU}{dt} = \omega_U(\gamma') U^{\perp} + ()\,\nu = \omega_U(\gamma')\left(-(\sin\theta) E_1 + (\cos\theta) E_2\right) + ()\,\nu \tag{38}$$

donde el primer sumando es tangente a M, y se ha denotado por $()\,\nu$ la parte proporcional a ν.

Calculando ahora dU/dt usando(36) queda

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \theta'\left(-(\sin\theta) E_1 + (\cos\theta) E_2\right) + \\ &\quad + (\cos\theta)\,\omega_E(\gamma') E_2 - (\sin\theta)\,\omega_E(\gamma') E_1 + ()\,\nu \\ &= -\sin\theta\left(\theta' + \omega_E(\gamma')\right) E_1 + \cos\theta\left(\theta' + \omega_E(\gamma')\right) E_2 + ()\,\nu \end{aligned} \tag{39}$$

comparando las partes tangentes (38) y (39) se obtiene (35)

Indice (relativo) en torno a un lazo Sean M, γ, $(E = E_1, E_2)$, U, como en 9.2.1, suponiendo que $\gamma : [a, b] \to M$ es un lazo (es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$) es claro que $\theta(b) - \theta(a)$ es un múltiplo entero de 2π, que no depende de la DDA tomada. Se define indice de U, en torno a γ, y relativo a E al entero

$$Ind(U, \gamma, E) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(b) - \theta(a)\right)$$

Usando la igualdad (35) se concluye que

$$Ind\,(U,\gamma,E) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left(\omega_U\left(\gamma'\right) - \omega_E\left(\gamma'\right)\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left(\omega_U - \omega_E\right) \tag{40}$$

Indice en torno a un lazo elemental Sean M, $(E = E_1, E_2)$, U, como en 9.2.1. y $\gamma : [a,b] \to M$ un lazo. Supongamos ahora que $\Gamma = im\gamma$ es el borde $\partial\mathcal{R}$ de un dominio regular compacto y paralelizable $\mathcal{R} \subset M$; *diremos que γ es un lazo elemental. Si p* es un punto que está en el interior de $\mathcal{R}$, se dice que γ es *es un lazo elemental.en torno al punto p.*Naturalmente se supone que el sentido de recorrido de γ es el positivo, es decir, $\nu \times \gamma'$ es un vector entrante.

En estas circunstancias, *el índice $Ind\,(U,\gamma,E)$ no depende del campo unitario E definido en un entorno de $\mathcal{R}$, y se denomina simplemente $Ind\,(U,\gamma)$, que es el índice de U en torno a γ.*

En efecto:

Si F es otro campo tangente unitario definido en un entorno de $\mathcal{R}$, por la igualdad (27) se concluye que $d\omega_F = d\omega_E = -Kd\Omega$, por lo que

$$d\left(\omega_F - \omega_E\right) = 0$$

Por otra parte, usando la igualdad (40)

$$\begin{aligned}
Ind\,(U,\gamma,E) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left(\omega_U - \omega_E\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_\gamma \left(\omega_U - \omega_F\right) + \int_\gamma \left(\omega_F - \omega_E\right)\right] \\
&= Ind\,(U,\gamma,F)
\end{aligned}$$

ya que por el teorema de Stokes se tiene

$$\int_\gamma \left(\omega_F - \omega_E\right) = \int_{\partial\mathcal{R}} \left(\omega_F - \omega_E\right) = \int_{\mathcal{R}} d\left(\omega_F - \omega_E\right) = 0$$

Naturalmente, si U está definido en un entorno de $\mathcal{R}$ entonces:

$$Ind\,(U,\gamma) = Ind\,(U,\gamma,U) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left(\omega_U - \omega_U\right) = 0$$

Nota 9.1 *Nótese que $Ind\,(U,\gamma)$ no depende de la parametrización y podemos escribir más propiamente* Si Γ

$$Ind(U,\Gamma) = Ind\,(U,\gamma)$$

Indice de un campo en un cero aislado Supondremos ahora que $V \in \mathfrak{X}\,(M)$ es un campo tangente y $p \in M$ es un cero aislado de V, es decir, $V(p) = 0$, y hay un entorno $\mathcal{V}$ de p en M tal que $V(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{V}$.

