

# GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS EN EL PLANO.

J. Lafuente

Enero de 1998

## Índice

|   |          |
|---|----------|
| <b>1. Introducción a la teoría de curvas planas</b>                 | <b>4</b> |
| 1.1. Definiciones básicas . . . . .                                 | 4        |
| 1.1.1. Curvas en el plano . . . . .                                 | 4        |
| 1.1.2. Curvas regulares . . . . .                                   | 4        |
| 1.1.3. Ejemplos: . . . . .  | 5        |
| 1.1.4. Curvas cerradas . . . . .                                    | 7        |
| 1.1.5. Curvas simples . . . . .                                     | 7        |
| 1.1.6. Reparametrizaciones . . . . .                                | 8        |
| 1.1.7. Trayectorias y trayectorias orientadas. . . . .              | 8        |
| 1.1.8. Sobre la geometría de las curvas . . . . .                   | 8        |
| 1.1.9. Curvas regulares a pedazos. . . . .                          | 9        |
| 1.1.10. La Cicloide . . . . .                                       | 10       |
| 1.1.11. Longitud de una Curva. . . . .                              | 12       |
| 1.1.12. Parametrización por el arco . . . . .                       | 12       |
| 1.1.13. Desigualdad isoperimétrica . . . . .                        | 12       |
| 1.2. Curvas en implícitas . . . . .                                 | 13       |
| 1.2.1. Teorema (breve) de la función implícita . . . . .            | 13       |
| 1.2.2. Puntos singulares y regulares. . . . .                       | 13       |
| 1.2.3. Dirección normal y la tangente en un punto regular . . . . . | 14       |
| 1.3. Curvas en coordenadas polares . . . . .                        | 14       |
| 1.3.1. Coordenadas polares del plano . . . . .                      | 14       |
| 1.3.2. Ecuaciones polares de una curva . . . . .                    | 15       |
| 1.4. Cónicas . . . . .  | 15       |
| 1.4.1. Definición focal de las Cónicas . . . . .                    | 15       |
| 1.4.2. Ecuaciones implícitas reducidas . . . . .                    | 16       |
| 1.4.3. Ecuacion polar reducida de las cónicas . . . . .             | 17       |
| 1.5. Lugares geométricos . . . . .                                  | 20       |
| 1.5.1. Óvalos y Lemniscatas . . . . .                               | 20       |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 1.5.2.    | Cisoide . . . . .  | 21        |
| 1.5.3.    | Cicloides alargadas y acortadas . . . . .                | 22        |
| 1.5.4.    | Epicycloides e hipocicloides . . . . .                   | 23        |
| 1.5.5.    | Tractiz . . . . .  | 29        |
| 1.5.6.    | Caracoles (o limaçon) de Pascal . . . . .                | 29        |
| 1.5.7.    | Rosaceas . . . . .                                       | 31        |
| 1.5.8.    | Espirales . . . . .                                      | 32        |
| 1.5.9.    | Curvas podarias . . . . .                                | 34        |
| <b>2.</b> | <b>Envolventes</b>                                       | <b>36</b> |
| 2.1.      | Parábola de seguridad . . . . .                          | 36        |
| 2.2.      | Haces de curvas planas . . . . .                         | 37        |
| 2.2.1.    | Ecuaciones de un haz de curvas . . . . .                 | 37        |
| 2.3.      | Envolvente de un haz . . . . .                           | 38        |
| 2.3.1.    | Primeros ejemplos . . . . .                              | 39        |
| 2.3.2.    | Las cónicas como envolventes de haces de rectas. . . . . | 39        |
| 2.4.      | Determinación de la envolvente . . . . .                 | 42        |
| 2.4.1.    | Intersección entre líneas próximas . . . . .             | 42        |
| 2.4.2.    | Línea discriminante . . . . .                            | 42        |
| 2.4.3.    | Determinación analítica local de la envolvente . . . . . | 43        |
| 2.5.      | Haces y envolventes notables . . . . .                   | 44        |
| 2.5.1.    | Zona de audibilidad de un avión supersónico . . . . .    | 44        |
| 2.5.2.    | La podaria como envolvente de circunferencias . . . . .  | 45        |
| 2.5.3.    | El haz tangente de la Astroide . . . . .                 | 47        |
| <b>3.</b> | <b>Evolutas y evolventes</b>                             | <b>48</b> |
| 3.1.      | Evoluta . . . . .  | 48        |
| 3.1.1.    | La evoluta de una Cicloide . . . . .                     | 48        |
| 3.1.2.    | Determinación paramétrica de la evoluta. . . . .         | 49        |
| 3.1.3.    | Determinación implícita de la evoluta . . . . .          | 49        |
| 3.1.4.    | Evoluta de algunas curvas famosas . . . . .              | 50        |
| 3.1.5.    | Fórmulas de Frenet: Curvatura. . . . .                   | 51        |
| 3.1.6.    | Centro y radio de curvatura . . . . .                    | 52        |
| 3.2.      | Evolventes . . . . .                                     | 55        |
| 3.2.1.    | Cálculo de evolventes . . . . .                          | 55        |
| 3.2.2.    | Significado geométrico de la evolvente . . . . .         | 56        |
| 3.2.3.    | El péndulo de Huygens . . . . .                          | 56        |
| 3.2.4.    | La tractriz como evolvente de la catenaria . . . . .     | 57        |

## Referencias

- [1] T. M. Apostol. *Calculus (Vol 1 págs 612-660)*. Editorial Reverté, 1973.
- [2] V. Boltianski. *Lecciones populares de matemáticas: La envolvente*. Editorial MIR, 1977.
- [3] M. de Guzmán. *Aventuras Matemáticas*. Ediciones Pirámide, 1995.
- [4] A. de la Rica A. de la Villa. *Geometría diferencial*. Editorial CLAGSA, 1997.
- [5] J. del Rio Sánchez. *Lugares geométricos. Cónicas*. Editorial Síntesis, 1996.
- [6] A. Markushévich. *Lecciones populares de matemáticas: Curvas Maravillosas*. Editorial MIR, 1977.
- [7] G. Teixeira. *Estudio de curvas ...* Editorial, 1949.

## 1. Introducción a la teoría de curvas planas

### 1.1. Definiciones básicas

#### 1.1.1. Curvas en el plano

Fijados en el plano un sistema de coordenadas cartesianas, podemos identificar cada punto  $p$  con sus coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , y escribimos  $p = (x, y)$ .

Supongamos que nuestro punto  $p$  se mueve por el plano, y en cada instante  $t$  ocupa una posición  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , donde  $t$  varía en un cierto intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Si nuestro punto no tiene propiedades *fantasmales* describirá sobre el plano una traza continua, es decir, las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ , definidas para  $t \in I$ , serán funciones continuas, y se denomina a  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva (parametrizada).

A veces se expresa esta situación escribiendo

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

son las ecuaciones de  $\alpha$  (en las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ )

**Definición:** *Supóngase  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se dice diferenciable, si las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ , admiten derivadas de cualquier, orden en todos los puntos  $t \in I$ . Si el intervalo  $I$  no es abierto, se dirá que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es curva diferenciable, si existe una aplicación diferenciable  $\tilde{\alpha} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $\tilde{I} \supset I$ , es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$ ,  $\forall t \in I$*

**Vector velocidad** Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva diferenciable, y  $t_0 \in I$ , se llama vector velocidad de  $\alpha$  en  $t_0$  a:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = \lim_{\nabla t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + \nabla t) - \alpha(t_0)}{\nabla t}$$

y representa de hecho, la velocidad instantánea de la partícula móvil  $\alpha(t)$  en  $t = t_0$

Denotamos  $\perp \alpha'(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$ , que es  $\alpha'(t_0)$  girado  $+\pi/2$  radianes.

#### 1.1.2. Curvas regulares

Un punto  $\alpha(t_0)$  de una curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se llama regular, si  $\alpha'(t_0) \neq 0$ . La curva  $\alpha$  se llama regular si todos sus puntos son regulares

**Recta tangente y recta normal** Por un punto regular  $\alpha(t_0)$  de una curva diferenciable  $\alpha$ , pueden trazarse dos rectas destacadas:

- La recta tangente a  $\alpha$  en  $t_0$ , que es la recta  $T$  que pasa por  $\alpha(t_0)$ , y tiene la dirección de  $\alpha'(t_0)$ . Sus ecuaciones son:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

- La recta normal a  $\alpha$  en  $t_0$ , que es la recta  $N$  que pasa por  $\alpha(t_0)$ , y tiene la dirección de  $\perp\alpha'(t_0)$ . Sus ecuaciones son:

$$\frac{x - x(t_0)}{-y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{x'(t_0)}$$

### 1.1.3. Ejemplos:

**La parábola de un proyectil** Supongamos situado en el origen de coordenadas un cañón que lanza proyectiles a una velocidad (escalar) de salida  $v_0$  m/seg. Sea  $\theta$  el ángulo de inclinación respecto al suelo (eje  $x$ )  $0 < \theta < \pi/2$ . Supongamos que en el instante  $t = 0$  dispara. Por las leyes de la dinámica la curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  descrita por el proyectil, debe verificar  $x''(t) = 0$ ,  $y''(t) = -g$  siendo  $g = 9,80 \text{ m/seg}^2$  la aceleración de la gravedad. Teniendo en cuenta que se satisfacen las condiciones iniciales:

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = v_0 \cos \theta, \quad y'(0) = v_0 \sin \theta$$

se concluye que

$$x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \theta$$

y la trayectoria descrita es la gráfica de la función:

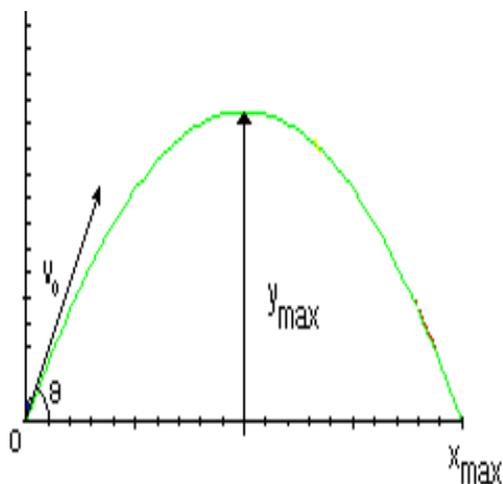
$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x \quad (1)$$

que resulta ser una parábola (invertida) que corta al eje  $x$  en

$$x_{\text{máx}}(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad (2)$$

con vértice en  $(0, y_{\text{máx}}(\theta))$  siendo

$$y_{\text{máx}}(\theta) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (3)$$



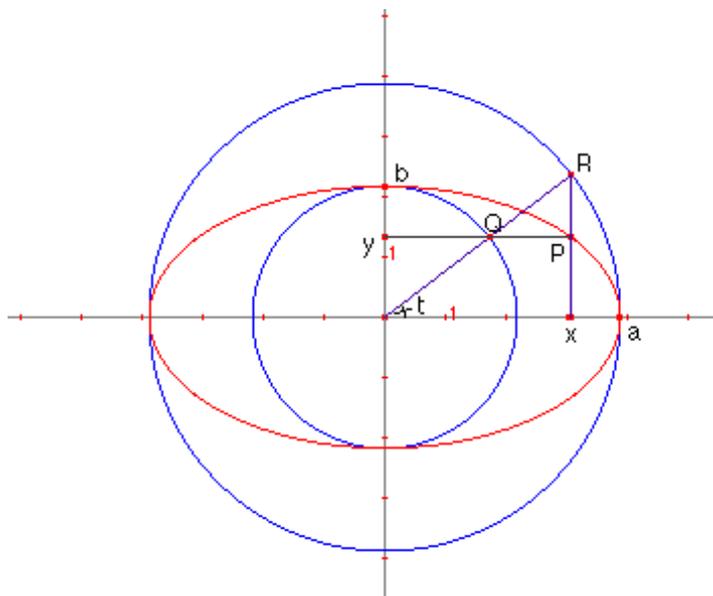
**Circunferencia** La circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio  $r > 0$  puede parametrizarse por la curva  $\alpha(t)$  con

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ahora  $t$  representa el ángulo por el vector de posición de  $\alpha(t)$  con el eje de las  $x$ .

**Elipse** La elipse de semiejes  $a > 0$ ,  $b > 0$  centrada en el origen admite una representación paramétrica  $\alpha(t)$  con:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



#### 1.1.4. Curvas cerradas

Una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  se dice cerrada, si empieza y termina en el mismo punto  $p$ , es decir  $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ . Si  $\alpha$  es diferenciable, se dice diferenciablemente cerrada, si existe una curva diferenciable  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\tilde{\alpha} | [a, b] = \alpha$ , y de forma que  $\tilde{\alpha}$  es periódica con periodo  $l = b - a$ , es decir,  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t + l) \forall t \in \mathbb{R}$ .

La circunferencia y la elipse en la forma paramétrica descrita antes, son curvas diferenciablemente cerradas.

#### 1.1.5. Curvas simples

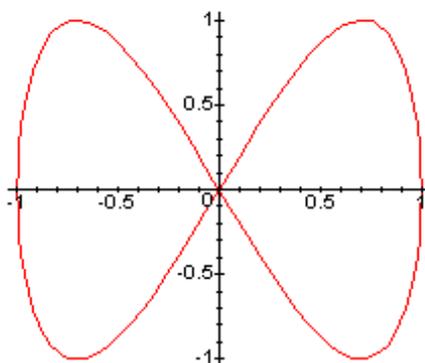
Se llaman puntos de autointersección de una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  aquellos puntos  $p$  que verifican  $p = \alpha(t_1) = \alpha(t_2)$  para ciertos valores  $t_1, t_2 \in (a, b)$  con  $t_1 \neq t_2$ . La curva  $\alpha$  se dice simple, si no tiene puntos de autointersección. Obsérvese que a una curva simple,  $\alpha$  le está permitido ser cerrada, es decir,  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , si esto sucede, la curva es cerrada y simple.

**Teorema de Jordán** Si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva cerrada y simple, entonces  $\mathbb{R}^2 - im\alpha$  se divide exactamente en dos regiones conexas, una de ellas acotada.

**Un ejemplo: La figura del 8** La curva  $\alpha : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow (\sin t, \sin 2t) \in \mathbb{R}^2$  tiene forma de 8 (tumbado), y es una curva diferenciablemente cerrada, sin embargo no es simple ya que  $\alpha(0) = \alpha(\pi) = \alpha(2\pi) = (0, 0)$ .

Sin embargo,  $\alpha \mid [0, \pi]$  es una curva cerrada y simple, pero no diferenciablemente cerrada.

Finalmente  $\alpha \mid (0, 2\pi)$  que tiene exactamente la misma imagen que  $\alpha$  es una curva simple, pero no es cerrada. Nótese que  $\mathbb{R}^2 - im\alpha$ , tiene tres componentes.



### 1.1.6. Reparametrizaciones

Cuando  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva, y  $\mathbf{t} : J \ni s \rightarrow t = \mathbf{t}(s) \in I$  es un difeomorfismo entre intervalos, entonces  $\beta = \alpha \circ \mathbf{t}$  es también una curva y se verifica:

$$\beta'(s) = \mathbf{t}'(s)\alpha'(\mathbf{t}(s)) \forall s \in J$$

en particular, si  $\alpha$  es regular,  $\beta$  también lo es.

### 1.1.7. Trayectorias y trayectorias orientadas.

La aplicación  $\mathbf{t}$ , se denomina función de cambio de parámetro, que permite pasar de  $\alpha$  a  $\beta$ . Se dice entonces que las curvas  $\alpha$  a  $\beta$  definen la misma trayectoria. Si  $\mathbf{t}$  preserva la orientación entonces se dice que ambas curvas definen la misma trayectoria orientada. Ambas relaciones, son de equivalencia sobre la familia de curvas regulares, y definen por paso al cociente, los conceptos de *trayectoria*, y de *trayectoria orientada*.

### 1.1.8. Sobre la geometría de las curvas

Intuitivamente, en el caso de curvas regulares, una trayectoria viene definida por la imagen de una curva regular, y una trayectoria orientada es una

trayectoria dotada de un sentido de recorrido. Conviene distinguir de entre las entidades matemáticas ó propiedades asociadas a una curva, aquellas que dependen solo de la trayectoria (que denominamos geométricas), de las que dependen de la parametrización concreta. Así por ejemplo el vector velocidad  $\alpha'(t)$  en un punto, no es geométrico, y sin embargo si lo es el vector unitario tangente  $\alpha'(t)/|\alpha'(t)|$ , o la recta afín tangente a la curva en un punto  $\alpha(t)$ .

