PROBLEMAS ABIERTOS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLIDEO (Curso 05-06)

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que F no es inyectiva. Generalizese el resultado para el caso de una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$. Probar que si dos abiertos $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ son difeomorfos, necesariamente $n = m$.

2. Sea $\varnothing \neq M = F^{-1}(0)$ para cierta $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y $DF(p) \neq 0$ cada vez que $F(p) = 0$. Supóngase que la función $G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ se anula sobre M. Demostrar que existe $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que $G = FH$. (Es decir, el conjunto de funciones del anillo $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que se anulan en $F^{-1}(0)$ es el ideal generado por F).

3. Se considera el conjunto $O(n)$ de matrices cuadradas $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $x^t x = I$.

   a) Probar que $O(n)$ una variedad euclidea con dimensión $n(n-1)/2$.

   b) Determinar el espacio tangente a $O(n)$ en la matriz identidad $I \in O(n)$

   c) Probar que $O(n)$ tiene dos componentes conexas

   d) Determinar una paralelización global de $O(n)$.