Denotamos por U al campo unitario definido en $\mathcal{U} - \{p\}$

$$U = \frac{V}{|V|}$$

Podemos imaginar un $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ que es la imagen de una parametrización local *positiva* $P = P\,(u,v)$, , con $P : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$,, y $P\,(0,0) = p$.

Para cada $r > 0$ denotamos por D_r al disco cerrado de radio r centrado en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y $C_r = \partial D_r$ es la circunferencia borde. Sea $R > 0$, tal que $D_R \subset \mathbb{U}$. Finalmente para $0 < r \leq R$ se considera el lazo elemental en torno a p

$$\gamma_r(t) = P\left(r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t\right), \ 0 \leq t \leq 1$$

Realmente la imagen de γ_r es $\Gamma_r = P\left(C_r\right)$ que es el borde del dominio regular $\mathcal{R}_r = P\left(D_r\right)$

Si Γ es un lazo elemental en torno a p, llamamos indice de V en p respecto a Γ a $Ind\left(U,\Gamma\right)$ es decir:

$$Ind\left(V,\Gamma\right) = Ind\left(U,\Gamma\right)$$

El resultado fundamental es el siguiente:

Si Γ y $\widetilde{\Gamma}$ son lazos elementales en torno al punto p, entonces

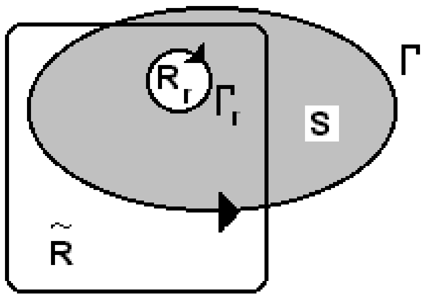
$$Ind\left(V,\Gamma\right) = Ind\left(V,\widetilde{\Gamma}\right)$$

Demostración

Tomemos $r > 0$ suficientement pequño para que

$$\mathcal{R}_r \subset \left(int\mathcal{R}\right) \cap \left(int\widetilde{\mathcal{R}}\right)$$

siendo $\mathcal{R}$ y $\widetilde{\mathcal{R}}$ los correspondientes dominios cuyas fronteras son Γ y $\widetilde{\Gamma}$.



Demostraremos que

$$Ind(V,\Gamma) = Ind(V,\Gamma_r) = Ind\left(V,\widetilde{\Gamma}\right)$$

Probemos la primera igualdad (la segunda se prueba igual). En efecto: fijemos E campo tangente unitario en $\mathcal{R}$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} - int\mathcal{R}_r$$

es un dominio regular con borde orientado

$$\partial\mathcal{S} = \Gamma \cup \left(\backsim \Gamma_r\right)$$

así, usando que $d\omega_E = d\omega_U$ en $\mathcal{S}$, y el teorema de Stokes se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{S}} d\left(\omega_U - \omega_E\right) = \int_{\partial\mathcal{S}} \left(\omega_U - \omega_E\right) = \\ &= \int_{\Gamma} \left(\omega_U - \omega_E\right) - \int_{\Gamma_r} \left(\omega_U - \omega_E\right) = \\ &= Ind(V,\Gamma) - Ind(V,\Gamma_r) \end{aligned}$$

9.2.2. Curvatura integra y Característica de Euler

Veremos que en una superficie orientada y compacta, la integral de la curvatura de Gauss es un múltiplo entero de 2π, digamos $2\pi\chi$, con $\chi \in \mathbb{Z}$. Este entero χ asociado a la superficie , es evidentemente un invariante por isometrías. *El teorema de Poincaré Hopf* demuestra que χ es también la suma de los indices de cualquier campo definido en toda la superficie con ceros aislados. Se denomina a χ caracteristica de Euler-Poincaré y resulta ser también invariante por difeomorfismos.

Indice total de un campo Supóngase ahora la superficie $M = (M, \nu)$ orientada y compacta. Sea V un campo tangente en M que tiene todos sus ceros aislados. Por la compacidad de M, se concluye que el número total de ceros es finito, digamos $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Se define el indice total de V como

$$Ind(V) = \sum_{i=1}^{m} Ind(V, p_i)$$

Observese que como cada sumando es un número entero, entonces $Ind(V)$ es entero.

