CLASIFICACIONES GEOMETRICAS DE LAS CURVAS PLANAS.

Javier Lafuente López

Octubre de 1999

Índice

1. Introducción

En las Notas de *La Manivela*, hemos puesto en funcionamiento una maquinaria ideada por Cartan y Vicensini para resolver problemas de clasificación de curvas (o mas bien trayectorias de curvas) en diversas geometrías del plano. Nuestro trabajo se ha limitado a *dar vueltas a la manivela* que mueve esa maquinaria.

Las reflexiones que ahora vamos a hacer, intentan establecer de forma general el problema de la clasificación geométrica de curvas en una geometría de Klein, así como las técnicas generales para su resolución.

Después de tantas vueltas de manivela, es hora de sacar conclusiones.

1.1. Vectores tangentes de órden superior

Dos curvas $A = A(t)$, $B = B(t)$ de una variedad diferenciable E, se dice que definen el mismo $r-$jet en $t = 0$, si $A(0) = B(0) = C$ y en algún sistema de coordenadas locales $(X_1, \ldots, X_n)$ en torno a C, se verifica para todo k con $1 \leq k \leq r$:

$$\left.\frac{d^k\left(X_i \circ A\right)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k\left(X_i \circ B\right)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Se demuestra que esta propiedad, no depende del sistema local de coordenadas utilizado. La relación anterior es de equivalencia, y denotamos por $j_0^r A(t)$ o mejor por $A^{(r)}(0)$ la clase de equivalencia definida por la curva A, y se denomina $r-jet$ de A en $t = 0$, o también vector tangente de órden r en C. Se denota por $T_C^r E$ al conjuntode todos ellos. La unión $T^r E$ constituye el fibrado r-tangente. El $r-jet$ de A en t_0, o derivada r-ésima de A en $t = t_0$ o el vector tangente de orden r definido por A en $t = t_0$ es:

$$A^{(r)}(t_0) = j_0^r A(t + t_0) \in T_{A(t_0)} M$$

$T^{(r)}E$ es una variedad diferenciable. De hecho, a partir del sistema de coordenada locales $(X_1, \ldots, X_n) = (X_i)$ se puede construir un sistema de coordenadas para $T^{(r)}E$, $(X_i, X_i^{(1)}, \ldots X_i^{(r)})$, en donde se entiende que

$$X_i^{(k)}\left(A^{(r)}(0)\right) = \left.\frac{d^k\left(X_i \circ A\right)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

1.2. Trayectorias infinitesimales.

Dos curvas $A = A(t)$, $t \in I$, $\tilde{A} = \tilde{A}(s)$, $s \in \tilde{I}$ se dice que *definen la misma trayectoria*, si existe un cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$ tal que $\tilde{A} = A(\mathbf{t}(s))$. Se entiende que la función cambio de parámetro $\mathbf{t} : \tilde{I} \to I$ es un difeomorfismo.

Dos curvas $A = A(t)$, $B = B(s)$ de una variedad diferenciable E, se dice que definen la mismo $r - TIN$ (el termino TIN se refiere a *Trayectoria INfinitesimal*) en $t, s = 0$, si existe un cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$ con $0 = \mathbf{t}(0)$ de forma que $\tilde{A} = A(\mathbf{t}(s))$ define en $s = 0$ el mismo $r - jet$ que $B = B(s)$. La relación anterior es de equivalencia. Denotamos por $\tau_0^{[r]} A = A^{[r]}(0)$ la clase de equivalencia definida por la curva A, y se denomina $r - tin$ de A en $t = 0$, o también trayectoria infinitesimal de órden r en $C = A(0)$. Se denota por $T_C^{[r]} E$ al conjuntode todos ellos. El $r - tin$ de A en t_0 es:

$$A^{[r]}(t_0) = \tau_0^{[r]} A(t + t_0) \in T_{A(t_0)}^{[r]} M$$

Nótese que si $A = A(t)$ es una curva entonces

$$\tau_0^{[r]} A = \left\{ j_0^{(r)} \tilde{A} : \tilde{A} = A\left(\mathbf{t}(s)\right), \begin{array}{l} t = \mathbf{t}(s) \text{ es cambio de parámetro} \\ (d\mathbf{t}/ds(0) \neq 0,\, \mathbf{t}(0) = 0 \end{array} \text{ y} \right\}$$

Eescribiremos también $[\omega]$ para referirnos al TIN definida por el r-vector $\omega \in T_C^{(r)} E$, y denotamos

$$\tau^{[r]} : T^{(r)} E \to T^{[r]} E \;,\; \omega = A^{(r)}(0) \to A^{[r]}(0) = [\omega]$$

1.3. Actuación de un grupo sobre un conjunto

Un grupo G actua (por la izquierda) sobre un conjunto Ω, si hay definida una aplicación

$$G \times \Omega \ni (g, \omega) \to g\omega \in \Omega$$

verificando las propiedades habituales $(gg')(\omega) = g(g'\omega)$, $e\omega = \omega$, para todo $g, g' \in G$ y todo $\omega \in \Omega$. La actuación se dice efectiva si el elemento neutro $e \in G$, es el único elemento del grupo que deja fijos todos los elementos de Ω.