**Curvas congruentes** Dos curvas  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  y  $\bar{\alpha}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ ,  $\alpha, \bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , se dicen congruentes, si existe un movimiento

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$$

de forma que

$$\mathcal{A}\alpha(t) = \bar{\alpha}(t), \forall t \in I$$

Cuando la aplicación  $\mathcal{A}$  se interpreta como las ecuaciones de un cambio de coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} \bar{x} = a_1 + b_1x + c_1y \\ \bar{y} = a_2 + b_2x + c_2y \end{cases}$$

entonces resulta que las ecuaciones

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(t) = a_1 + b_1x(t) + c_1y(t) \\ \bar{y} = \bar{y}(t) = a_2 + b_2x(t) + c_2y(t) \end{cases}$$

representan las ecuaciones de  $\alpha$  en las nuevas coordenadas cartesianas  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

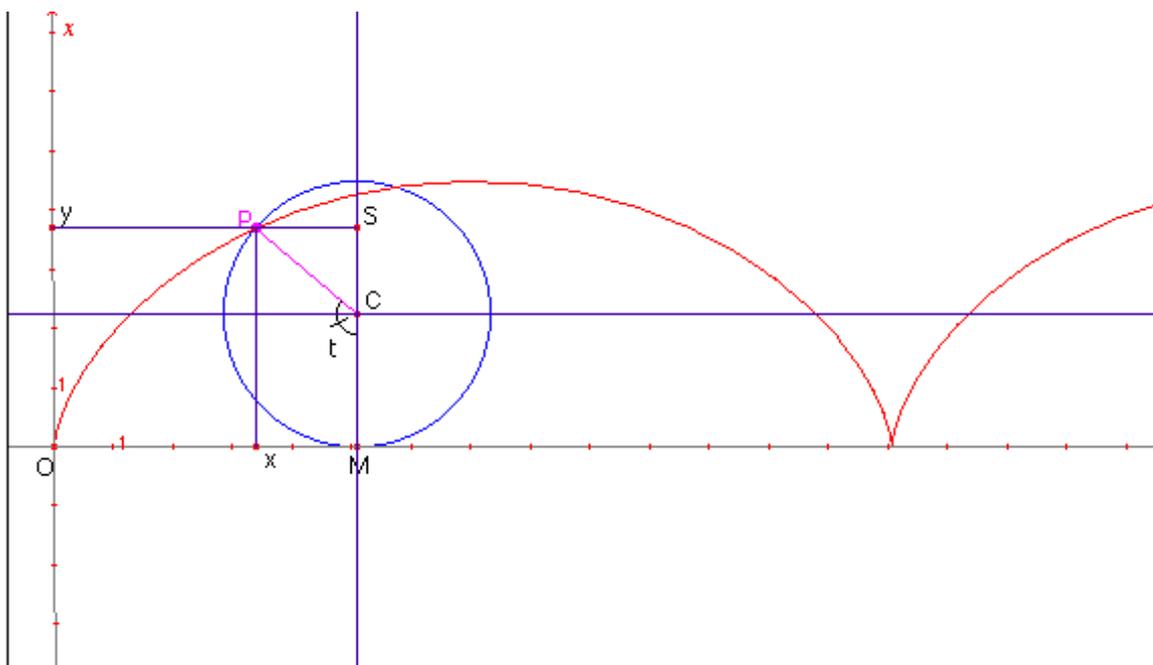
**La Geometría intrínseca** La geometría intrínseca de una curva estudia los conceptos, propiedades, etc de las curvas, que no dependen de la parametrización concreta elegida, ni del sistema de coordenadas cartesiano empleado para escribir sus ecuaciones. Es por esto una buena idea, elegir para esto, un sistema de coordenadas cartesianas, respecto al cual las ecuaciones de la curva sean lo más simples posibles.

### 1.1.9. Curvas regulares a pedazos.

Una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  se llama regular a pedazos, si es continua, y existe una partición  $a = t_0 < \dots < t_r = b$  de forma que  $\alpha : (t_{i-1}, t_i) \rightarrow \mathbb{R}^2$  para  $i = 1, \dots, r$  es una curva regular. La definición se mantiene cuando se toma el intervalo de definición de la curva semiabierto o abierto.

## 1.1.10. La Cicloide

Hay curvas perfectamente diferenciables, que sin embargo presentan "picos" en su traza. Este es el caso de la cicloide.



Esta curva es la trayectoria descrita por un punto  $P$  de una circunferencia que rueda sin deslizar por un eje. Si  $r > 0$  es el radio de la circunferencia, tomando como eje el de las  $X$ , y como parámetro  $t$  el ángulo orientado  $\widehat{MCP}$  ( $C$  es el centro de la circunferencia, y  $M$  el punto de contacto con el eje), la posición de  $P$  para cada  $t$  es

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = rt - r \sin t \\ y = r - r \cos t \end{cases}$$

Se ha supuesto, que en  $t = 0$ ,  $P$  coincide con  $M$ , y con el origen de coordenadas.

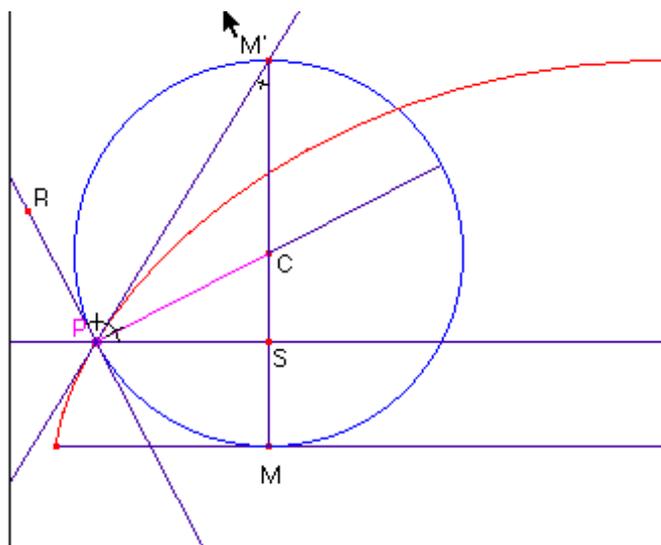
El vector velocidad se escribe:

$$\alpha'(t) : \begin{cases} x' = r - r \cos t \\ y' = r \sin t \end{cases} \quad (4)$$

que se anula en  $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  etc. Cerca de estos puntos singulares (denominados también puntos de retroceso) se ve a  $P$  caer (casi verticalmente) sobre el eje  $X$  y llegando al momento de contacto ( $P = M$ ) con velocidad nula, elevándose luego (casi verticalmente). La razón de esto es que  $\lim_{t \rightarrow 2\pi} (\alpha'(t)/t) = (0, r)$ .

Esto se puede ver de una forma más geométrica, es observando que la recta tangente a la cicloide por un punto  $P$  regular cualquiera viene determinada por los puntos  $P$  y  $M'$ , siendo  $M'$  el simétrico de  $M$  respecto a  $C$ .

En efecto, por razones cinemáticas la dirección de la velocidad de  $P$  en el instante  $t$ , es la bisectriz del ángulo  $\widehat{SPR}$ , y coincide con la de dirección del segmento  $PM'$ , pues  $\widehat{SPM'} = \widehat{M'PR} = \pi/2 - \widehat{CPM'}$



**La cicloide como braquistócrona.** Supongamos que tenemos en el plano de la pizarra dos puntos  $A$ ,  $B$ , y los unimos con un alambre de forma que si ensartamos en  $A$  una cuenta de collar, y la dejamos caer, llegue a  $B$ . Según la forma que le demos al alambre, la cuenta tardará un tiempo distinto en el viaje. Que forma debemos dar al alambre para que la cuenta tarde el mínimo tiempo posible?. Curiosamente la forma del alambre no es la del segmento rectilíneo que une  $A$  con  $B$ , sino la de una cicloide que sale verticalmente desde  $A$  y pasa por  $B$ . Por esta propiedad se dice que la cicloide es braquistócrona. (ver [3] (págs 184-208))

Este problema de la braquistócrona fué propuesto por Johan Bernouilli en 1696 a todos los matemáticos de Europa, y fué resuelto nada menos que por Newton, L'Hôpital, Leibnitz, y Jacob Bernouilli. La solución de Jacob Bernouilli contenía el germen de una nueva rama de la matemática: El Cálculo de Variaciones.

**La cicloide como tautócrona** Si situamos un arco cicloide al revés como en el dibujo, y dejamos caer simultáneamente dos canicas por ella, situadas en los puntos  $M$ , y  $N$ , las dos llegan al punto más bajo  $P$  al mismo tiempo. Por

esto se dice que la cicloide es tautócrona. Esta propiedad de la teutocronía, fué descubierta por Huygens en 1673, y la utilizó para diseñar relojes de péndulo con periodo rigurosamente exacto.

### 1.1.11. Longitud de una Curva.

Sea  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular. Se llama longitud de  $\alpha$  a

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Si  $\mathbf{t} : J \rightarrow I$  es un cambio de parámetro, entonces

$$L(\alpha) = L(\alpha \circ \mathbf{t})$$

La longitud es un concepto que pertenece a la geometría intrínseca de la curva.

Veamos por ejemplo cuál es la longitud de un arco de cicloide. Su vector velocidad viene dado en (4), por tanto:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \sqrt{2}r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4r \left[ -\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8r \end{aligned}$$

### 1.1.12. Parametrización por el arco

Una curva regular  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  que verifica la condición  $|\beta'(s)| = 1$ , se dice que está parametrizada respecto a la longitud de arco ya que verifica la identidad

$$L(\beta | [a, b]) = b - a \quad \forall a, b \in J, \quad a < b$$

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva regular, y  $t_0 \in I$ , la aplicación

$$\mathbf{s} : I \ni t \rightarrow s = \mathbf{s}(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \in \mathbf{s}(I) = J$$

es un cambio de parámetro con  $\mathbf{s}'(t) = |\alpha'(t)|$ . Si  $\mathbf{t} = \mathbf{s}^{-1} : J \rightarrow I$ , la curva reparametrizada  $\beta = \alpha \circ \mathbf{t}$  está parametrizada por la longitud de arco.

### 1.1.13. Desigualdad isoperimétrica

Fijada  $l > 0$ , de todas las curvas planas diferenciables simples y cerradas de longitud  $l$ , la que encierra mayor área es la circunferencia de longitud  $l$ . Este resultado se conoce con el nombre de desigualdad isoperimétrica, y se

expresa de forma rigurosa en el siguiente teorema, cuya demostración no es en absoluto trivial

**Teorema.** *Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{E}^2$  es una curva cerrada simple entonces  $\mathbf{E}^2 - \alpha(I)$  tiene exactamente dos componentes conexas, una de ellas acotada, cuya area  $S(\alpha)$  no supera  $L(\alpha)^2/4\pi$ . Además, si  $S(\alpha) = L(\alpha)^2/4\pi$  entonces  $\alpha(I)$  es una circunferencia.*

Observese que la primera parte es consecuencia del teorema de Jordán.

## 1.2. Curvas en implícitas

Sea  $\mathbb{D}$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. El conjunto de ceros de  $F$  es el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{D} : F(x, y) = 0\}$$

se dice entonces que el conjunto  $C$  es (ó viene definido implícitamente por la ecuación)  $F(x, y) = 0$ .

Aún cuando  $F$  se suponga diferenciable, el conjunto de ceros de  $F$  no tiene porqué ser una línea. De hecho cualquier subconjunto (cerrado) de  $\mathbb{R}^2$ , puede obtenerse como conjunto de ceros de una función  $F$  diferenciable.

No obstante, ciertas hipótesis adicionales sobre la función  $F$ , nos permiten garantizar (al menos localmente) la existencia de curvas parametrizadas, cuyas trayectorias describen el conjunto de los ceros de  $F$ .

### 1.2.1. Teorema (breve) de la función implícita

Sea  $\mathbb{D}$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, y  $C$  el conjunto de ceros de  $F$ . Sea  $(x_0, y_0) \in C$ , y supóngase que alguna de las derivadas parciales  $(\partial F/\partial x)_{(x_0, y_0)}, (\partial F/\partial y)_{(x_0, y_0)}$  es distinta de cero, por ejemplo  $(\partial F/\partial y)_{(x_0, y_0)} \neq 0$ . Existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $(x_0, y_0)$ , y una aplicación diferenciable  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $(a, b)$  es intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  ( $x_0 \in (a, b)$ ) de manera que

$$\{(t, g(t)) : t \in (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathcal{U} : F(x, y) = 0\}$$

de esta forma la trayectoria de la curva regular  $\alpha : (a, b) \ni t \rightarrow (t, g(t)) \in \mathbb{R}^2$  coincide con  $C \cap \mathcal{U}$

Naturalmente hay un resultado análogo cuando  $(\partial F/\partial y)_{(x_0, y_0)} \neq 0$

### 1.2.2. Puntos singulares y regulares.

Cuando  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, un punto  $(x_0, y_0) \in C = F^{-1}(0)$  se dice singular si

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = 0$$

Si no es singular, se denomina punto regular. Cuando todos los puntos de  $C$  son regulares, cada componente conexa, puede expresarse como la trayectoria de una curva regular. Una situación muy frecuente, es que el conjunto de puntos singulares de  $C$ , sea un conjunto de puntos aislados. En este caso, cada componente conexa de  $C$  puede expresarse como una trayectoria de una curva regular a pedazos.

### 1.2.3. Dirección normal y la tangente en un punto regular

Si  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable,  $(x_0, y_0) \in C = F^{-1}(0)$  es un punto regular, entonces el vector

$$(\text{grad}F)(x_0, y_0) = \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}, \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \right)$$

es distinto de  $(0, 0)$ , y su dirección es normal a la curva en el punto  $(x_0, y_0)$ .

**Demostración:** Si  $\alpha : (a, b) \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  es una curva regular con  $F(\alpha(t)) = 0 \forall t$ , y  $F(\alpha(t_0)) = (x_0, y_0)$  entonces usando la regla de la cadena:

$$\left. \frac{dF \circ \alpha}{dt} \right|_{t_0} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0}$$

o de forma equivalente, si  $v \cdot w$  denota el producto escalar ordinario de  $v, w \in \mathbb{R}^2$  se tiene:

$$(\text{grad}F)(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0$$

y así  $(\text{grad}F)(\alpha(t_0))$  es ortogonal al vector velocidad  $\alpha'(t_0)$ .

## 1.3. Curvas en coordenadas polares

### 1.3.1. Coordenadas polares del plano

Fijado  $\rho > 0$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ , queda determinado un punto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  cuyas coordenadas cartesianas  $x, y$ , verifican:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

se dice entonces que  $(\rho, \theta)$  son coordenadas polares para el punto  $P$ . El radio polar  $\rho$  es la distancia de  $P$  al origen  $O$  de coordenadas, y queda determinado por la fórmula  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . El ángulo polar  $\theta$ , es la medida en radianes del ángulo determinado por el eje  $OX$  y el vector  $OP$ , y queda determinado salvo múltiplos entero de  $2\pi$ .

Solo el polo  $O$ , carece de coordenadas polares.

### 1.3.2. Ecuaciones polares de una curva

Dada una curva diferenciable  $\alpha : I \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ , diremos que

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

son ecuaciones polares para  $\alpha$ , si  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$ , son funciones diferenciables tales que

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

A veces es posible encontrar unas las ecuaciones polares de  $\alpha$  de la forma

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases}$$

diremos entonces que  $\rho = \rho(\theta)$  es la ecuación polar (reducida) de  $\alpha$ .

## 1.4. Cónicas

### 1.4.1. Definición focal de las Cónicas

Fijados dos puntos  $F_1$  y  $F_2$  del plano (que denominamos focos) situados a una distancia  $2c$ . podemos definir la *elipse* como el lugar geométrico de los puntos, cuya suma de distancias  $d_1$  y  $d_2$  a los focos  $F_1$  y  $F_2$  es una constante  $2a$  ( $a > c \geq 0$ ). Si los focos coinciden la elipse se reduce a una circunferencia.

La *hipérbola* es el lugar de todos los puntos para los cuales  $|d_1 - d_2|$  es constante  $2a$  ( $0 < a < c$ ). Al cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

se denomina excentricidad de la cónica ( $0 \leq e < 1$ , en la elipse, y  $e > 1$  en la hipérbola)

Finalmente, la *parábola* es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo  $F$  (llamado foco), es igual a su distancia a una recta fija  $D$  (llamada directriz).