El campo unitario $U = V/|V|$ está definido en $M - \{p_1, \ldots, p_m\}$. Tomando en torno a cada punto p_i parametrizaciones locales positivas, podemos construir un lazo elemental α_i que describe la frontera orientada de un dominio regular compacto y paralelizable $\mathcal{R}_i$ que contiene en su interior a p_i de forma que

$$Ind(V, p_i) = Ind(U, \alpha_i)$$

Curvatura íntegra Se llama *curvatura íntegra* de la superficie orientada compacta $M = (M, \nu)$ la la integral

$$\int_M K\Omega$$

donde K es su curvatura de Gauss y Ω es su forma de volumen canónica.

Si V, U son como en 9.2.2, podemos organizar el cálculo de la curvatura íntegra de la siguiente forma:

Fijemos un campo unitario E definido sobre un abierto que contiene al dominio regular

$$\mathcal{R} = \cup_{i=1}^{m} \mathcal{R}_i$$

y sea

$$\mathcal{S} = M - \overset{o}{\mathcal{R}}$$

Nótese que $\mathcal{S}$ es también dominio regular, cuya frontera orientada viene determinada por las curvas α_i recorridas en sentido contrario, es decir las $\sim \alpha_i$.

Tenemos así, la forma conexión ω_U definida en un entorno de $\mathcal{S}$, y la ω_E definida en un entorno de $\mathcal{R}$ y se tiene:

$$d\omega_U = -K\Omega \text{ en } \mathcal{S}$$
$$d\omega_E = -K\Omega \text{ en } \mathcal{R}$$

Aplicando en cada región el teorema de Stokes, se tiene:

$$\int_{\mathcal{S}} K\Omega = -\int_{\mathcal{S}} d\omega_U = -\int_{\partial\mathcal{S}} \omega_U = \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} \omega_U$$
$$\int_{\mathcal{R}} K\Omega = -\int_{\mathcal{R}} d\omega_E = -\int_{\partial\mathcal{R}} \omega_E = -\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} \omega_E$$

de manera que

$$\begin{aligned}\int_M K\Omega &= \int_{\mathcal{S}} K\Omega + \int_{\mathcal{R}} K\Omega = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} (\omega_U - \omega_E) = \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^{m} Ind(V, p_i) = 2\pi Ind(V)\end{aligned}$$

Por tanto se tiene:

Teorema de Poincaré-Hopf Sea M es una superficie compacta y orientada con elemento de area Ω y curvatura de Gauss K, y sea V un campo en M con ceros aislados. Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K\Omega = Ind(V) \tag{41}$$

Es decir,

La curvatura integra $\int_M K\Omega$ de la superficie es de la forma $2\pi\chi_M$ donde χ_M es un número entero.asociado a la superficie que verifica la siguiente propiedad geométrica:

Todos los campos tangentes a M con ceros aislados tienen el mismo índice y coincide con χ_M

Característica de Euler *El entero χ_M asociado a un superficie compacta orientable M se denomina característica de Euler de M, y no depende de la orientación.* Por otra parte, si $\bar{M}$ es isométrica a M, entonces $\chi_M = \chi_{\bar{M}}$.

Como el cálculo de la característica de Euler de la superficie M, se limita a determinar el indice de algún campo conocido V con ceros aislados, parece plausible esperar que la característica de Euler sea también invariante por difeomorfismos. Todo depende de la validez de la siguiente

Proposición

Sea $\phi : M \to \bar{M}$, un difeomeorfismo entre superficies, y sea V un campo en M con ceros aislados $\{p_1, \dots, p_m\}$, entonces $\phi_* V$ es un campo en $\bar{M}$ con ceros aislados $\{\phi(p_1), \dots, \phi(p_m)\}$, y se verifica para cada $i = 1, \dots, m$

$$Ind(V, p_i) = Ind(\phi_* V, \phi(p_i))$$

En particular, si M es compacta orientable, $\bar{M}$ también lo es, y $\chi_M = \chi_{\bar{M}}$.