Fijado $\omega \in \Omega$ llamamos a $G\omega = \{g\omega : g \in G\}$ *órbita* de ω. Denotamos por $G \backslash \Omega$ al espacio de las órbitas.

Diremos que la actuación es *simple*, si la aplicación $G \ni g \to g\omega \in G\omega$ es inyectiva para cada $\omega \in \Omega$

1.4. Geometrías y Grupos de transformaciones

Una *Geometría* de *Klein* en E, viene definida por un grupo de Lie G que actua diferenciablemente sobre E de forma efectiva. Es decir, podemos identificar G con un subgrupo del grupo $Difeo(M)$ de difeomorfismos de M.

La actuación de G sobre E, puede inducir *de forma natural* actuaciones $G \times \Omega \ni (g, \omega) \to g\omega \in \Omega$ sobre determinadas familias Ω de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (métricas, conformes,...) sobre E. La propiedad que define a los objetos de Ω es conservada por el grupo G y se denomina propiedad $(G-)$geométrica. Según Klein, el estudio de la $(G-)$geometría, consiste en el análisis de las propiedades y conceptos relativos a E que permanecen invariantes por la acción del grupo G. Cada vez que tenemos una tal familia Ω, queda planteado un problema de clasificación:

Dos objetos $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ se dicen equivalentes ($\omega \simeq_G \tilde{\omega}$), si están en la misma órbita, es decir, si existe $g \in G$, tal que $g\omega = \tilde{\omega}$. Un invariante, es una aplicación $\phi : \Omega \to \Phi$ con la propiedad de que $\phi(\omega) = \phi(\tilde{\omega})$ cada vez que $\omega \simeq_G \tilde{\omega}$.

Se dice que un invariante ϕ depende de un sistema de invariantes $\{\phi_1, \ldots \phi_r\}$ si , $\phi(\omega) = \phi(\tilde{\omega})$ cada vez que $\phi_i(\omega) = \phi_i(\tilde{\omega})$ $i = 1, \ldots r$. El sistema $\{\phi_1, \ldots \phi_r\}$ se dice independiente, si ϕ_i no depende de $\{\phi_1, \ldots \phi_r\} - \{\phi_i\}$ $i = 1, ..., r$. Se dice completo, si se verifica la implicación:

$$\phi_i(\omega) = \phi_i(\tilde{\omega}) \;\; i = 1, \ldots r \Longrightarrow \omega \simeq_G \tilde{\omega}$$

Resolver un problema de clasificación, consiste esencialmente en determinar un sistema completo independiente (y *computable* [1]) de invariantes. Nótese que tal sistema induce una biyección

$$G \backslash \Omega \ni G\omega \to (\phi_1(\omega), \ldots \phi_r(\omega)) \in im\phi_1 \times \cdots \times im\phi_r$$

[1] Entendemos por tal un invariante, que admite un algoritmo computable para su cálculo

Observación: Si el espacio cociente (de las órbitas) $G\backslash\Omega$ admite una estructura de variedad diferenciable, entonces hay un sistema de invariantes *locales* en torno a cada punto de $G\backslash\Omega$

1.5. Geometrías Homogeneas.

Una Geometría de Klein G sobre E (ver epígrafe 1.4) se dice homogenea, si G actua transitivamente sobre E, es decir, para todo $x, y \in E$, existe $g \in G$, tal que $g(x) = y$. Denotamos

$$G_{xy} = \{g \in G : g(x) = y\}$$

Llamamos grupo de isotropía de un punto $x \in E$, al subgrupo H_x de las transformaciones de G que dejan fijo el punto x, es decir:

$$H_x = G_{xx} = \{h \in G : h(x) = x\}$$

Nótese que si $g \in G$, es tal que $g(x) = y$ entonces $H_y = gH_xg^{-1}$. Así fijado un punto $o \in E$, todos los grupos de isotropía H_x de los puntos de E son conjugados con $H = H_0$. Claramente H es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim H$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (fijado $o \in E$):

$$\pi_o : G/H \ni gH \to g(o) \in E$$

que permite identificar ambos espacios ($E = G/H$). Así $\pi : G \to G/H$ se identifica con

$$\pi : G \to E \ , \ g \longmapsto g(o)$$

En estas condiciones, E resulta ser un espacio homogéneo en el sentido clásico.