De tales definiciones, se deducen fácilmente las conocidas construcciones materiales por trazo continuo que se indican en las figuras. ([6] págs 11, 17, 20)

Hay un razonamiento muy elegante que prueba que la propiedad focal de la elipse y la hipérbola es consecuencia de su definición clásica como sección de un cono por un plano. Esta demostración fué descubierta por un matemático belga G. P. Dandelin en 1882, y puede verse por ejemplo en [1] (pág 611) o también [?] (págs 207-215)

### 1.4.2. Ecuaciones implícitas reducidas

**Ecuación implícita cartesiana de la elipse e hipérbola** Tomemos los ejes de forma que  $F_1 = (-c, 0)$ ,  $F_2 = (c, 0)$ , y un punto  $P = (x, y)$  sobre la cónica. con abscisa  $x \leq 0$ . Llamando  $d(P, F_i) = d_i$ , es claro que  $d_1 \leq d_2$  y tenemos:

$$d_1^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad (5)$$

Análogamente, es  $d_2^2 = (x - c)^2 + y^2$  por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} d_1^2 - d_2^2 &= 4cx \\ \varepsilon d_1 + d_2 &= 2a \end{aligned}$$

donde se ha tomado  $\varepsilon = \text{sgn}(1 - e^2)$ , es decir,  $\varepsilon = +1$  en el caso de la elipse, y  $\varepsilon = -1$  en el caso de la hipérbola.

Dividiendo la segunda ecuación por la primera, se obtiene:  $\varepsilon d_1 - d_2 = 2ex$ , y conocidas suma y diferencia entre  $\varepsilon d_1$ , y  $d_2$  se obtienen fácilmente sus valores:

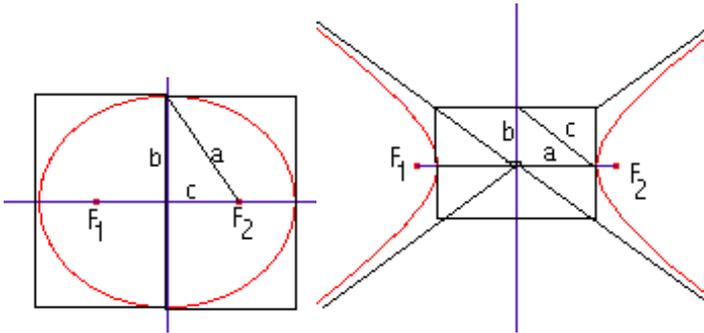
$$\begin{aligned} \varepsilon d_1 &= a + ex \\ d_2 &= a - ex \end{aligned} \quad (6)$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la primera ecuación y usando (5), se obtiene:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

de donde sale la conocida ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1, \text{ con } \varepsilon b^2 = a^2 - c^2 \quad (7)$$

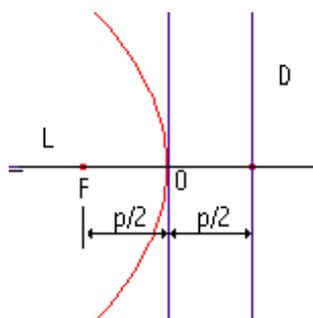


Realmente solo hemos probado que todo punto  $P = (x, y)$  de la cónica ( $x \leq 0$ ) verifica la ecuación (7)

**Ejercicio 1** *Demostrar que si un punto  $P = (x, y)$  ( $x > 0$ ) verifica la ecuación (7) entonces verifica también la condición  $\varepsilon d_1 + d_2 = 2a$ , y está por tanto en la cónica.*

Como el eje de las  $y$  es evidentemente eje de simetría de la cónica, y la ecuación (7) permanece invariante al cambiar  $x$  por  $-x$ , se concluye que (7) determina exactamente el conjunto de puntos de la cónica.

**Ecuación implícita cartesiana de la parábola:** El eje  $L$  ortogonal a la directriz  $D$  que pasa por el foco  $F$ , se denomina eje de la parábola, y es evidentemente eje de simetría. El punto  $V$  intersección de la parábola con el eje, se denomina vértice. Tomando  $L$  como eje de las  $X$ , y  $V$  como origen de coordenadas, podemos suponer que  $F = (-p/2, 0)$ , y que  $D$  es la recta de ecuación  $x = p/2$ , siendo  $p = \text{dist}(F, D)$ .



Sea  $P = (x, y)$  un punto de la parábola. Si  $d = \text{dist}(P, F)$ , entonces la condición de equidistancia se escribe:

$$d = -x + \frac{p}{2} \quad (8)$$

elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que  $d^2 = (x + p/2)^2 + y^2$ , se obtiene:

$$y^2 = -2px \quad (9)$$

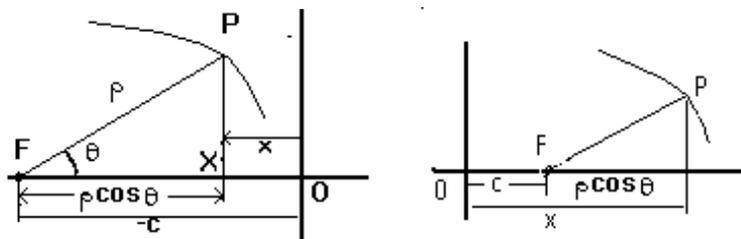
Recíprocamente la ecuación puede escribirse en la forma:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

que traduce la condición de equidistancia

### 1.4.3. Ecuación polar reducida de las cónicas

Consideremos una cónica de excentricidad  $e \neq 1$  (elipse ó hipérbola). Cambiemos ligeramente las notaciones del parágrafo 1.4.2 Llamamos  $F_- = F_1 = (-c, 0)$ , el otro foco es  $F_+ = F_2 = (c, 0)$ . Tomaremos como centro de las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  el foco  $F_\varepsilon$ , que denominamos foco principal de la cónica. Entonces  $\rho = d_2$ , en el caso de la elipse ( $\varepsilon = 1$ ), y  $\rho = d_1$  en el caso de la hipérbola ( $\varepsilon = -1$ ).



En ambos casos se tiene para un punto  $P = (x, y)$  de la cónica ( $x < 0$  si es hipérbola):

$$\begin{aligned}\rho \cos \theta &= x - \varepsilon c \\ \rho &= \varepsilon a - \varepsilon x\end{aligned}$$

donde la segunda identidad es consecuencia de (6). Multiplicando por  $e$  la primera ecuación, y sumandola a la segunda queda

$$\rho(1 + e \cos \theta) = \varepsilon(a - \varepsilon c)$$

pero

$$\varepsilon(a - \varepsilon c) = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2)}{a} = \frac{b^2}{a} = p$$

ya que por (7)  $b^2 = \varepsilon(a^2 - c^2)$ . Se denomina a  $p = b^2/a$  parámetro de la cónica. Su ecuación polar reducida es por tanto:

$$\rho = \frac{p}{(1 + e \cos \theta)} \quad (10)$$

Curiosamente, esta ecuación es también válida para la parábola de parámetro  $p$ , cuando se toma  $e = 1$ . En efecto, se tiene en este caso  $\rho = d$ , y usando la expresión de  $d$  en (8) se concluye

$$\begin{aligned}\rho \cos \theta &= x + \frac{p}{2} \\ \rho &= -x + \frac{p}{2}\end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones queda

$$\rho = \frac{p}{(1 + \cos \theta)}$$

esto justifica el asignar a la parábola una excentricidad  $e = 1$ . Así el signo  $\varepsilon = \text{sign}(1 - e^2)$  de una parábola es necesariamente  $\varepsilon = 0$ .

**Observación 1** La excentricidad  $e$ , y el parámetro  $p$ , determinan completamente la cónica salvo movimientos. De hecho podemos calcular a partir de ellos los semiejes y distancia focal. En efecto, sabemos que  $e = c/a$ ,  $p = b^2/a$ , luego (si  $e \neq 1$ )

$$1 - e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{\varepsilon b^2}{a^2} = \varepsilon \frac{p}{a}$$

Por tanto,

$$a = \frac{p}{|1 - e^2|}, \quad c = \frac{ep}{|1 - e^2|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}$$

Por otra parte, dos cónicas son semejantes si y solo si tienen la misma excentricidad  $e$ . Así resulta que  $e$  determina la forma de la cónica, mientras que  $p$  determina su tamaño. Por último, la condición necesaria y suficiente para que dos cónicas sean afínmente equivalentes, es que tengan el mismo signo  $\varepsilon$ .

El hecho de que todas las parábolas tengan la misma excentricidad  $e = 1$ , demuestra que todas ellas tienen exactamente la misma forma.

**Ejercicio 2** Demostrar que si  $e > 1$ , la ecuación (10) describe solo una de las ramas de la hipérbola. La otra rama viene descrita por la ecuación (en las mismas coordenadas polares)

$$\rho = \frac{p}{(-1 + e \cos \theta)}$$

**Ejercicio 3** Se considera una cónica  $\mathcal{C}$  con parámetro  $p > 0$  y excentricidad  $e > 0$  sea  $F$  su foco principal. Llamamos directriz  $D$  a la recta ortogonal al eje de la cónica (que contiene a  $F$ ), y situado a una distancia

$$d = \frac{p}{e}$$

Usando la ecuación polar de  $\mathcal{C}$  (10) demostrar que  $\mathcal{C}$  es el lugar geométrico de los puntos  $P$  cuyo cociente de distancias al foco  $F$  y a la directriz  $D$  es constante igual a  $e$ .

Mostrar que (por razones de simetría) si  $e \neq 1$ , la cónica  $\mathcal{C}$  posee otra directriz asociada al otro foco.

**Ejercicio 4** Demostrar que una  $\left\{ \begin{array}{l} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{array} \right\}$  puede obtenerse como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia (la focal) y de un punto  $\left\{ \begin{array}{l} \text{interior} \\ \text{exterior} \end{array} \right\}$ .

**Ejercicio 5** Demostrar que una  $\left\{ \begin{array}{l} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{array} \right\}$  puede obtenerse como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una fija, y que pasan por un punto fijo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{interior} \\ \text{exterior} \end{array} \right\}$ .

Por otra parte, una parábola se puede ver como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta fija, que pasan por un punto exterior.

## 1.5. Lugares geométricos

### 1.5.1. Óvalos y Lemniscatas

Estudiemos el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a dos fijos  $F_1$ , y  $F_2$  (llamados focos), es una constante  $b^2$ .

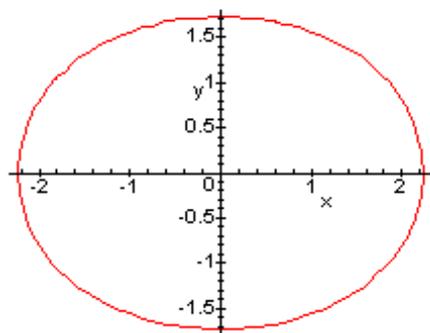
Si la distancia entre  $F_1$  y  $F_2$  es  $2a$ , entonces tomando  $F_1 = (-a, 0)$ ,  $F_2 = (a, 0)$ , obtenemos como ecuaciones implícitas del lugar denominado *óvalo de Cassini*:

$$((x + a)^2 + y^2) ((x - a)^2 + y^2) = b^4$$

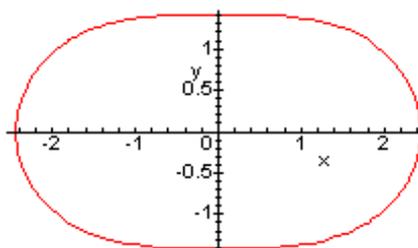
o de forma equivalente

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 = b^4 + 4a^2x^2$$

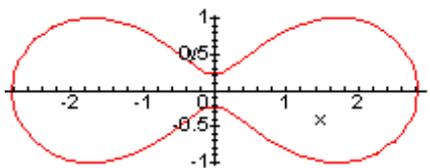
En las figuras que siguen aparecen distintos óvalos, para diferentes valores de  $a$  y  $b$ .



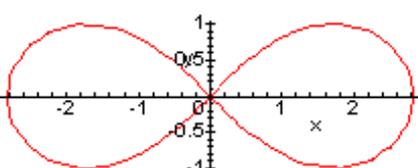
$$a^2 = 1, b^2 = 4$$



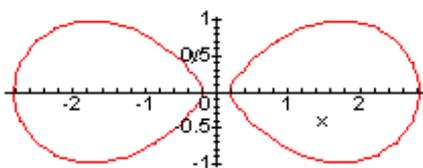
$$a^2 = 2, b^2 = 4$$



$$a^2 = 3,96, b^2 = 4$$



$$a^2 = b^2 = 4$$



$$a^2 = 4,04, b^2 = 4$$

Cuando  $a = b$ , el origen es un punto del óvalo, que adquiere forma de ocho. Se denomina entonces Lemniscata.

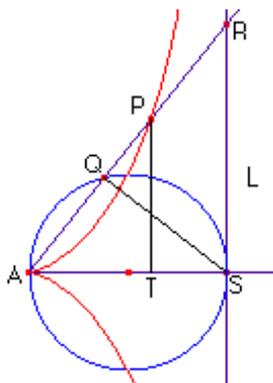
Una generalización, consiste en estudiar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a otros  $r \geq 2$  distintos  $F_1, \dots, F_r$  es constante. De esta forma, pueden conseguirse *óvalos generalizados* de formas arbitrarias.

[6] (págs 1-34) ver también [7] [205]

### 1.5.2. Cisoide

Para construir una cisoide necesitamos una circunferencia  $\mathcal{C}$ , y una recta  $L$  tangente a ella. Sea  $S$  es el punto de tangencia, y  $A$  es el punto diametralmente opuesto, se define la cisoide de la siguiente manera:

Si  $R$  es un punto móvil a lo largo de  $L$ , y  $Q$  es la intersección de  $\mathcal{C}$  con el segmento  $AR$ , la cisoide es el lugar geométrico de los puntos  $P$  en  $AR$  tales que  $d(A, P) = d(Q, R)$ .



tomando un sistema de coordenadas, en donde la circunferencia  $\mathcal{C}$  está centrada en  $(a, 0)$ . Sean  $(x, y)$  las coordenadas de un punto  $P$  sobre la cisoide. Entonces  $2a = d(A, S)$  y por el teorema de Pitágoras en el triángulo  $AQS$  se tiene:

$$d(Q, S)^2 = d(A, S)^2 - d(A, Q)^2 = 4a^2 - (d(A, R) - d(Q, R))^2 \quad (11)$$

pero por la definición de cisoide, es:

$$d(Q, R) = d(A, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y por la semejanza de los triángulos  $ATP$  y  $ASR$  se concluye

$$d(A, R) = \frac{2a}{x} d(A, P)$$

por lo que de (11) se concluye

$$d(Q, S)^2 = 4a^2 - \left( \frac{2a}{x} - 1 \right)^2 (x^2 + y^2) \quad (12)$$

Por otra parte, aplicando a  $SQR$  el teorema de Pitágoras, y nuevamente la semejanza de los triángulos  $ATP$  y  $ASR$  se ve que:

$$d(Q, S)^2 = d(R, S)^2 - d(Q, R)^2 = \left(\frac{2ay}{x}\right)^2 - (x^2 + y^2) \quad (13)$$

comparando los miembros de la derecha de (12) y (13) se obtiene:

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

**Ejercicio 6** *Demostrar que unas ecuaciones paramétricas para la cisoide son:*

$$\alpha(t) = \left( \frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right)$$

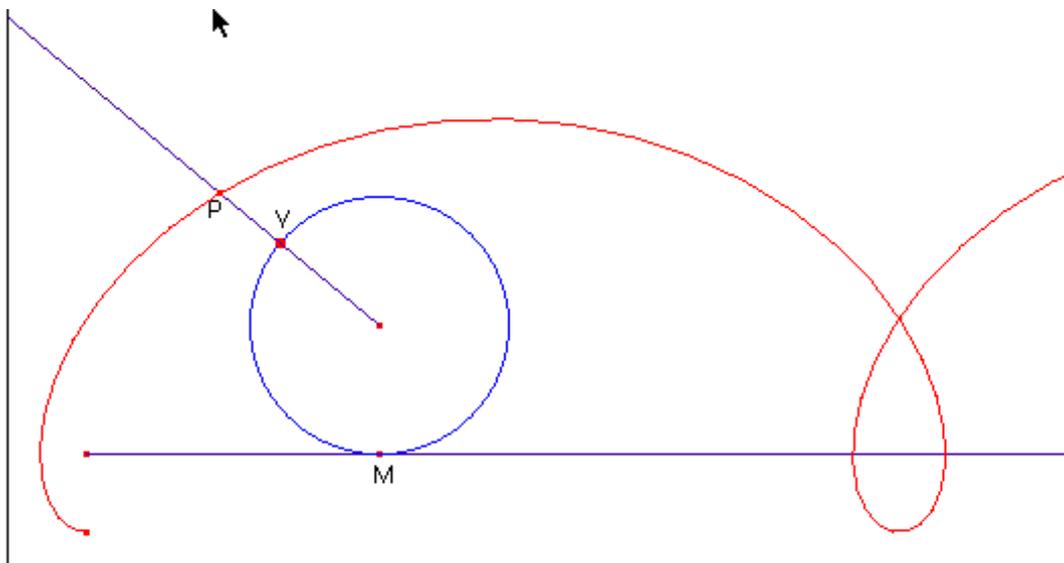
Los griegos usaron la cisoide al tratar de resolver problemas de duplicación del cubo y de trisección del ángulo.