Idea de la Demostración:

Para calcular el índice del campo V en un cero aislado p, debemos recurrir a una parametrización local $P = P(u, v)$, con $P : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ y $U = V/|V|$ definido en $\mathcal{U} - \{p\}$, $P(0,0) = p$. Usando la notación de **??**, y suponiendo que $D_r \subset \mathbb{U}$, $C_r(t) = r(\cos t, \sin t)$, $\alpha_r(t) = P(C_r(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sabemos que

$$Ind(V, p) = Ind(U, \alpha_r) = Ind(U, \alpha_r, E) = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0))$$

donde podemos tomar como campo unitario de referencia

$$E = \frac{\partial/\partial u}{|\partial/\partial u|}$$

y $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una DDA de $\measuredangle(U \circ \alpha_r, E)$

Digamos que esta *operación* podemos efectuarla en $\mathbb{U}$ con la representación analítica de V :

$$V_P = V_P^1 \frac{\partial}{\partial u} + V_P^2 \frac{\partial}{\partial v}$$

y la métrica $\left(g_{ab}^P\right)$dada por la primera forma fundamental

$$g_{ab}^P = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b} \right\rangle$$

y así $\theta(t)$ indica el $\left(g_{ab}^P\right)_{C_r(t)}$-ángulo que determina $V_P\left(C_r(t)\right)$ con el eje de *horizontal* de las u. Definamos la familia

$$g_{ab}^s = (1-s)\, g_{ab}^0 + s\delta_{ab},\ 0 \leq s \leq 1$$

donde (δ_{ab}) denota la matriz identidad (ó métrica euclidea). Puede probarse que (g_{ab}^s) define una *.métrica* respecto a la cual puede determinarse una DDA digamos $\theta^s = \theta^s(t)$ del $(g_{ab}^s)_{C_r(t)}$-ángulo que determina $V_P\left(C_r(t)\right)$ con el eje de *horizontal* de las u, de forma que $\theta^0(t) = \theta(t)$, y la aplicación $(s,t) \to \theta^s(t)$ resulta ser continua. Como

$$\frac{1}{2\pi}\left(\theta^s(2\pi) - \theta^s(0)\right)$$

toma solo valores enteros, se concluye que es una función (de s) constante y así

$$Ind(V,p) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta^1(2\pi) - \theta^1(0)\right) \tag{42}$$

donde $\theta^1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ representa una DDA del *ángulo euclideo* $\measuredangle(V_P \circ C_r, \partial/\partial u)$ en el abierto euclideo $\mathbb{U}$.

La demostración se concluye, teniendo en cuenta que para cada punto p de M, pueden tomarse parametrizaciones $P : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$, $\bar{\varphi} = \phi \circ P : \mathbb{U} \to \phi(\mathcal{U})$ con $P(0,0) = p$, de forma que la representación analítica de V y $\phi_* V$ definen el mismo campo V_P en $\mathbb{U}$. La fórmula (42) no depende más que de V_P (¡ y no de las métricas $\left(g_{ab}^P\right)$ ó $\left(g_{ab}^{\bar{\varphi}}\right)$)

9.2.3. Gauss-Bonnet y Poincaré-Hopf

Recordemos que un *triángulo T en una superficie M* es, por definición, la imagen $P(\triangle) \subset \mathcal{U}$ de un triángulo (rectilíneo) $\Delta \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, siendo P:$\mathbb{U} \to \mathcal{U}$ una parametrización de M.

Se llaman *lados* (respectivamente, *vértices*) de T a las imágenes por P de los lados (respectivamente, vértices) de $\triangle$. Así, el borde ∂T es la unión de tres lados y puede parametrizarse por una curva regular a trozos:

$$\gamma : [t_0, t_3] \to \mathcal{U}\ \ ,$$

cerrada (en el sentido de que $\gamma(t_0) = \gamma(t_3)$) y simple, donde se supone que cada $\gamma_i \equiv \gamma\ |_{[t_{i-1},t_i]}$ $(i = 1,2,3)$ está parametrizada por la longitud de arco, con $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Los puntos $p_i \equiv \gamma(t_i)$ $(i = 1,2,3)$ son los vértices y los segmentos $\gamma_i([t_{i-1}, t_i])$ $(i = 1,2,3\ ;\ p_0 \equiv p_3)$ los lados de T .

