Violeta Huerga Represa.

Ejercicio 37. Superficie de Revolución

$\alpha(v) = (\rho(v), 0, h(v))$ con $\rho(v) > 0 \quad \forall v \in I$ $\quad (\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3)$

Matriz de giro alrededor del eje OZ:

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la matriz de giro a la curva

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(v) \\ 0 \\ h(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(v)\cos u \\ \rho(v)\operatorname{sen} u \\ h(v) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(u,v) \equiv \begin{cases} x = \rho(v)\cos u \\ y = \rho(v)\operatorname{sen} u \\ z = h(v) \end{cases} \qquad \begin{matrix} v \in I \\ -\pi < u < \pi \end{matrix}$$

$\boxed{1}$ ¿$P(u,v)$ superficie parametrizada?

- Veamos que $rg(DP) = 2$.

$$DP = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho(v)\operatorname{sen} u & \rho'(v)\cos u \\ \rho(v)\cos u & \rho'(v)\operatorname{sen} u \\ 0 & h'(v) \end{pmatrix}$$

Veamos que no se anulan a la vez todos los menores de orden 2.

$$\begin{vmatrix} -\rho(v)\operatorname{sen} u & \rho'(v)\cos u \\ \rho(v)\cos u & \rho'(v)\operatorname{sen} u \end{vmatrix} = -\rho(v)\rho'(v)\operatorname{sen}^2 u - \rho(v)\rho'(v)\cos^2 u = -\rho(v)\rho'(v).$$

$\Rightarrow -\rho(v)\rho'(v) = 0 \Leftrightarrow \rho'(v) = 0$ ya que por hipótesis $\rho(v) > 0$.

$$\begin{vmatrix} -\rho(v)\operatorname{sen} u & \rho'(v)\cos u \\ 0 & h'(v) \end{vmatrix} = -\rho(v)h'(v)\operatorname{sen} u.$$

$\Rightarrow -\rho(v)h'(v)\operatorname{sen} u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h'(v) = 0 \\ \operatorname{sen} u = 0 \end{cases} \quad (\rho(v) > 0)$

$$\begin{vmatrix} \rho(v)\cos u & \rho'(v)\operatorname{sen} u \\ 0 & h'(v) \end{vmatrix} = \rho(v)h'(v)\cos u = 0$$

$\Rightarrow +\rho(v)h'(v)\cos u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h'(v) = 0 \\ \cos u = 0. \end{cases}$

sen u y cos u no pueden ser a la vez 0. Luego sólo podrían ser todos los menores cero en el caso en el que $\rho'(v)=0$ y $h'(v)=0$.

Sin embargo, si $\rho'(v)=0$ y $h'(v)=0$ a la vez, la curva $\alpha(v)$ no sería regular.

$$\alpha(v) = (\rho(v), 0, h(v)) \longrightarrow \alpha'(v) = (0,0,0)$$

Luego los 3 menores no se anulan a la vez.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{rg(DP)=2}}$.

- $\underline{P(u,v) \text{ inyectiva}}$

$$P(u_1,v_1) = P(u_2,v_2)$$

$$P(u_1,v_1) = \begin{cases} x = \rho(v_1)\cos u_1 \\ y = \rho(v_1)\operatorname{sen} u_1 \\ z = h(v_1) \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$P(u_2,v_2) = \begin{cases} x = \rho(v_2)\cos u_2 \\ y = \rho(v_2)\operatorname{sen} u_2 \\ z = h(v_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho(v_1)\cos u_1 &= \rho(v_2)\cos u_2 \\ \rho(v_1)\operatorname{sen} u_1 &= \rho(v_2)\operatorname{sen} u_2 . \\ h(v_1) &= h(v_2) \end{aligned} \Longrightarrow \underline{v_1 = v_2}$$

ya que la curva es inyectiva (no tiene autocortes según el enunciado).