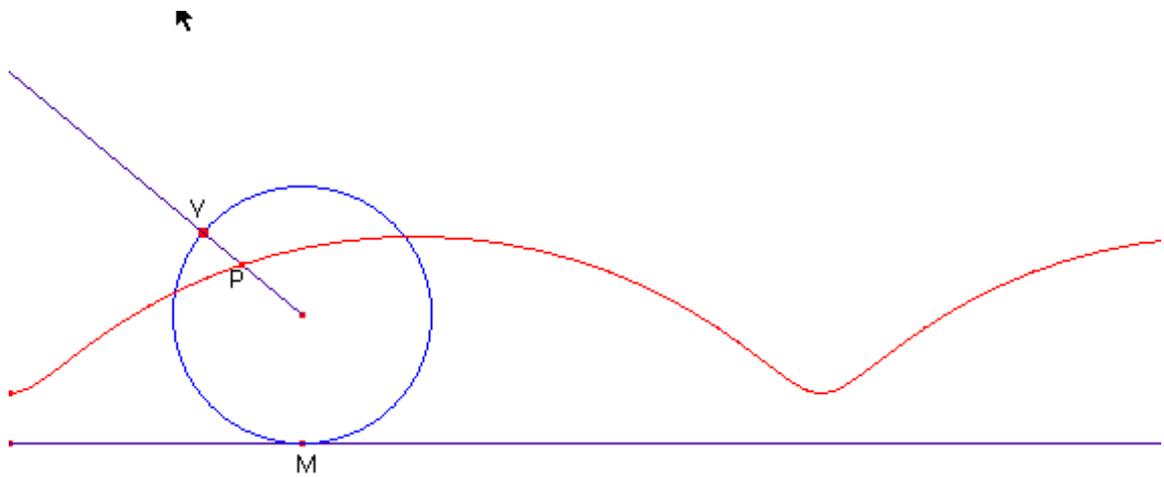
### 1.5.3. Cicloides alargadas y acortadas

Una cicloide acortada, es la curva engendrada por un punto  $P$  en el interior de un círculo que rueda sin deslizar por una recta  $L$ . Si el punto  $P$  es exterior al círculo móvil, se denomina cicloide alargada. Si  $a$  es la distancia del punto  $P$  al centro del círculo móvil de radio  $r$ , las ecuaciones de la cicloide (acortada si  $a < r$ , y alargada si  $a > r$ ), son

$$\begin{cases} x = rt - a \sin t \\ y = r - a \cos t \end{cases}$$

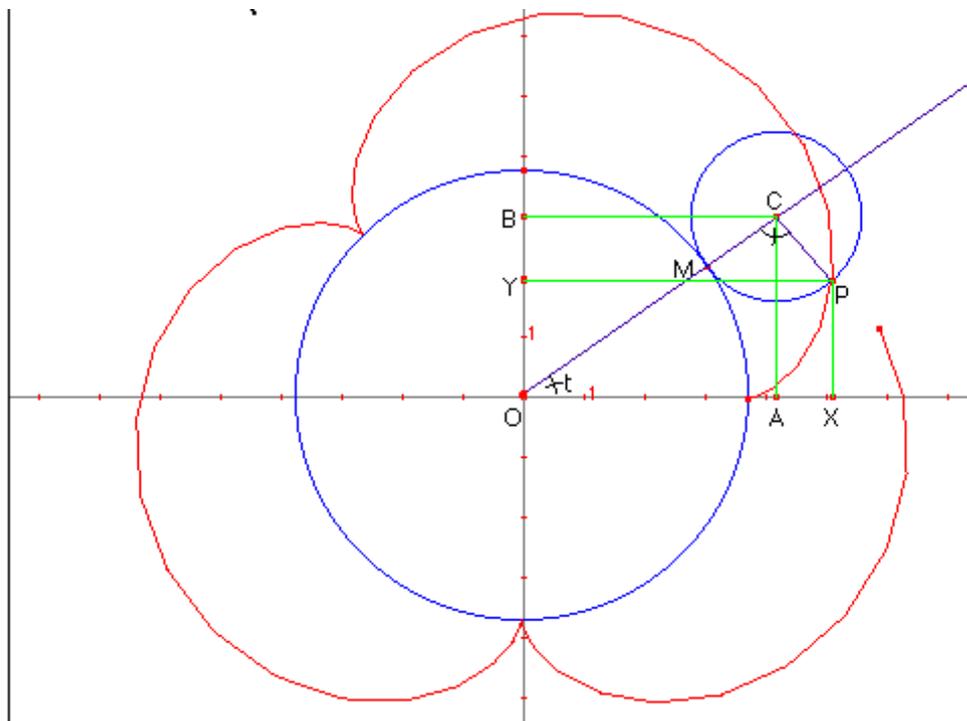
en donde se ha tomado como recta  $L$  el eje de las  $x$ , y como  $t$ , el ángulo  $\widehat{PCM}$ .





#### 1.5.4. Epicicloides e hipocicloides

La curva engendrada por un punto  $P$  de una circunferencia (de radio  $r$  que rueda sin deslizar por otra circunferencia fija (de radio  $R \geq r$ ) se llama *hipocicloide*, si ambas circunferencias están al mismo lado de la tangente común, y *epicicloide* si están a distinto.



Las ecuaciones paramétricas de estas curvas son:

$$\begin{cases} x = (R + \varepsilon r) \cos t - \varepsilon r \cos \left( \frac{R + \varepsilon r}{r} t \right) \\ y = (R + \varepsilon r) \sin t - \varepsilon r \sin \left( \frac{R + \varepsilon r}{r} t \right) \end{cases} \quad (14)$$

donde  $\varepsilon = +1$  en las epicloides, y  $\varepsilon = -1$  en las hipocicloides. El origen de coordenadas es el centro de la circunferencia fija, y  $t$  es el ángulo que forma  $OM$  con el eje de las  $x$ . Ver [7] [552]

**Ejercicio 7** Probar que la recta tangente por un punto  $P$  de la epicloide, pasa por el punto  $M'$  simétrico del  $M$  (punto de tangencia entre ambas circunferencias) respecto al centro de la circunferencia que rueda

**Ejercicio 8** Las ecuaciones (14) cuando  $\varepsilon = -1$  representan una hipocicloide cuando  $R > r$ , sin embargo, cuando  $R < r$  representan una epicloide. Demostrar este hecho, y dar una explicación geométrica.

**Observación 2** Esta propiedad de la doble generación de las epicloides, fué inicialmente descubierta por La Hire, y despues redescubierta por Nicolas Bernouilli en 1725, y Euler en 1781

Si el punto  $P$  es interior (exterior) al círculo móvil, entonces describe una curva que se llama (hipo-epi)cicloide acortada(alargada). Si  $a$  es la distancia del punto  $P$  al centro del círculo móvil, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = (R + \varepsilon r) \cos t - \varepsilon a \cos \left( \frac{R + \varepsilon r}{r} t \right) \\ y = (R + \varepsilon r) \sin t - \varepsilon a \sin \left( \frac{R + \varepsilon r}{r} t \right) \end{cases} \quad (15)$$

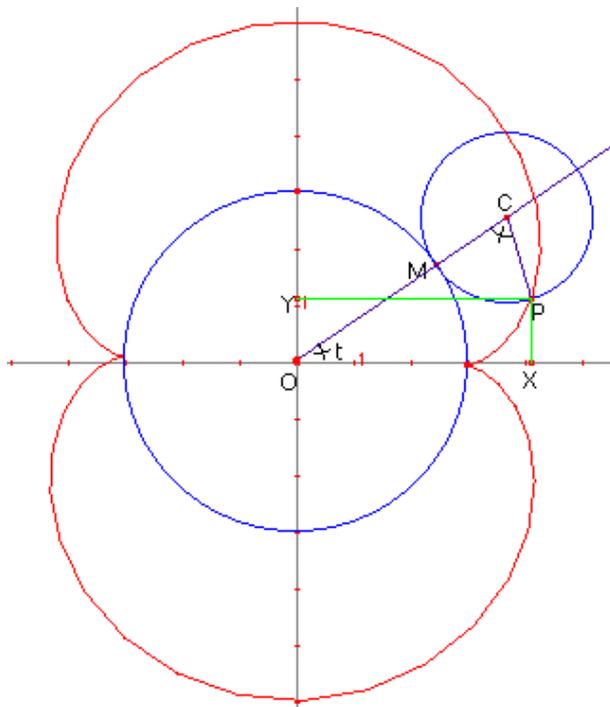


Figura 1:

### Ejemplos de epicicloides

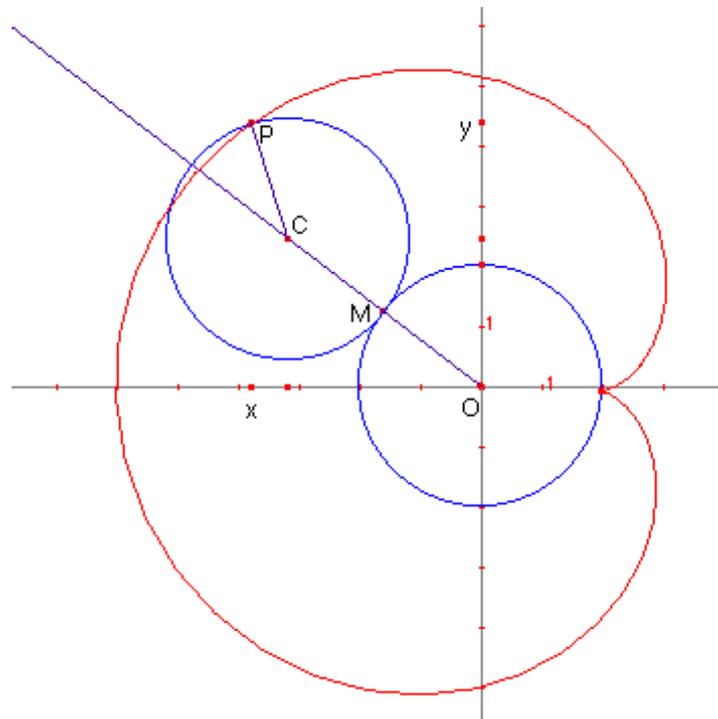
#### Nefroide ( $R = 2r$ )

Tiene por ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 3r \cos t - r \cos(3t) \\ y = 3r \sin t - r \sin(3t) \end{cases}$$

La nefroide, fué estudiada por Huygens en su *Tratado de a luz* (1690) como solución del problema de determinación de la envolvente de los rayos reflejados por un círculo a partir de un haz de rayos paralelos. Ver [7] [566-568]

#### Cardioide ( $R = r$ )



Tiene por ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos(2t) \\ y = 2r \sin t - r \sin(2t) \end{cases}$$

Las numerosas propiedades de la cardiode (algunas de las cuales veremos en estas notas) ha sido objeto de numerosos trabajos a partir de 170? que están reunidas por M. Archival en una disertación publicada en 1900 con título: *The cardioid and some of its related curves*. [7] [232-239]

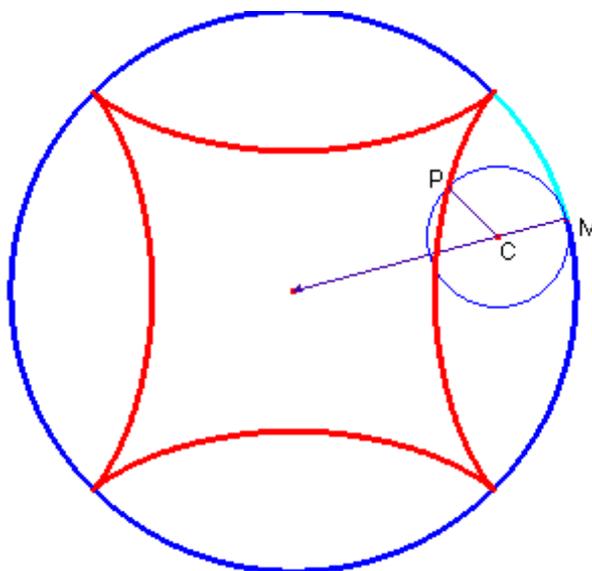
**Ejercicio 9** Probar que las tangentes a la cardiode por los extremos de una cuerda cualquiera que pasa por el punto de retroceso, son ortogonales.

**Eplicicloides alargada y acortada** [7] [594-603]

**Ejemplos de hipocicloides**

**Astroide** ( $R = 4r$ ) [7] [345] Tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3r \cos t + r \cos(3t) \\ y = 3r \sin t - r \sin(3t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 4r \cos^3 t \\ y = 4r \sin^3 t \end{cases}$$



**Ejercicio 10** Probar que la asteroide puede describirse implícitamente por la ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3} \text{ con } l = (4r)^{2/3}$$

y tiene la siguiente propiedad geométrica: Los segmentos que determinan las tangentes con los ejes de coordenadas (que son los ejes de simetría que pasan por los puntos de retroceso), tienen longitud constante.

La asteroide fué inicialmente reconocida por la propiedad del ejercicio anterior, y fué estudiada por Jean Bernouilli y D’Alambert. ver [2]

**Deltoide** ( $R = 3r$ )

[7] [569] Tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2r \cos t + r \cos(2t) \\ y = 2r \sin t - r \sin(2t) \end{cases}$$

Ha sido llamada la hipocicloide tricúspide o de Steiner, y fué la curva solución al siguiente problema de reflexión de rayos de luz propuesto en 1745 y resuelto por Euler:

*Determinar la curva tal que los rayos luminosos que parten de un foco, vuelvan a él después de dos reflexiones.*

Más tarde en 1857 esta curva fué estudiada por Steiner

**Ejercicio 11** Demostrar que en una deltoide, el producto de las distancias de los puntos de retroceso a una tangente cualquiera, es igual al cubo de la distancia del centro (de simetría) de la curva, a la misma tangente

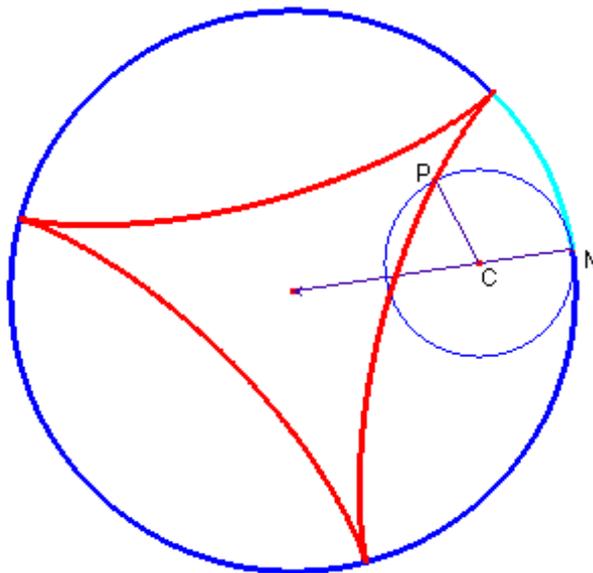
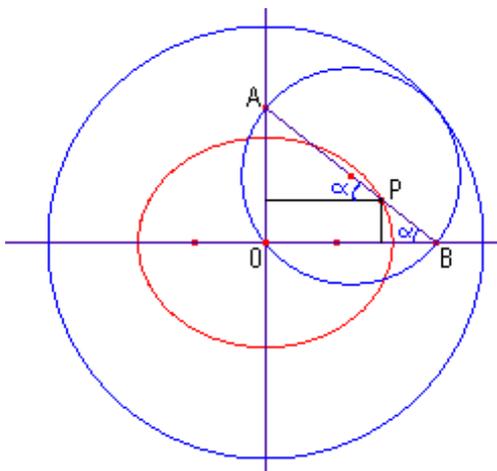


Figura 2:

**La elipse como hipocicloide acortada** ( $R = 2r$ ) Sustituyendo en (15) para  $R = 2r$ , y  $a < r$  se obtiene

$$\begin{cases} x = r \cos t + a \cos t \\ y = r \sin t - a \sin t \end{cases}$$

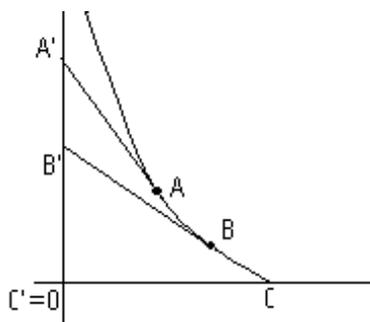
que determina las ecuaciones paramétricas de una elipse de semiejes  $r + a$ ,  $r - a$ . ver [5] pág 34 [7] [600]



### 1.5.5. Tractiz

La determinación de otros muchos lugares geométricos, requieren del uso de una técnica más avanzada. Por ejemplo:

Se plantea el problema de determinar una curva tal que los segmentos de tangentes comprendidos entre los puntos de contacto y una recta fija, sean iguales a una constante  $c > 0$ . Este lugar geométrico fué llamado por Leibnitz *tractoria*, y en castellano se conoce por el nombre de *tractriz*.