El grupo G, actua de forma natural sobre los vectores tangentes de orden r:

$$G \times T^{(r)}E \to T^{(r)}E, \ \left(g, A^{(r)}(0)\right) \longmapsto (gA)^{(r)}(0) \qquad (1)$$

y da lugar a una geometría de Klein sobre $T^{(r)}E$ que no tiene porqué ser homogenea.

1.6. Invariantes diferenciales

La familia de curvas diferenciables ($\mathcal{C}^\infty$), $A = A(t)$ sobre E parametrizadas sobre cierto intervalo I real, pueden ser objeto de clasificación en cualquier geometría G sobre E. Para este tipo de problema, solo vamos a considerar de invariantes ϕ, que asocian a cada curva $A = A(t)$ una función diferenciable definida en I, $\phi_A = \phi_A(t)$ con valores en cierta variedad diferenciable Φ, y con la propiedad de invariancia:

$$\phi_A = \phi_{gA} \text{ para todo } g \in G$$

El invariante ϕ se dirá *diferencial*, si viene determinado por una aplicación diferenciable (que denotamos por el mismo nombre) $\phi : T^{(r)}E \to \Phi$ con la condición

$$\phi_A(t) = \phi\left(A^{(r)}(t)\right)$$

Si r es el mínimo entero positivo que verifica la propiedad

$$\phi_A(t) = \phi_B(t) \text{ cuando } A^{(r)}(t) = B^{(r)}(t)$$

se dice que ϕ es invariante de orden r. Nótese que tal invariante induce una aplicación natural (ver(1))

$$\phi : G \backslash T^{(r)}E \to \Phi$$

1.7. Invariantes Intrínsecos

Un invariante diferencial ϕ (de orden r) se dirá *intrínseco* si $\phi_{\tilde{A}} = \phi_A(\mathbf{t}(s))$ cuando $\tilde{A}$ se obtenga de A por un cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$. Los invariantes intrínsecos dependen en este sentido solo de la trayectoria de la curva. Nótese que $\phi : T^{(r)}E \to \Phi$ verifica la condición:

$$\phi_A(t) = \phi_B(t) \text{ cuando } A^{[r]}(t) = B^{[r]}(t)$$

1.8. Elementos invariantes de arco.

Supongamos que tenemos un operador dl que asocia a cada curva $A = A(t)$ una 1-forma $dl_A = \zeta_A(t)dt$, donde $\zeta : T^{(k)}E \to \mathbb{R}$ es un invariante diferencial, que verifica para cada cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$ la condición:

$$\zeta_B(s) = \zeta_A(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds}ds \text{ si } B(s) = A(\mathbf{t}(s)) \tag{2}$$

se dice que dl es *elemento* (invariante) *de arco*, y escribimos:

$$dl = \zeta dt \tag{3}$$

Si $A = A(t)$, $t \in I = [a, b]$ se llama longitud de A respecto a dl a:

$$\mathbf{l}(A) = \int_a^b dl_A(t) \tag{4}$$

y la longitud $\mathcal{L}$ es intrínseca, ya que si $B = A(\mathbf{t}(s))$ $s \in J = [c, d]$ (donde $t = \mathbf{t}(s)$ es un cambio de parámetro) se tiene por el teorema del cambio de variable:

$$\mathbf{l}\,(B) = \int_c^d \zeta_B(s)ds = \int_c^d \zeta_A(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds}ds = \int_a^b \zeta_A(t)dt$$

Nótese que la condición (2) equivale a decir que $dl_B = \mathbf{t}^* dl_A$, es decir dl_B se obtiene por sustitución formal de t por $\mathbf{t}(s)$ en la expresión $dl_A = \zeta_A(t)dt$.

Por supuesto, si ϕ es un invariante intrínseco, entonces el operador $dl = \phi' dt$ que actua sobre cada curva $A = A(t)$ como $dl_A = \phi'_A(t)dt$ define un elemento invariante de arco. Nótese, que respecto a ella se tiene en este caso (usando (75)) $\mathcal{L}(A) = \phi_A(b) - \phi_A(a)$.