Una *triangulación de una superficie compacta M* es una familia finita $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ de triángulos de tal forma que:

(1) $\cup_i T_i = M$

(2) Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces, o bien $T_i \cap T_j$ es un único vértice, o bien es exactamente un lado común (con sus dos vértices incluidos)

Puede probarse que, en estas condiciones, se verifica además la propiedad:

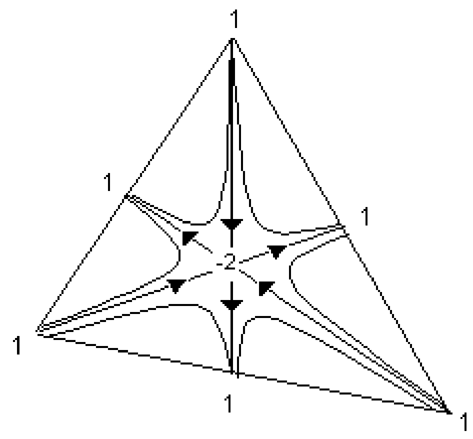
(3) Cada lado de $\mathcal{T}$ es exactamente intersección de dos triángulos distintos de $\mathcal{T}$.

Si n_0 n_1, y $n_2 = n$ denotan respectivamente el número de vértices lados y triánfulos de $\mathcal{T}$, se denomina *característica de Euler de la superficie* M *respecto de la triangulación* $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ al entero:

$$\chi_{\mathcal{T}}(M) := n_0 - n_1 + n_2 \tag{43}$$

Puede demostrarse que todas las triangulaciones $\mathcal{T}$ tienen la misma característica $\chi_{\mathcal{T}}(M) = \chi(M)$. Se denomina característica de Euler de la superficie. Pretendemos dar aquí argumentos intuitivos de plausibilidad de este hecho y de que la característica $\chi(M)$ de M así definida coincide con la definición de χ_M dada en 9.2.2.

Para probar esto indicaremos cómo es posible determinar a partir de una triangulación $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ con ceros aislados, e indice total $\chi_{\mathcal{T}}(M) = n_0 - n_1 + n_2$. A este nivel intuitivo, esperamos que al lector le sea suficiente con el siguiente esquema que muestra el flujo del campo V en un triángulo T arbitrario de la triangulación $\mathcal{T}$. Nótese que los ceros de V en en cada triángulo T son un punto interior del mismo (por ejemplo el baricentro), un punto en cada lado (por ejemplo el centro), y los vértices, . En cada uno de los *ceros* se ha marcado el valor del índice del campo:



según esto, el indice total de V es

$$Ind(V) = -2n_2 + n_1 + n_0 \tag{44}$$

Teniendo en cuenta que en una triangulación, cada lado limita exactamente a dos caras, se concluye que

$$2n_1 = 3n_2$$

lo que permite escribir sumano y restando n_2 en (44), y teniendo en cuenta el teorema de Poincaré-Hopf, (ver (41)) queda:

$$\begin{aligned}
\chi_M &= Ind(V) = -3n_2 + n_2 + n_1 + n_0 = \\
&= -2n_1 + n_2 + n_1 + n_0 = \\
&= -n_1 + n_2 + n_0 = \\
&= \chi_{\mathcal{T}}\,(M)
\end{aligned}$$

Referencias

[1] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of Mechanics Part. I.* The Benjamín/cummings publishing company Inc., 1978.

[2] M. de Guzmán. *Ecuaciones diferenciales Ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Ed. Alhambra, 1980.

[3] F.Brickell and R. Clark. *A comprensive introduction to differential Geometry. (Vol. 1).* Van Nostransd Rehinhold Company London., 1970.

[4] N. Hicks. *Notes on differential geometry.* Van Nostrand Reinholds, 1971.

[5] Hopf. *Introduccion al estudio de superficies.* Ed. Alhambra, 1980.

[6] J. Munkres. *Topology A first course.* Prentice-Hall, 1975.

[7] O'Neil. *Semi-riemannian Geometry with applications to relativity.* Ed. Alhambra, 1983.

[8] M. Spivak. *Differential Geometry. (Vol. one).* Publish or Perish, Inc, 1979.

[9] Thorpe. *Introduccion al estudio de superficies.* Ed. Alhambra, 1980.

[10] F. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Springer Verlag, 1971.

Índice alfabético

[6]
[10]
[1]
[3]
[4]
[7]
[8]
[2]