Tomando como eje de las  $y$  la recta fija, y supuesto que pasa por el punto  $C = (c, 0)$  en donde tiene tangente horizontal, la función  $y(x)$  cuya grafo es la tractriz debe verificar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq c$$

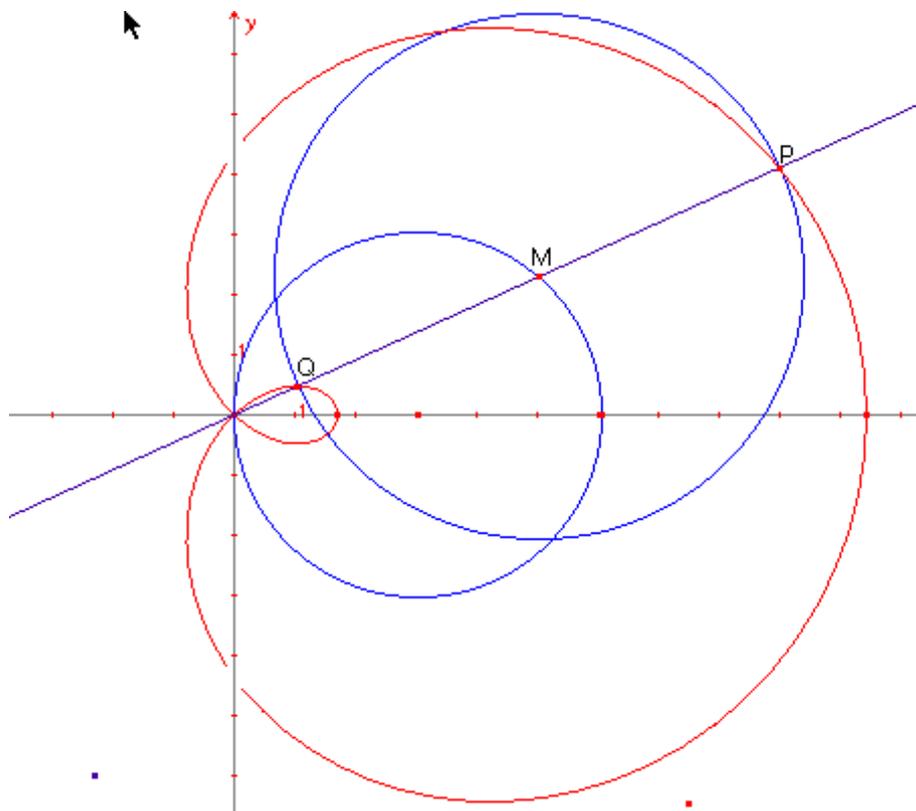
Una parametrización posible es:

$$\begin{aligned} x &= c \sin t \\ y &= c(\cos t + \log(\tan(t/2))) \end{aligned}$$

Ver [7] [419] [?] (pág 73)

### 1.5.6. Caracoles (o limaçon) de Pascal

Fijemos en una circunferencia de centro  $C$ , un punto  $O$ , y tomemos sobre cada una de las cuerdas  $OM$  que pasan por  $O$ , dos segmentos  $MP$  y  $MQ$  de longitud un número fijo  $h > 0$ . El lugar geométrico de los puntos  $P$  y  $Q$  se denomina *caracol de Pascal*. Estas curvas fueron llamadas por Roberval *limaçon de Pascal* que las estudió hacia 1730). Ver [7][213]



Tomando el eje  $OC$  referencia de las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  y llamando  $a$  al diámetro del círculo su ecuación polar queda:

$$\rho = a \cos \theta \pm h$$

**Ejercicio 12** *Demostrar que los caracoles de Pascal, son un caso particular de epicicloides alargadas y acortadas en los que los radios de las circunferencias fija y rodante coinciden ( $R = r$ ).*

**La Cardiode como caracol de pascal** [7][565] La cardioide tiene por ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} X = 2r \cos t - r \cos(2t) \\ Y = 2r \sin t - r \sin(2t) \end{cases}$$

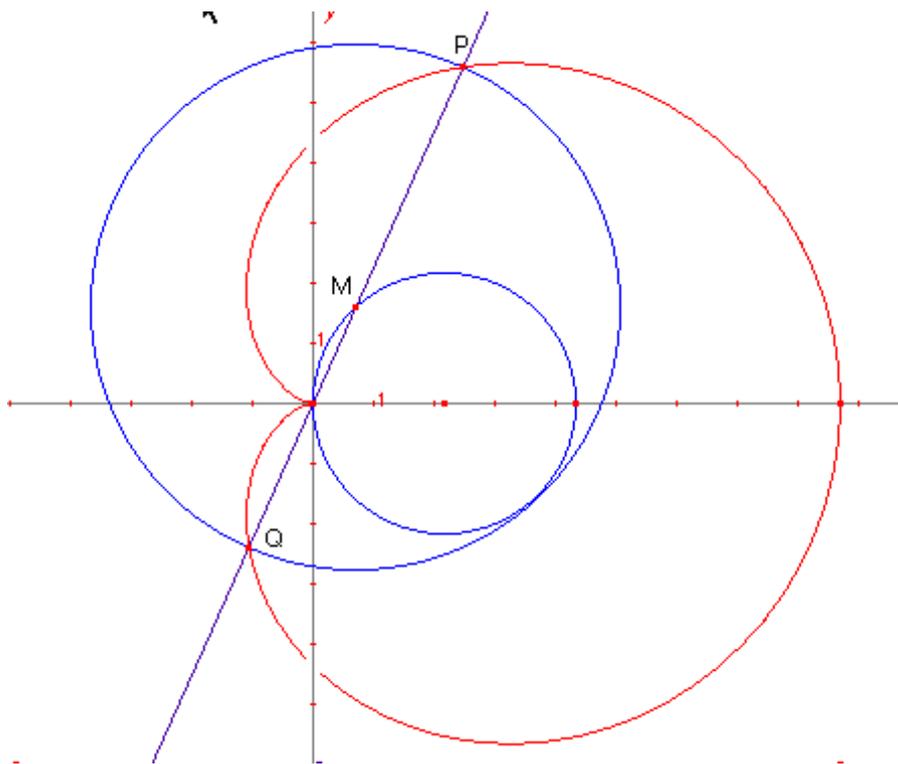
transportar el origen al punto  $(r, 0)$  significa hacer el cambio de coordenadas  $x = X - r$ ,  $y = Y$  y pasando luego a polares  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = 2r(1 - \cos t) \cos t \\ y = \rho \sin \theta = 2r \sin t - r \sin(2t) \end{cases}$$

lo que proporciona las relaciones  $\tan \theta = \tan t$ , y por tanto

$$\rho = 2r(1 - \cos \theta)$$

que es el simétrico de un caracol de pascal para  $h = a$  respecto al eje  $y$ .



Este desarrollo analítico, prueba en particular que  $\theta = t$ , y recordando el significado geométrico de ambos parámetros, se obtiene:

*La recta que pasa por los centros del círculo fijo y del móvil, es paralela a la que pasa por punto de retroceso y el punto del círculo móvil que describe la cardioide.*

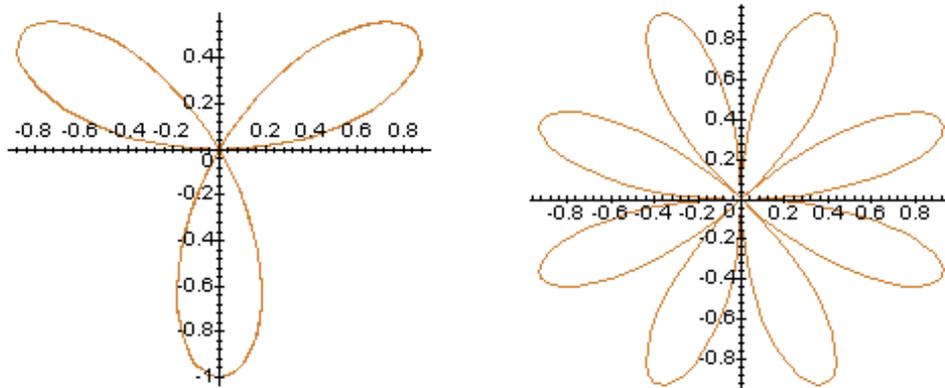
La coincidencia de la cardioide con un tipo especial de caracol de Pascal, fué obtenida por La Hire en 1708.[7][232]

### 1.5.7. Rosaceas

[7] [604] Haciendo en la ecuación de las epicicloides alargadas  $a = R + r$ , y pasando a las coordenadas polares  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , se obtiene:

$$\rho = 2(R + r) \sin \frac{R}{R + 2r} \theta$$

es decir:  $\rho = c \sin m\theta$ . La forma de cada rosácea depende del valor de  $m$



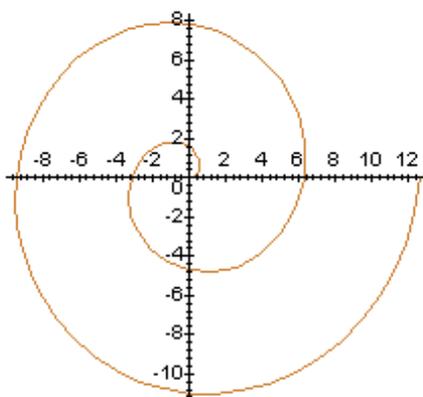
**Ejercicio 13** Probar la afirmación anterior, y determinar, la relación entre los parámetros  $t$  y  $\theta$

### 1.5.8. Espirales

[7] (Tomo II pág 59 Cap VIII)

**Espiral de Arquímedes** [7] [459] Consideremos una recta  $OM$  que gira alrededor de un punto fijo  $O$  y sobre esta recta un punto  $M$  que se desplaza por ella. Supongamos que las velocidades de los movimientos es constante y que el punto móvil parte del origen  $O$ . El lugar descrito por  $M$  es la curva llamada espiral de Arquímedes, y tiene por ecuación polar:

$$\rho = a\theta$$



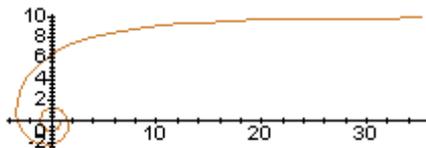


Figura 3:

**Ejercicio 14** Probar que la longitud de la espiral de arquímedes entre el origen  $O$  y un punto a distancia  $\rho$  coincide con la longitud de la parábola de ecuación  $y^2 = 2ax$  entre su vértice, y el punto  $x = \rho$

**Espiral hiperbólica** [7] [472-473] También es llamada inversa de la de Arquímedes.

Bernoulli ha demostrado que esta espiral es una de las curvas que puede describir un punto atraído hacia un centro por una fuerza inversamente proporcional al cubo de la distancia.

Tiene por ecuación:

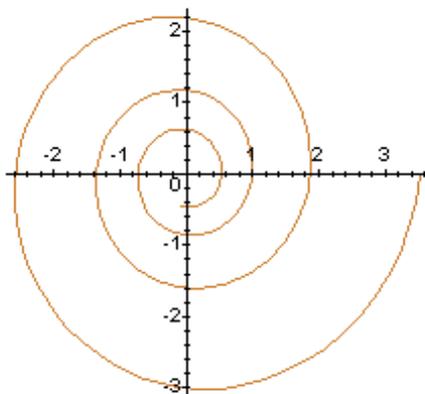
$$\rho\theta = m$$

**Espiral logarítmica** [7] [476- ..] Se sabe que el ángulo  $\eta$  formado por el radio vector de un punto,  $\alpha(t)$  de una curva con la tangente en dicho punto a la curva, es constante. Entonces, la curva  $\alpha$  se llama espiral logarítmica.

En coordenadas polares, la condición se expresa:

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{1}{a}$$

lo que da  $\rho = Ce^{a\theta}$ .



Esta curva fué inicialmente estudiada por Descartes (1638) y posteriormente por Torricelli y Wallis, pero quizás quien más ha analizado esta curva es Jacques Bernoulli, quien descubrió entre otras muchas la siguiente propiedad notable:

**Ejercicio 15** *Demostrar que la espiral logarítmica permanece invariante por homotecias de centro el polo.*

### 1.5.9. Curvas podarias

La curva podaria de una curva plana  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  respecto a un punto  $M$  del plano, es el lugar geométrico de los puntos  $P$  que son pié de las perpendiculares trazadas desde el punto  $M$  a las rectas tangentes a  $\alpha$ .

Si  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , y  $M = (a, b)$ , entonces las ecuaciones de  $\beta(t)$  se escribe como:

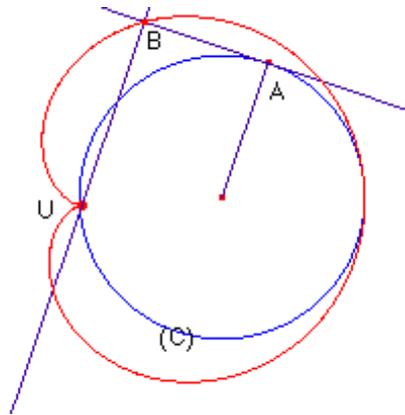
$$\beta(t) = M + \text{proy}_{\perp \alpha'(t)} \left( \overrightarrow{M\alpha(t)} \right) = M + \frac{\overrightarrow{M\alpha(t)} \cdot (\perp \alpha'(t))}{|\alpha'(t)|^2} \perp \alpha'(t)$$

es decir

$$\beta(t) = (a, b) + \frac{(x(t) - a, y(t) - b) \cdot (-y'(t), x'(t))}{x'(t)^2 + y'(t)^2} (-y'(t), x'(t))$$

### Podarias de la circunferencia

**Ejercicio 16** [7] [218] ..] *La podaria de una circunferencia respecto a un punto  $M$  distinto de su centro, es un caracol de Pascal, que se transforma en una cardioide, cuando  $M$  está sobre la circunferencia.*



### Podaria de la espiral logarítmica

**Ejercicio 17** [7] [218] (pág 80) *La podaria de una espiral logarítmica respecto a su polo es otra espiral logarítmica*

### Podaria de un epicicloide

**Ejercicio 18** [7] [558] *La podaria de un epicicloide respecto al punto  $O$  es una rosacea*

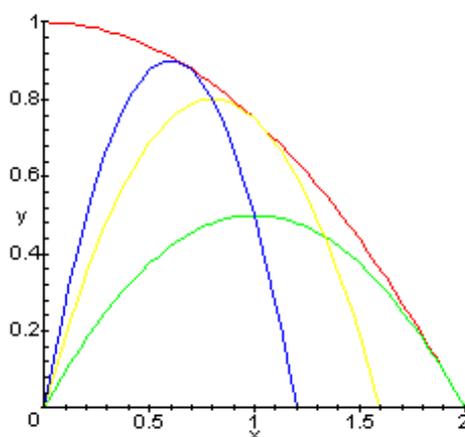
## 2. Envolvertes

### 2.1. Parábola de seguridad

Supongamos situado en el origen de coordenadas un cañón que lanza proyectiles a una velocidad (escalar) de salida  $v_0$  *m/seg* que supondremos una característica (constante) del arma. Sea  $\theta$  el ángulo de inclinación respecto al suelo (eje  $x$ )  $0 < \theta < \pi/2$ . Supongamos que en el instante  $t = 0$  dispara. Como vimos en el epígrafe 1.1.3 la familia de trayectorias descritas por el proyectil, para los diferentes ángulos  $\theta$  de lanzamiento son las parábolas invertidas dadas en (1) que podemos escribir en la forma

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \theta)x^2 + (\tan \theta)x, \quad 0 < \theta < \pi/2$$

Nuestro problema ahora es determinar cual es la zona del cuadrante positivo del plano en la que nos podamos sentir seguros de no ser alcanzados por los proyectiles. Esta zona, veremos que está limitada por una parábola denominada parábola de seguridad.



