PROBLEMAS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLIDEO (Grupo B, Curso 11-12)

1. Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 - 2z = 0$, y M el conjunto de los isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^3$ con determinante positivo, que dejan invariante P. Demostrar que M se identifica con un conjunto de matrices del tipo

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

cuyos elementos cumplen ciertas condiciones adicionales, y deducir que $M \subset \mathbb{R}^5$ es una superficie diferenciable.

2. Sean L y L' dos rectas no coplanarias de $\mathbb{R}^3$ y Π un plano que corta a ambas. Estudiar si el conjunto M formado por la unión de todas las rectas que se apoyan en L y L' y son paralelas a Π, es una variedad euclidea de $\mathbb{R}^3$.

3. Identificamos el espacio de las matrizes cuadradas reales de órden 2 con $\mathbb{R}^4$ mediante

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

   a) Demostrar que el conjunto $SL(2) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \det x = 1\}$ es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^4$

   b) Si I denota la matriz identidad y x^t es la transpuesta de la matriz $x \in \mathbb{R}^4$, demostrar que el conjunto $O(2) = \{x \in \mathbb{R}^4 : xx^t = I\}$ es una variedad unidimensional de $\mathbb{R}^4$ con dos componentes conexas.

4. Se considera la esfera $\mathbb{S}^m = \{(x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_{i=0}^m x_i^2 = 1\}$, sea $p = (1, 0 \ldots 0) \in \mathbb{S}^m$ su "polo norte", y $\bar{p} = (-1, 0 \ldots 0) \in \mathbb{S}^m$ su "polo sur".

   a) Se considera la aplicación $P : \mathbb{R}^m \to \mathcal{U} = \mathbb{S}^m - \{p\}$, que hace corresponder a cada $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ el punto $P(u)$ intersección de $\mathbb{S}^m$ con la recta que une p y $(0, u_1, \ldots, u_m)$. Demostrar que P define una parametrización de $\mathbb{S}^m$. Se denomina, a P proyección estereográfica respecto al polo norte.

   b) Definir de forma análoga $\overline{P} : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathcal{U}} = \mathbb{S}^m - \{\bar{p}\}$ la proyección estereográfica de polo sur, y determinar las ecuaciones del cámbio de coordenadas $\overline{P}^{-1} \circ P : \mathbb{R}^m - \{0\} \ni u \to \bar{u} \in \mathbb{R}^m - \{0\}$.