$$\begin{aligned} &\rho(v_1)^2\cos^2 u_1 = \rho(v_2)^2\cos^2 u_2 \\ + \ &\rho(v_1)^2\operatorname{sen}^2 u_1 = \rho(v_2)^2\operatorname{sen}^2 u_2 \end{aligned}$$

$$\rho(v_1)^2\underbrace{\cos^2 u_1} + \rho(v_1)^2\underbrace{\operatorname{sen}^2 u_1} = \rho(v_2)^2\underbrace{\cos^2 u_1} + \rho(v_2)^2\underbrace{\operatorname{sen}^2 u_2}.$$

$$\Rightarrow \rho(v_1)^2 = \rho(v_2)^2 \underset{\rho(v)>0}{\Rightarrow} \rho(v_1) = \rho(v_2)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lll} \rho(v_1)\cos u_1 = \rho(v_1)\cos u_2 & \Rightarrow & \cos u_1 = \cos u_2 \\ \rho(v_1)\operatorname{sen} u_1 = \rho(v_1)\operatorname{sen} u_2 & \Rightarrow & \operatorname{sen} u_1 = \operatorname{sen} u_2 \end{array} \Bigg] \Rightarrow \underline{u_1 = u_2}$$

$-\pi < u_1 < \pi$

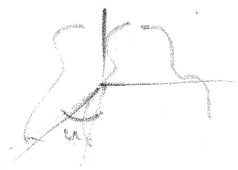
$-\pi < u_2 < \pi$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 . \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \underline{P \text{ inyectiva}} .$$

• Supondremos que $\exists\ \phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (u,v)$ tal que $\phi(P(u,v)) = (u,v)$.

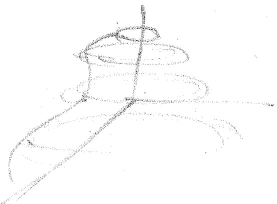
$\boxed{2}$ Líneas de coordenadas.

• Fijando u obtenemos la curva α. Según movemos u la curva va girando un ángulo u.



• Fijando v sólo aparece el punto fijado de $\alpha(v)$ revolucionado.

Son circunferencias de radio $\rho(v)$ y altura $h(v)$



$\boxed{3}$ Toro.

$R > r > 0$. Giramos alrededor del eje OZ la circunferencia C de centro $(R,0,0)$ de radio r en el plano $y=0$.

Encontrar una parametrización y el plano tangente en los puntos donde $z=r$.

Esos puntos son de la forma $\begin{pmatrix} R + r\cos v \\ 0 \\ r \operatorname{sen} v \end{pmatrix}$

La circunferencia es una curva simple. Aplicando la primera parte del ejercicio: $\alpha(v)$ circunferencia.

$$\alpha'(v) = \begin{cases} x' = -r\operatorname{sen} v \\ y' = 0 \\ z' = r\cos v \end{cases} \Rightarrow \alpha'(v) \neq 0 . \quad \Rightarrow \alpha(v) \text{ regular.}$$

Para "fabricar" el toro hacemos girar la circunferencia alrededor del eje OZ.

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R+r\cos v \\ 0 \\ r\operatorname{sen} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r\cos v)\cos u \\ (R+r\cos v)\operatorname{sen} u \\ r\operatorname{sen} v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(u,v) = \begin{cases} x = \cos u\,(R+r\cos v) \\ y = \operatorname{sen} u\,(R+r\cos v) \\ z = r\operatorname{sen} v \end{cases}$$

Comparándolo con el caso anterior (primera parte del ejercicio)

$$\begin{cases} \rho(v) = R + r\cos v \\ h(v) = r\operatorname{sen} v \end{cases}$$

$$\alpha(v) = (R+r\cos v,\ 0,\ r\operatorname{sen} v)$$

No es necesario comprobarlo. Es superficie parametrizada.

- Calculamos el plano tangente en los puntos $z=r$.

$$z=r \Rightarrow r\operatorname{sen} v = r \Rightarrow \operatorname{sen} v = 1 \Rightarrow v = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \cos v = 0$$

Sustituimos:

$$\begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\operatorname{sen} u \\ z = r. \end{cases}$$

Evaluamos DP en esos puntos y obtendremos los vectores que generan el plano tangente

$$DP = \begin{pmatrix} -(R+r\cos v)\operatorname{sen} u & -r\operatorname{sen} v\cos u \\ (R+r\cos v)\cos u & -r\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u \\ 0 & r\cos v \end{pmatrix}$$

$$DP\left(u,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -R\operatorname{sen} u & -r\cos u \\ R\cos u & -r\operatorname{sen} u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vectores que generan el plano tangente:

$$\begin{pmatrix} -R\,\text{sen}\,u & -r\cos u \\ R\cos u & -r\,\text{sen}\,u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T_pM = \left\{ \begin{pmatrix} -R\,\text{sen}\,u & -r\cos u \\ R\cos u & -r\,\text{sen}\,u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} ; \ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \ , \ u \in [0, 2\pi) \right\}$$