En (2) y (3) dábamos el alcance y altura máxima de un lanzamiento en función del ángulo  $\theta$  de lanzamiento. El absurdo lanzamiento vertical es el que consigue la máxima altura de todos que vale

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

El máximo alcance se obtiene para  $\theta = \pi/4$  y vale exactamente  $2h$ .

haciendo  $\lambda = \tan \theta$  la familia  $(\mathcal{P}_\lambda)$  de parábolas viene ahora por descrita por:

$$y = -\frac{1 + \lambda^2}{4h}x^2 + \lambda x, \quad 0 < \lambda < +\infty \quad (16)$$

Proponemos como parábola  $\mathcal{P}$  de seguridad, una parábola invertida con vértice en  $(0, h)$  pasando por  $(2h, 0)$ , es decir:

$$y = -\frac{1}{4h}x^2 + h, \quad 0 < x < 2h \quad (17)$$

debe observarse ahora que nuestra elección ha sido adecuada, ya que para cada valor concreto de  $\lambda$ , la ecuación :

$$-\frac{1 + \lambda^2}{4h}x^2 + \lambda x = -\frac{1}{4h}x^2 + h$$

admite solución (doble) única  $x = 2h/\lambda$ , es decir, las parábolas  $\mathcal{P}_\lambda$  con  $0 < \lambda \leq 1$ , no atraviesan  $\mathcal{P}$  y para  $1 < \lambda$  se tiene:

$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P} = \{T_\lambda\} \text{ con } T_\lambda = \left( \frac{2h}{\lambda}, h \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \right)$$

así por razones intuitivo-topológicas, se concluye que  $\mathcal{P}_\lambda$  no puede atravesar al otro lado de la frontera  $\mathcal{P}$  pues en ese caso  $\mathcal{P}_\lambda$  debería cortar más tarde otra vez a  $\mathcal{P}$ . Se tiene así:

*La parábola de seguridad  $\mathcal{P}$  es tangente a cada  $\mathcal{P}_\lambda$ ,  $1 < \lambda$  en un punto  $T_\lambda$ , y  $\mathcal{P} = \{T_\lambda : 1 < \lambda\}$*

[2] pág 7- 19 [4] pág 113-114.

## 2.2. Haces de curvas planas

Un haz de curvas planas, es una familia  $\{\mathcal{C}_\lambda\}$  de curvas, donde el parámetro  $\lambda$  varía en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  y la curva  $\mathcal{C}_\lambda$  varía diferenciablemente con  $\lambda$ . Cada curva  $\mathcal{C}_\lambda$ , se supone que es (i.e. admite una parametrización) regular a pedazos. Los puntos donde  $\mathcal{C}_\lambda$  no admite tangente única, se denominan puntos singulares del haz.

La familia  $(\mathcal{P}_\lambda)_{1 < \lambda}$  de las trayectorias parabólicas de tiro del epígrafe anterior, es un ejemplo de haz sin puntos singulares.

### 2.2.1. Ecuaciones de un haz de curvas

Una forma de dar un haz de curvas planas, consiste en dar una función diferenciable

$$\mathbb{D} \times \Lambda \ni (x, y, \lambda) \rightarrow f(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}$$

de forma que  $\Lambda$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y para cada  $\lambda \in \Lambda$  la curva  $\mathcal{C}_\lambda$  viene implícitamente definida por la ecuación

$$f(x, y, \lambda) = 0 \quad (18)$$

La ecuación anterior se le llama ecuación implícita del haz.

Otra forma de dar un haz de curvas, consiste en dar paramétricamente cada  $\mathcal{C}_\lambda$  :

$$\begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \end{cases} \quad (19)$$

donde  $x(t, \lambda)$ ,  $y(t, \lambda)$  son funciones diferenciables.

A veces la ecuación del haz, puede venir dado de la forma:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ g(\lambda, \mu) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

en donde se supone que es posible despejar localmente  $\lambda$  o  $\mu$  de la segunda ecuación para sustituirla en la primera.

Pongamos algunos ejemplos elementales

**Haz de tangentes a una curva regular** Dada una curva regular  $\alpha : I \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  la familia de rectas tangentes a  $\alpha$  constituye un haz, (de parámetro  $t$ ) con ecuación implícita:

$$y'(t)(x - x(t)) - x'(t)(y - y(t)) = 0$$

**Haz de normales a una curva regular** Análogamente, para la curva regular anterior, el haz de rectas normales, viene definido por

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) = 0$$

### 2.3. Envoltente de un haz

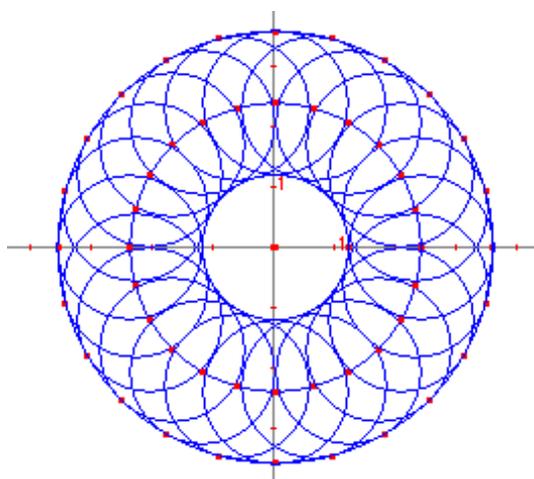
Recordemos que dos curvas  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  se dice que se cortan tangencialmente en un punto  $T$  si para ciertos  $t_0 \in I, s_0 \in J$ ,  $T = \alpha(t_0) = \beta(s_0)$  es punto regular para  $\alpha$  y  $\beta$ , y los vectores  $\alpha'(t_0)$  y  $\beta'(s_0)$  son proporcionales. Es claro que este concepto no depende de las parametrizaciones regulares concretas dadas a las curvas  $\alpha$  y  $\beta$

*Dado un haz  $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  una curva  $\mathcal{E}$  (que admite una parametrización regular, se dice envoltente del haz, si corta tangencialmente a cada curva del haz. Además, todos los puntos de  $\mathcal{E}$  son puntos de tangencia, y en particular son puntos no singulares del haz.*

Hay una parametrización especial de la envoltente  $\mathcal{E}$  adaptada a su haz  $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  que usa el parámetro  $\lambda \in \Lambda$ . Es la dada por  $\Lambda \ni \lambda \rightarrow \varepsilon(\lambda) \in \mathbb{R}^2$ , de manera que  $\varepsilon(\lambda)$  es el punto de tangencia de  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{C}_\lambda \forall \lambda \in \Lambda$

### 2.3.1. Primeros ejemplos

1. El segmento de parábola  $\mathcal{P}$  dado en (17) es envolvente del haz  $\{\mathcal{P}_\lambda : 1 < \lambda\}$  de los segmentos parabólicos  $\mathcal{P}_\lambda$  dados en (16)
2. Cada curva regular, es envolvente de su propio haz tangente. La envolvente del haz normal, se denomina evoluta. Dedicaremos a ella la última parte del curso.
3. Considérese la familia de circunferencias de radio  $r$  con centros sobre una circunferencia de radio  $R$ ,  $R > r > 0$



La ecuación de la familia puede ser:

$$(x - R \cos \lambda)^2 + (y - R \sin \lambda)^2 = r^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi$$

y obviamente su envolvente está formada por las circunferencias de radios  $R + r$  y  $R - r$ .

1. La familia de todas las rectas cuya distancia al origen es igual a  $R$  tiene como ecuación (por ejemplo):

$$\begin{aligned} \lambda(x - \lambda) + \mu(y - \mu) &= 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 &= 1 \end{aligned}$$

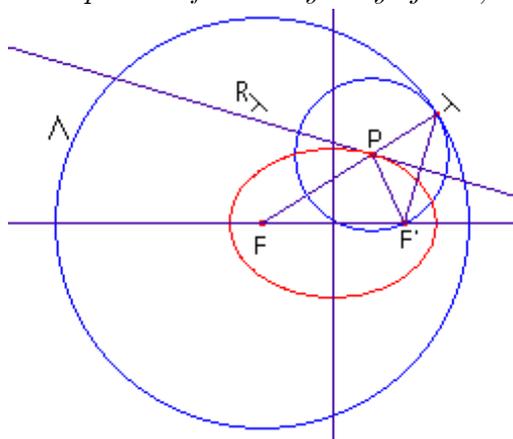
su envolvente, es evidentemente la circunferencia de radio  $R$ .

### 2.3.2. Las cónicas como envolventes de haces de rectas.

Consideremos una circunferencia  $\Lambda$  de centro  $F$ , y radio  $2a$ , y un punto  $F'$  a distancia  $2c$  de  $F$ . Para cada  $\lambda \in \Lambda$  se considera la mediatriz  $\mathcal{R}_\lambda$  del segmento definido por  $F'$ , y  $\lambda$ .

**Caso de la elipse** Si el punto  $F'$  está dentro del círculo definido por  $\Lambda$  (es decir  $c \leq a$ ) entonces:

*La elipse con focos  $F$  y  $F'$  y eje  $2a$ , es la envolvente del haz  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*



En efecto, tal elipse tiene a  $\Lambda$  por circunferencia focal, y se obtiene como el lugar geométrico de los puntos  $P$ , que son centro de una circunferencia que pasa por  $F'$  y es tangente a  $\Lambda$ , de manera que fijado  $\lambda \in \Lambda$ , el punto  $T_\lambda$  intersección de  $\mathcal{R}_\lambda$  con la recta  $F'\lambda$  está en la cónica. Si en  $R_\lambda$  hubiera otro punto  $T_{\lambda'}$  de la cónica ( $\lambda' \in \Lambda$ ) se tiene:

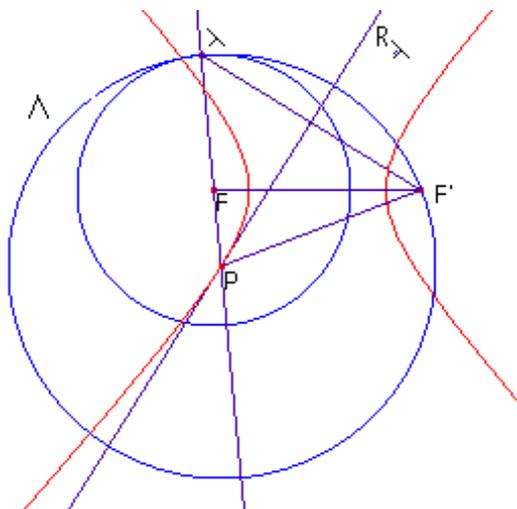
$$d(T_{\lambda'}, \lambda) = d(T_{\lambda'}, F') = d(T_{\lambda'}, \lambda')$$

como la circunferencia centrada en  $T_{\lambda'}$  que pasa por  $\lambda'$  es tangente a  $\Lambda$ , se concluye que  $\lambda' = \lambda$ . Así resulta que  $\mathcal{R}_\lambda$  es tangente a la elipse en  $T_\lambda$

El resultado anterior nos proporciona además un procedimiento para determinar la recta tangente  $L$  en un punto  $P$  a una elipse de la que se conocen los focos  $F$  y  $F'$ :  $L$  es la bisectriz del ángulo adyacente a  $\widehat{FPF'}$

**Caso de la hipérbola** Si el punto  $F'$  está fuera del círculo definido por  $\Lambda$  (es decir  $c > a$ ) entonces:

*La hipérbola con focos  $F$  y  $F'$  y eje  $2a$ , es la envolvente del haz  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*

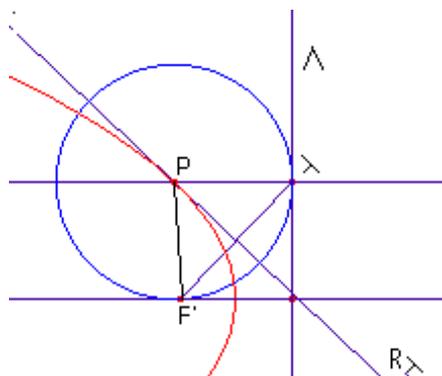


El resultado anterior nos proporciona además un procedimiento geométrico para determinar la recta tangente  $L$  en un punto  $P$  a una elipse de la que se conocen los focos  $F$  y  $F'$ :  $L$  es la bisectriz del ángulo  $\widehat{FPF'}$

**Ejercicio 19** Probar las afirmaciones anteriores.

**Caso de la parábola** En este caso,  $\Lambda$  se transforma en una recta, y  $F' \notin \Lambda$ . Definiendo  $\mathcal{R}_\lambda$  como antes, se tiene

*La parábola con foco  $F'$  y directriz  $\Lambda$ , es la envolvente del haz  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ .*



En efecto, fijado  $\lambda \in \Lambda$ , el punto  $T_\lambda$  en la intersección de la mediatriz  $R_\lambda$  y la perpendicular a  $\Lambda$  por  $\lambda$  es el único punto de  $R_\lambda$  que está en la parábola, así,  $R_\lambda$  es tangente a la parábola en  $T_\lambda$ .

Además esto proporciona un procedimiento geométrico para determinar la línea tangente por un punto  $P$  a una parábola de la que se conoce el foco y la directriz.

**Propiedades de reflexión de las cónicas.** Una inspección atenta a las figuras anteriores nos permite afirmar

1. Si colocamos en uno de los focos de la elipse una fuente puntiforme de luz, resulta ser que cada rayo al reflejarse en la elipse llegará al otro foco.
2. Los rayos paralelos al eje de una parábola, al reflejarse en ella, se reúnen en el foco.
3. Hay también una propiedad de reflexión para la hipérbola.

## 2.4. Determinación de la envolvente

Vamos a describir aquí técnicas de tipo más bien analítico para determinar las ecuaciones de la envolvente de un haz de curvas planas. Las referencias para este apartado son [2] (págs 50- ) y [4] (Cap 7)

### 2.4.1. Intersección entre líneas próximas

Dado un haz de curvas planas  $f(x, y, \lambda) = 0$  como en (18), y un punto  $P \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ , para cierto  $\lambda_0 \in \Lambda$ , se dice que  $P$  es un punto de aproximación del haz, si hay una aplicación:

$$(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \ni \lambda \rightarrow P_\lambda \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$$

de forma que cada  $P_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} P_\lambda = P$ .

Se supone que las coordenadas  $(x, y)$  de los puntos  $P_\lambda$  son solución del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda_0) = 0 \\ f(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$f(x, y, \lambda_0) = 0, \frac{f(x, y, \lambda) - f(x, y, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

cuando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$   $P_\lambda$  tiende a  $P$ , por tanto sus coordenadas  $(x_0, y_0)$  satisfacen, por paso al límite:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ f_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}$$

donde  $f_\lambda$  denota la derivada parcial de  $f$  respecto a  $\lambda$

### 2.4.2. Línea discriminante

Es natural pensar que la envolvente  $\mathcal{E}$  de la familia,  $f(x, y, \lambda) = 0$  como en (18), está formada por los puntos de aproximación que no son singulares. Por esto los puntos de la envolvente deben verificar las ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Los puntos que verifican las ecuaciones anteriores, constituyen la línea  $\mathcal{D}$  discriminante, que necesariamente contiene a la envolvente  $\mathcal{E}$ .

### 2.4.3. Determinación analítica local de la envolvente

Analicemos el sistema de ecuaciones (21) en torno a una solución  $P_0 = (x_0, y_0, \lambda_0)$  en donde

$$\det \begin{pmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial f_\lambda / \partial x & \partial f_\lambda / \partial y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, \lambda_0)} \neq 0$$

usando el teorema de la función implícita, se concluye que existe un intervalo  $\Lambda_0$  abierto de  $\Lambda$  con  $\lambda_0 \in \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ , y una curva regular  $\varepsilon : \Lambda_0 \ni \lambda \rightarrow (x(\lambda), y(\lambda)) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\lambda \in \forall \Lambda_0$  se verifica

$$\begin{cases} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \\ f_\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \end{cases}$$

en estas condiciones resulta que  $\varepsilon$  es envolvente del (sub)haz  $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ , y viene dada por la parametrización adaptada. En efecto, derivando respecto a  $\lambda$ , la primera ecuación, y usando luego la segunda para un valor cualquiera de  $\lambda$ , se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} = 0$$

lo que indica que fijado  $\lambda \in \Lambda_0$ ,  $\varepsilon$  es tangente a  $f(x, y, \lambda) = 0$  en  $\varepsilon(\lambda)$ .

**Ejercicio 20** Supongamos que nuestro haz de curvas  $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  viene dada paramétricamente por ecuaciones del tipo 20, es decir:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ g(\lambda, \mu) = 0 \end{cases}$$

entonces, la envolvente del haz satisface (localmente) la ecuación en las coordenadas  $x, y$  que se obtiene al eliminar los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  en el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ g(\lambda, \mu) = 0 \\ \det \begin{pmatrix} \partial f / \partial \lambda & \partial f / \partial \mu \\ \partial g / \partial \lambda & \partial g / \partial \mu \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 21** Supongamos que nuestro haz de curvas  $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  viene dada paramétricamente por ecuaciones del tipo 19 es decir

$$\begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \end{cases}$$

entonces, la envolvente del haz satisface (localmente) la ecuación en las coordenadas  $x, y$  que se obtiene al eliminar los parámetros  $t, \lambda$  en el sistema:

$$\begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \\ \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial t & \partial x / \partial \lambda \\ \partial y / \partial t & \partial y / \partial \lambda \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 22** Demostrar analíticamente que la elipse (ó la hipérbola) es la envolvente del haz de  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  descrito en el epígrafe 2.3.2.

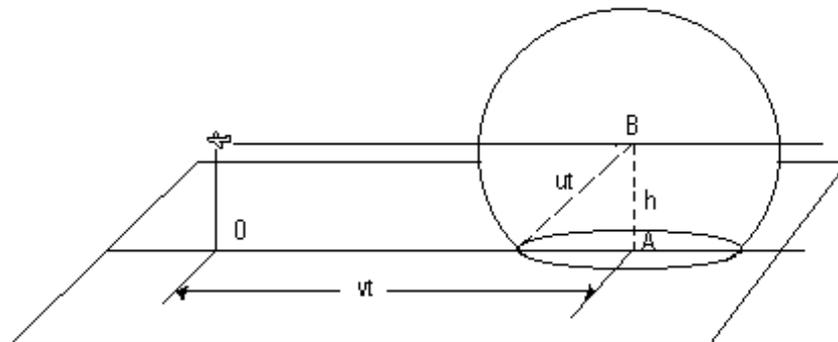
**Ejercicio 23** Demostrar analíticamente que la parábola es la envolvente del haz de  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  descrito en el epígrafe 2.3.2

## 2.5. Hazes y envolventes notables

### 2.5.1. Zona de audibilidad de un avión supersónico

Un avión vuela a una altura constante  $h$  sobre la superficie terrestre a la velocidad supersónica  $v$ . ¿Cual es en un determinado momento la región de la superficie terrestre en cuyos puntos ya se ha oído o se está oyendo el sonido del avión?. Veremos que este es un problema geométrico que se puede resolver determinando la envolvente de cierta familia de circunferencias.

Para establecer el planteamiento geométrico del problema vamos a suponer, que la superficie sobre la que vuela el avión es plana, y que su velocidad es constante  $v$ . Cada instante el avión se proyecta verticalmente en el plano de la tierra sobre un punto (digamos su sombra) que se mueve a velocidad  $v$  describiendo una línea recta  $L$  paralela a la trayectoria del avión. Denotemos por  $u$  la velocidad escalar del sonido en el aire.



Admitamos que en el instante de tiempo en el que estamos interesados en determinar la zona de audibilidad, el avión se encuentra en el origen  $O$  de un sistema de coordenadas donde el eje de las  $x$  coincide con  $L$ . Hace  $t$  segundos, la sombra se encontraba en el punto  $A$  a la derecha del  $O$  a una distancia  $|OA| = vt$ . El avión estaba entonces en  $B$  y produjo un ruido que comenzó a propagarse desde  $B$  en todas las direcciones. Transcurridos  $t$  segundos, este sonido llega a todos los puntos de la bola de radio  $ut$  centrada en  $B$ . Si el radio  $ut$  es mayor que  $h$  el sonido ha tenido tiempo de llegar hasta la tierra, concretamente a todos al círculo intersección del plano de la tierra con la esfera anterior, es decir al círculo centrado en  $A$  y con radio  $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ , cuya circunferencia contorno, tiene por ecuación:

$$f(x, y, t) = (x - vt)^2 + y^2 + h^2 - u^2t^2 = 0 \quad (22)$$

Consideremos entonces el haz de circunferencias dado por (22) para  $t > 0$ . La zona de audibilidad se obtiene entonces como envolvente de dicha familia, es decir derivando respecto a  $t$  queda:

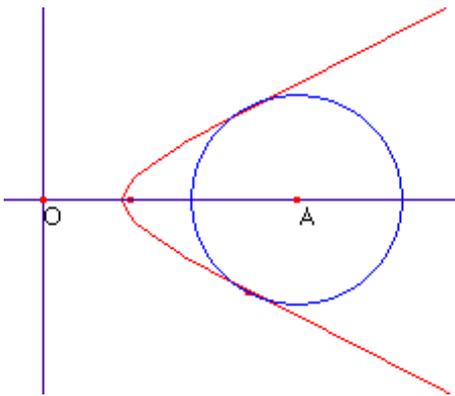
$$f'_t(x, y, t) = -2v(x - vt) - 2u^2t = 0$$

de esta relación se obtiene

$$t = \frac{vx}{v^2 - u^2}$$

y sustituyendo en (22) queda como envolvente la rama derecha de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{\frac{(v^2 - u^2)^2}{u^2}} - \frac{y^2}{h^2} = 1$$



Un argumento que no usa la técnica de la envolvente puede verse en [2] pág 26-31

### 2.5.2. La podaria como envolvente de circunferencias

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular. La podaria respecto a un punto  $O$  (que supondremos que es el origen de coordenadas, es decir  $O = (0, 0)$ ) es

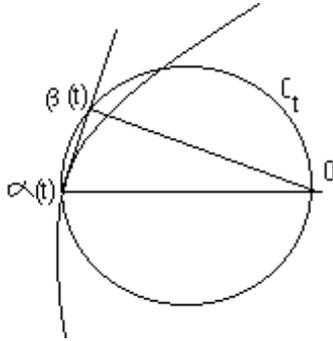


Figura 4:

como sabemos la curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\beta(t)$  es el pie de la perpendicular trazada desde  $O$  a la recta tangente a  $\alpha$  por  $\alpha(t)$ . Así  $\beta(t)$  viene determinado en función de  $\alpha(t)$  por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \beta(t) \cdot (\beta(t) - \alpha(t)) = 0 \\ \beta(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

demostraremos que:

*La podaria  $\beta$  de  $\alpha$  es la envolvente del haz de circunferencias  $\{\mathcal{C}_t : t \in I\}$  donde  $\mathcal{C}_t$  es la circunferencia con diámetro  $O\alpha(t)$ . Además la parametrización de  $\beta$  está adaptada al haz.*

En la figura se ve que el punto  $\beta(t)$  está en la intersección de  $\mathcal{C}_t$  con la tangente a  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ . De hecho  $\beta'(t)$  es tangente a  $\mathcal{C}_t$ . Sin embargo, esto no es fácil de ver geoméricamente. Veamos analíticamente que de hecho  $\beta$  es la envolvente de  $\{\mathcal{C}_t : t \in I\}$ . En efecto, la circunferencia  $\mathcal{C}_t$  tiene por ecuación (implícita)

$$f(x, y, t) = (x, y) \cdot (x, y) - (x, y) \cdot \alpha(t) = 0$$

así la envolvente, verifica las ecuaciones:  $f(x, y, t) = 0$ ,  $f'_t(x, y, t) = 0$ , es decir:

$$\begin{cases} (x, y) \cdot ((x, y) - \alpha(t)) = 0 \\ (x, y) \cdot \alpha'(t) = 0 \end{cases}$$

que las verifica también  $\beta(t) = (x(t), y(t))$ .

**Los caracoles de Pascal como envolventes de circunferencias.** Un tipo interesante de problema puede ser el siguiente: [5] pág 174

Dada una curva  $\mathcal{C}$  y un punto  $P$  determinar la envolvente del haz de circunferencias que pasan por  $P$ , y con centro en *todos* los puntos de  $\mathcal{C}$ .

Las curvas obtenidas por este procedimiento cuando  $\mathcal{C}$  es una circunferencia, son los caracoles de Pascal:

En efecto, sabemos que un caracol de Pascal,  $\mathcal{P}$  es la podaria respecto a cierto punto  $P$  de una circunferencia  $\Lambda$ . Por el epígrafe anterior,  $\mathcal{P}$  es la envolvente de la familia  $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  donde  $\mathcal{C}_\lambda$  es la circunferencia con diámetro  $P\lambda$  así que el centro de  $\mathcal{C}_\lambda$  recorre la circunferencia  $\mathcal{C}$  obtenida de  $\Lambda$  por medio de una homotecia centrada en  $P$ , y de razón  $1/2$

**Ejercicio 24** Probar que cuando se toma  $\mathcal{C}$  una parábola, y  $P$  su vértice, se obtiene una cisoide.

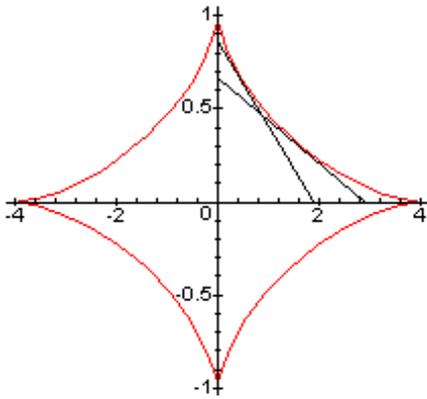
**Ejercicio 25** Si  $\mathcal{C}$  es una hipérbola y  $P$  es su centro, probar que la curva obtenida es una Lemniscata.

### 2.5.3. El haz tangente de la Astroide

Se trata de probar que la astroide de ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

es la envolvente de la familia de segmentos móviles de longitud constante  $l$  que cuyos extremos se apoyan en los ejes de coordenadas. Daremos aquí un argumento analítico. ver [4] (Pág 117) para un argumento geométrico ver [2] pág 42-46.



Haremos los cálculos en el primer cuadrante, extendiendo luego por simetría, el resultado a los demás cuadrantes. Como el segmento tiene longitud  $l$  pasa por los puntos  $(l \cos \lambda, 0)$  y  $(0, l \sin \lambda)$  así la familia de rectas se escribe

$$f(x, y, \lambda) = y + x \tan \lambda - l \sin \lambda = 0 \quad (24)$$

derivando respecto a  $\lambda$  e igualando a cero se obtiene  $\frac{1}{\cos^2 \lambda} x - l \cos \lambda = 0$  y por tanto

$$x = l \cos^3 \lambda$$

sustituyendo en (24) se obtiene

$$y = l \sin^3 \lambda$$

estas dos últimas ecuaciones determinan las paramétricas de la astroide.

**Ejercicio 26** Determinar la envolvente de un lado de un ángulo recto, cuyo vértice recorre una recta, y el otro lado está obligado a pasar por un punto fijo  $P$ .

**Ejercicio 27** Demostrar que si un haz de rayos paralelos incide en una semicircunferencia, perpendicularmente al diámetro, la curva envolvente de los rayos reflejados (cáustica de reflexión) es una nefroide.

### 3. Evolutas y evolventes

#### 3.1. Evoluta

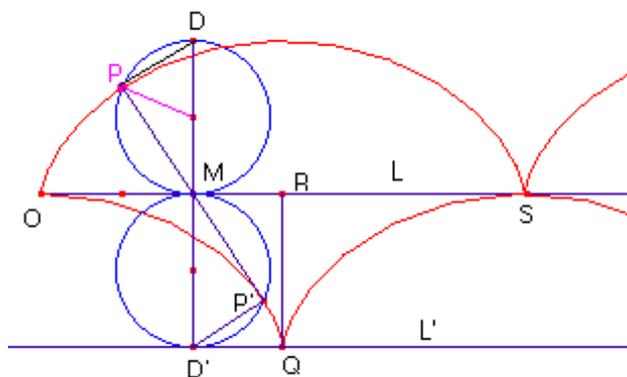
[4] pág114-117. Recordemos que dada una curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ , y  $\lambda \in I$  un punto regular de  $\alpha$ , la recta normal a  $\alpha$  en  $\lambda$ , que es la recta  $\mathcal{N}_\lambda$  que pasa por  $\alpha(\lambda)$ , y tiene la dirección de  $\perp\alpha'(\lambda)$ . Sus ecuaciones son:

$$\frac{x - x(\lambda)}{-y'(\lambda)} = \frac{y - y(\lambda)}{x'(\lambda)} \quad (25)$$

La familia  $\{\mathcal{N}_\lambda : \lambda \in I\}$  constituye un haz de rectas, y su envolvente se denomina evoluta de  $\alpha$

##### 3.1.1. La evoluta de una Cicloide

[2] pág 46-49 Un bonito ejemplo de determinación geométrica de la evoluta, lo constituye el caso de la cicloide:



Examinemos las dos cicloides de la figura. Probaremos que la cicloide inferior es la evoluta de la superior, es decir, cualquier normal a la cicloide superior es tangente a la inferior. En efecto:

Consideremos la cicloide superior obtenida por la traza del punto  $P$  al girar la circunferencia  $C$  por la recta  $L$ . Examinemos cierta posición del círculo de rodadura  $C$ , y construyamos el círculo  $C'$  simétrico de  $C$  respecto al punto  $M$ . Se denotan por  $D'$ ,  $P'$  simétricos correspondientes a  $D$  y  $P$ . Lo

único que debemos justificar, es que al moverse  $P$  por la cicloide superior,  $P'$  describe la cicloide inferior, ya que probado esto, por lo que se vió en el epígrafe 1.1.10 se deduce que  $PD$  (respec.  $MP'$ ) es tangente a la cicloide superior (respec. inferior), y así la recta  $PP'$  es normal a la superior (en  $P$ ) y tangente a la inferior (en  $P'$ ).

Probemos pues que la longitud del arco  $\widehat{D'P'}$  coincide con la del segmento  $D'Q$ . En efecto, el segmento  $OM$  tiene la misma longitud que el arco  $\widehat{MP}$  y el segmento  $OR$  longitud  $\pi r$ , por consiguiente, el segmento  $MR$  (igual al  $D'Q$ ) tiene la misma longitud que el arco  $\widehat{PD}$  (igual a la del  $\widehat{D'P'}$ )

### 3.1.2. Determinación paramétrica de la evoluta.

Las ecuaciones de la familia  $\{\mathcal{N}_\lambda : \lambda \in I\}$  de las rectas normales a la curva  $\alpha(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ ,  $\lambda \in I$  puede escribirse en la forma:

$$f(x, y, \lambda) = (x - x(\lambda))x'(\lambda) + (y - y(\lambda))y'(\lambda) = 0 \quad (26)$$

así que la envolvente de la familia se obtiene añadiendo a esta ecuación  $f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ , que equivale a

$$(x - x(\lambda))x''(\lambda) + (y - y(\lambda))y''(\lambda) = x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2 \quad (27)$$

Podemos pensar que (26) y (27) determinan un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas  $(x - x(\lambda))$ ,  $(y - y(\lambda))$  y supuesto que  $\alpha'(\lambda)$ , y  $\alpha''(\lambda)$  son linealmente independientes, y aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x - x(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y' \\ (x')^2 + (y')^2 & y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} \quad y - y(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} x' & 0 \\ x'' & (x')^2 + (y')^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$$

así las ecuaciones paramétricas de la evoluta quedan:

$$\begin{aligned} x &= x(\lambda) - \frac{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2}{x'(\lambda)y''(\lambda) - y'(\lambda)x''(\lambda)}y'(\lambda) \\ y &= y(\lambda) + \frac{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2}{x'(\lambda)y''(\lambda) - y'(\lambda)x''(\lambda)}x'(\lambda) \end{aligned} \quad (28)$$

Naturalmente estas fórmulas tienen sentido solo allí donde los denominadores no se anulen.

### 3.1.3. Determinación implícita de la evoluta

Supongamos dada nuestra curva en forma implícita  $g(\lambda, \mu) = 0$ , en las coordenadas  $(\lambda, \mu)$ , y fijado un punto arbitrario  $(\lambda, \mu)$  con  $g(\lambda, \mu) = 0$ , la ecuación (en coordenadas  $(x, y)$ ) de la recta normal por  $(\lambda, \mu)$  es:

$$f(x, y, \lambda, \mu) = -g_\mu(\lambda, \mu)(x - \lambda) + g_\lambda(\lambda, \mu)(y - \mu) = 0 \quad (29)$$

que junto con la ecuación:

$$g(\lambda, \mu) = 0 \quad (30)$$

nos proporciona la ecuación del haz de rectas. Usando ahora el **Ejercicio 20** la envolvente de la familia se obtiene añadiendo a las ecuaciones (29) y (30) la

$$\begin{vmatrix} f_\lambda & f_\mu \\ g_\lambda & g_\mu \end{vmatrix} = 0$$

que en este caso se escribe así:

$$-\begin{vmatrix} g_{\mu\lambda} & g_\lambda \\ g_{\mu\mu} & g_\mu \end{vmatrix} (x - \lambda) + \begin{vmatrix} g_{\lambda\lambda} & g_\lambda \\ g_{\lambda\mu} & g_\mu \end{vmatrix} (y - \lambda) = g_\lambda^2 + g_\mu^2 \quad (31)$$

De (29) y (31) debería poderse despejar  $\lambda = \varphi(x, y)$ ,  $\mu = \psi(x, y)$  y sustituyendo ahora en (31) quedaría:

$$g(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$$

que sería una ecuación implícita (local) para la evoluta.

### 3.1.4. Evoluta de algunas curvas famosas

#### Evoluta de la elipse

**Ejercicio 28** Probar que la evoluta de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una astroide de afínmente deformada:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

#### Evoluta de la astroide

**Ejercicio 29** Probar que la evoluta de una astroide, es otra astroide homotética (de razón 2) girada  $\pi/2$  radianes respecto al centro de simetría.

#### Evoluta de la espiral logarítmica

**Ejercicio 30** Probar que la evoluta de la espiral logarítmica, es otra espiral logarítmica.

#### Evoluta de la cardioide

**Ejercicio 31** Probar que la evoluta de una cardioide es otra cardioide

**Carácter geométrico de la evoluta** Observe que:

**Ejercicio 32** *La trayectoria de la evoluta  $\beta$  de una curva regular  $\alpha$  solo depende de la trayectoria de  $\alpha$*

### 3.1.5. Fórmulas de Frenet: Curvatura.

Supongamos que la curva  $\alpha : J \ni s \rightarrow (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$  está parametrizada respecto al arco. Entonces resulta que  $|\alpha'(s)| = 1$ . Se denomina a  $T(s) = \alpha'(s)$  vector tangente unitario a  $\alpha$  en  $s \in J$ . Al vector

$$N(s) = (-y'(s), x'(s))$$

se le denomina vector normal unitario. Nótese que para todo  $s \in J$  se verifica

$$T(s).T(s) = 1, N(s).N(s) = 1, T(s).N(s) = 0$$

y así  $(T(s), N(s))$  determinan una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  de forma que para cualquier vector  $X(s)$  de  $\mathbb{R}^2$  se tiene la identidad:

$$X(s) = (X(s).T(s))T(s) + (X(s).N(s))N(s) \quad (32)$$

aplicando lo anterior a los vectores derivados  $T'(s)$  y  $N'(s)$  obtendremos las fórmulas de Frenet:

Derivando (respecto a  $s$ ) ambos miembros de la expresión  $T.T = 1$  se obtiene  $T'.T = 0$ . Aplicando a  $X(s) = T'(s)$  la fórmula (32) se concluye que  $T'(s)$  es proporcional a  $N(s)$  y la constante de proporcionalidad es un número  $k(s)$  que se escribe como

$$k(s) = T'(s).N(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) \quad (33a)$$

y se denomina curvatura de  $\alpha$  en  $s$ . Se tiene así:

$$T'(s) = k(s)N(s) \quad (34)$$

Análogamente se ve que  $N'(s)$  es proporcional a  $T(s)$ , y la constante de proporcionalidad es

$$N'(s).T(s) = -N(s).T'(s) = -k(s)$$

la igualdad anterior se obtiene derivando ambos miembros de  $N.T = 0$ . así se obtiene la fórmula

$$N'(s) = -k(s)T(s) \quad (35)$$

Las fórmulas (34) y (35) se pueden agrupar:

$$\begin{cases} T' = kN \\ N' = -kT \end{cases} \quad (36)$$

que constituyen las llamadas fórmulas de Frenet.

### 3.1.6. Centro y radio de curvatura

Se denomina centro de curvatura de la curva anterior,  $\alpha : J \ni s \rightarrow (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$  en un punto  $\alpha(s)$  en donde la curvatura  $k(s)$  es no nula al punto

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) \quad (37)$$

y se denomina radio de curvatura a la distancia  $\rho(s)$  de  $c(s)$  a  $\alpha(s)$ , es decir :

$$\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$$

**Observación 3** *Si bien el valor absoluto de la curvatura  $|k(s)|$  depende de la trayectoria, el signo de la curvatura depende del sentido de recorrido (trayectoria orientada). Por ejemplo una circunferencia de radio  $R$  recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, tiene curvatura constante,  $k = 1/R$ , y recorrida en el otro sentido, su curvatura es  $k = -1/R$ . Sin embargo el centro de curvatura  $c(s)$  no depende de la orientación. De hecho la circunferencia de centro  $c(s)$  y radio  $\rho(s)$  recorrida en el mismo sentido de la curva  $\alpha(s)$  tiene curvatura igual a  $k(s)$ . Por esto se llama circunferencia oscultriz de  $\alpha$  en  $s$ .*

**La evoluta como lugar de los centros de curvatura** La evoluta de la curva anterior,  $\alpha : J \ni s \rightarrow (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$  puede calcularse por medio de las fórmulas (28) teniendo en cuenta que ahora  $s$  hace el papel de  $\lambda$ , la expresión de la curvatura (33a) y  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ , y se concluye fácilmente que coincide con la curva  $c : J \ni s \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^2$  definida en (37) por los centros de curvatura.

**Significado geométrico del centro y radio de curvatura** Consideremos una curva regular  $\alpha(\lambda)$ ,  $\lambda \in I$  como en el epígrafe 3.1.2 (no necesariamente parametrizada) por el arco, y sea  $c(\lambda)$ ,  $\lambda \in I$  la evoluta descrita por las ecuaciones (28). De esta forma  $c(\lambda)$  representa el punto en el que la recta normal  $\mathcal{N}_\lambda$  tiene contacto tangente con la evoluta  $c$ .

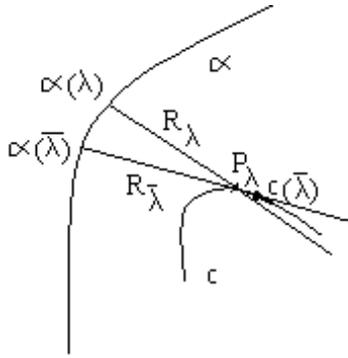
Por otra parte, fijado  $\bar{\lambda} \in I$ , es  $c(\bar{\lambda})$  un punto de aproximación del haz  $\{\mathcal{N}_\lambda\}$  por tanto si  $P_\lambda$  es el punto definido por:

$$\{P_\lambda\} = \mathcal{N}_\lambda \cap \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$$

se concluye que :

$$c(\bar{\lambda}) = \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} P_\lambda$$

y esto proporciona una definición geométrica intrínseca de  $c(\bar{\lambda})$  que tiene ahora *todos los derechos* a denominarse centro de curvatura de la curva  $\alpha$  en el punto  $\alpha(\bar{\lambda})$



Naturalmente el radio y el valor absoluto de la curvatura vienen definido por

$$\rho(\lambda) = \text{dist}(\alpha(\lambda), c(\lambda)), \quad |k(\lambda)| = \frac{1}{\rho(\lambda)}$$

el signo de la curvatura  $k(\lambda)$  depende del signo del determinante  $\det(\alpha', \alpha'')$

Con estas definiciones, la expresión de la evoluta queda:

$$c(\lambda) = \alpha(\lambda) + \frac{1}{k(\lambda) |\alpha'(\lambda)|} (\perp \alpha'(\lambda))$$

y comparando con (28) se obtiene la siguiente fórmula explícita para el cálculo de la curvatura:

$$k = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3}$$

**Observación 4** De hecho la fórmula anterior no depende del cambio de parámetro  $t = t(s)$ , con  $dt/ds > 0$ , sin embargo, como ya indicábamos en la observación 3 la curvatura cambia el signo, si  $dt/ds < 0$ .

**Ejercicio 33** Sea  $\alpha : J \ni s \rightarrow (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por el arco. Si denotamos por  $\mathcal{C}(s_1, s_2, s_3)$  la circunferencia que pasa por los puntos  $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$  para tres puntos  $t_1, t_2, t_3 \in J$ ,  $s_1 < s_2 < s_3$ . Sea  $s_0 \in J$  en donde la curvatura  $k(s_0) \neq 0$ . Demostrar que la circunferencia osculatrix  $\mathcal{C}$  de  $\alpha$  en  $s_0$  se obtiene como

$$\mathcal{C} = \lim_{s_i \rightarrow s_0} \mathcal{C}(s_1, s_2, s_3)$$

**Indicación:** Sea  $f(s) = |\alpha(s) - p(s_1, s_2, s_3)|^2$  siendo  $p(s_1, s_2, s_3)$  el centro de la circunferencia  $\mathcal{C}(s_1, s_2, s_3)$ . Derívese dos veces  $f$ , y aplíquese dos veces el teorema de Rolle.

**Ejercicio 34** Determinar la fórmula que permite calcular la curvatura de una curva dada por su ecuación polar  $\rho = \rho(\theta)$ .

**Ejercicio 35** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva. Un punto  $\alpha(t_0)$  de  $\alpha$  se llama vértice de una curva si  $t_0$  está en el interior del intervalo  $I$ , y es extremo local para la función de curvatura  $k(t)$ . Demostrar que los vértices (en el sentido clásico) de una cónica son los vértices de la curva definida por la cónica.

**Observación 5** Se demuestra que una curva diferenciablemente cerrada y simple tiene como poco cuatro vértices.

**Ejercicio 36** Averigüar el valor de la curvatura máxima de una cónica de excentricidad  $e \geq 0$ , y parámetro  $p > 0$ .

**Ecuación intrínseca de una curva.** La geometría intrínseca de una curva plana viene unívocamente determinada por el valor de la curvatura en cada uno de sus puntos. El significado preciso de esta afirmación es el siguiente:

Supongamos dada una aplicación diferenciable  $k : J = [0, L] \ni s \rightarrow k(s) \in \mathbb{R}$ . Existe entonces una curva  $\alpha : J \ni s \rightarrow \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  parametrizada por el arco, que admite a  $k$  por función de curvatura. Además la curva  $\alpha$  está determinada salvo movimientos.

En efecto, supongamos que  $\alpha : J \ni s \rightarrow \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  es una solución a nuestro problema. Como  $T(s)$  es un vector unitario puede escribirse en la forma  $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  donde  $\theta : J \rightarrow \mathbb{R}$  es aplicación diferenciable. Así el vector normal se escribirá:  $N(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$  y por tanto:

$$T'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)N(s)$$

comparando con la fórmula de Frenet (34) se concluye que  $k(s) = \theta'(s)$ , por lo que

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s k(\sigma) d\sigma \quad (38)$$

y así nuestra curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  tendrá que satisfacer  $x'(s) = \cos \theta(s)$ ,  $y'(s) = \sin \theta(s)$  con lo que:

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos \theta(\sigma) d\sigma, \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin \theta(\sigma) d\sigma \quad (39)$$

las igualdades (38) y (39) permiten construir una única solución  $\alpha$  cada vez que elijamos condiciones iniciales

$$\alpha(0) = (x_0, y_0), \quad \alpha'(0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$$

### 3.2. Evolventes

La operación de determinar evolventes de una curva se puede considerar como la inversa de la operación de cálculo de la evoluta, en el mismo sentido que la integral indefinida lo es a la derivada. Así al igual que sucede con la integral indefinida, la determinación de la evolvente incluye una constante arbitraria.

*Se dice que la curva  $\alpha$  es evolvente de la curva  $c$  si  $c$  es la evoluta de  $\alpha$*

La referencia para este apartado es [2] pág 84-86 y [?] pág 106-111

#### 3.2.1. Cálculo de evolventes

Dada la curva  $c : I \ni s \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^2$  parametrizada por el arco, una evolvente  $\alpha : I \ni s \rightarrow \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  deberá verificar para cada  $s$  las dos propiedades siguientes:

1)  $\alpha(s)$  está sobre la recta tangente a  $c$  en  $s$ , es decir, existe  $h(s)$  con

$$\alpha(s) = c(s) + h(s)c'(s) \quad (40)$$

2) El vector tangente a  $\alpha$  en  $s$ ,  $\alpha'(s)$  es ortogonal a  $c'(s)$ , es decir:

$$\alpha'(s) \cdot c'(s) = 0 \quad (41)$$

Derivando (40) es  $\alpha' = c' + h'c' + hc''$  y aplicando (41) queda

$$h' = -1$$

ya que derivando  $c' \cdot c' = 1$  se obtiene  $c' \cdot c'' = 0$ . Así se tiene  $h(s) = \sigma - s$  para cierto  $\sigma \in \mathbb{R}$ , y

$$\alpha(s) = c(s) + (\sigma - s)c'(s) \quad (42)$$

Supongamos ahora que  $c : I \ni t \rightarrow c(t) \in \mathbb{R}^2$  no está parametrizada por el arco, y pretendemos determinar las ecuaciones de su evolvente  $\alpha(t)$  a partir del punto  $c(\tau)$ ,  $\tau \in I$ . Se hace el cambio de parámetro:

$$I \ni t \rightarrow \mathbf{s}(t) = \int_{\tau}^t |c'(\xi)| d\xi \in J$$

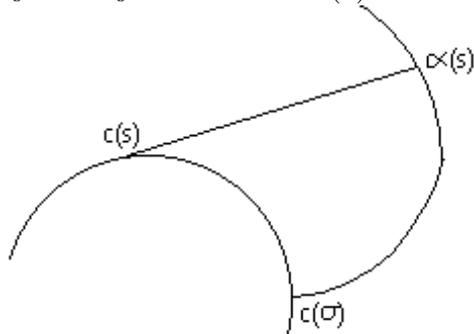
y aplicando la fórmula (42) a  $\bar{c}(s) = c(\mathbf{t}(s))$  se obtiene despues de deshacer el cambio:

$$\alpha(t) = c(t) - \mathbf{s}(t) \frac{c'(t)}{|c'(t)|} \quad (43)$$

### 3.2.2. Significado geométrico de la evolvente

Una evolvente  $\alpha(s) = c(s) + (\sigma - s)c'(s)$  de la curva  $c : I \ni s \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^2$  verifica la siguiente propiedad:

Para cada  $s < \sigma$ , el arco de evolvente  $\alpha \mid [s, \sigma]$  se obtiene al desenvolver una cuerda tirante que ha sido envuelta alrededor de  $c$  entre  $\alpha(s)$  y  $\alpha(\sigma)$  dejando fijo el extremo  $\alpha(s)$



En efecto, se verifica  $\alpha(s) - c(s) = (\sigma - s)c'(s)$  y como  $|c'(s)| = 1$  se tiene:

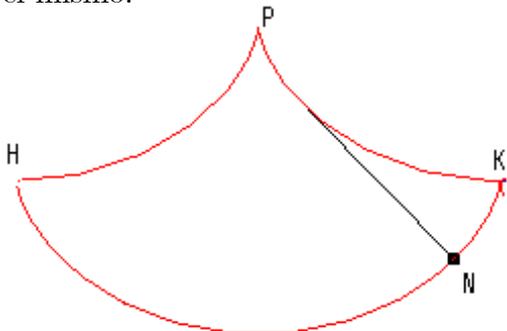
$$|\alpha(s) - c(s)| = \sigma - s = \text{Long}(\alpha \mid [s, \sigma])$$

**Ejercicio 37** Dada la curva  $c : I \ni s \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^2$  parametrizada por el arco, y sea  $\alpha : I \ni s \rightarrow \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  la evolvente dada en (42). Demostrar que la curvatura  $k_\alpha$  de  $\alpha$  viene dada por la fórmula:

$$k_\alpha(s) = \frac{\text{sign}(k_c(s))}{|\sigma - s|}$$

### 3.2.3. El péndulo de Huygens

Huygens había estudiado a fondo los relojes de péndulo, y observó que cuando un reloj tiene una variación en la amplitud de oscilación del péndulo, entonces deja de medir correctamente el tiempo. Pero si la lenteja del péndulo se moviera por una cicloide invertida por su propiedad de tautocronía, aunque la amplitud de oscilación fuera mayor o menor el periodo seguiría siendo el mismo.



Huygens se las ingenió para construir este péndulo colgándolo de un punto  $P$ , con una cuerda de longitud  $4r$  y colocando a ambos lados dos arcos de cicloide  $PH$  y  $PK$  como topes, según se indica en la figura. El punto  $N$  describe entonces un arco de cicloide en virtud del resultado de los epígrafes 3.1.1 y 3.2.2.

### 3.2.4. La tractriz como evolvente de la catenaria

La catenaria es la curva que se obtiene cuando una cadena perfectamente flexible e inextensible, con densidad uniforme, cuelga de dos soportes, sus ecuaciones son

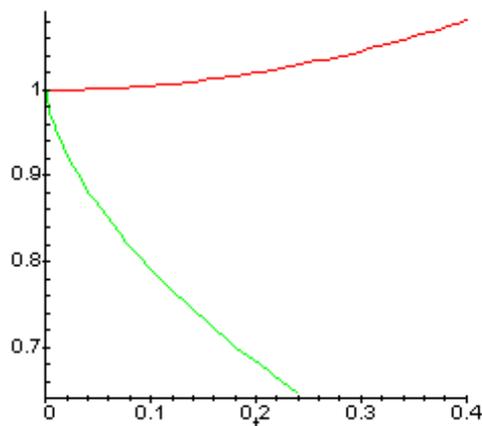
$$c(t) = (t, \cosh(t)) \quad t \in \mathbb{R}$$

Calcularemos la evolvente de la catenaria a partir del punto  $t = 0$ , aplicando la fórmula (43). Se tiene:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\xi)} d\xi = \int_0^t \cosh(\xi) d\xi = \sinh(t)$$

así que:

$$\alpha(t) = ((t, \cosh(t)) - \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} (1, \sinh(t))) = \left( t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right)$$



**Ejercicio 38** *Demostrar que la curva  $\alpha$  anterior es una tractriz (con eje de referencia el eje de las  $x$ )*