1.9. El parámetro longitud de arco

Un paso decisivo para resolver el problema de clasificación de curvas en una geometría homogenea G sobre E, es determinar un elemento invariante de arco

$dl = \zeta dt$. Supuesto que el invariante diferencial ζ es del órden k, un vector $\omega \in T^{(r)}E$, $r \geq k$ se dice dl-regular si $\zeta(\omega) \neq 0$. Se denota

$$R^{(r)}(dl) = \left\{\omega \in T^{(r)}E : \zeta(\omega) \neq 0\right\},\ R_x^{(r)}(dl) = R^{(r)}(dl) \cap T_x^{(r)}E$$

Diremos entonces que dl es un *elemento regular de arco* (para la geometría G)

$$R_o^{(k)}(dl) = \left\{\omega \in T_o^{(k)}E : \zeta(\omega) \neq 0\right\} \text{ es abierto denso en } T_o^{(k)}E \tag{5}$$

Nótese que la condición (5) se verifica automáticamente para órden $k \geq r$.

Cada subconjunto $R_x^{(r)}(dl)$, $x \in E$, es un abierto denso de $T_x^{(r)}E$, y el espacio $R^{(r)}(dl)$ unión de todos ellos, es un abierto denso de $T^{(r)}E$, y sus elementos se llaman r-vectores $(dl-)$-regulares.

Una curva $A = A(t)$ se dice dl-regular si $A^{(r)}(t)$ es *dl-regular* para todo t. Fijado un valor inicial $t = a$, podemos considerar la función:

$$\mathbf{l}_A(t) = \int_a^t \zeta_A(t)dt$$

como $\zeta_A(t) \neq 0\ \forall t$, entonces $l = \mathbf{l}_A(t)$ define un cambio de parámetro, y la nueva curva resultante $B = B(l)$ con $A(t) = B(\mathbf{l}_A(t))$ se dice parametrizada por el arco (brevemente PPA). Nótese que el parámetro longitud de arco l está determinado salvo traslaciones.

En esta situación, uno debería contentarse con clasificar familia Ω de las curvas *regulares.* Llamaremos curvas *totalmente singulares* a las que verifican $\zeta_A(t) = 0\ \forall t$.

La condición de ser dl-regular, es intrínseca, es decir, si una curva es dl-regular, también lo es cualquier reparametrización suya. Tiene pues sentido, hablar de *trayectorias y trayectorias infinitesimales* dl-regulares y llamar $R_x^{[r]}(dl) = \left\{[\omega] : \omega \in R_x^{(r)}(dl)\right\}$, y $R_x^{(r)}[dl] = \left\{A^{(r)}(0) \in\!:\ A \text{ está PPA}\right\}$. Observese que hay una biyección canónica:

$$R_x^{[r]}(dl) \leftrightarrows R_x^{(r)}[dl]$$

que se corresponde con una sección de la proyección $\tau^{[r]} : R^{(r)}(dl) \to R^{[r]}(dl)$, y no haremos por tanto distinción entre los elmentos de ambos conjuntos.

1.10. Geometrías regulares.

Una geometría homogenea G sobre E se dice regular de orden r si existe un elemento regular de arco $dl = \zeta dt$ de órden $k \leq r$ de forma que:

(1) La actuación natural inducida de $G \times T^{(r)}E \to T^{(r)}E$ (ver (1)).

$$H \times R_0^{(r)}[dl] \to R_0^{(r)}[dl] \text{ es simple} \tag{6}$$

es decir, dado $\omega \in R_0^{(r)}[dl]$ si $h\omega = \omega$ $(h \in H)$ entonces $h = e$.

(2) La actuación de H sobre $R_0^{(r)}[dl]$ da lugar al espacio cociente $H\backslash R_0^{(r)}[dl]$ que tiene estructura de variedad diferenciable tal que la proyección canónica $R_0^{(r)}[dl] \to H\backslash R_0^{(r)}[dl]$ es submersión.

1.11. Sistemas de referencia

Dada una geometría homogenea G regular de orden r sobre el espacio E con punto base $o \in E$. Se llama sistema de referencia a una sección diferenciable $\mathcal{R} : H\backslash R_0^{(r)}[dl] \to R_0^{(r)}[dl]$. Denotamos por

$$\mathcal{R}_0^{(r)}[dl] = im\mathcal{R}$$

Los elementos de $\mathcal{R}_0^{(r)}[dl]$ se denominan r-vectores del sistema.

1.12. Referencias y referencias móviles

Dada la geometría homogenea G sobre E con punto base $o \in E$, la proyección $\pi : G \ni g \to go \in E$, induce en G estructura natural de fibrado principal (con base E y grupo H), y lo podemos considerar como un fibrado de referencias en el siguiente sentido:

Una referencia en un punto $x \in E$, es un elemento $g \in G$, tal que $g(o) = x$. Así $G_{ox} = \pi^{-1}(x)$ es el conjunto de las referencias en el punto x. El grupo G se ve asi como el conjunto de todas las referencias.

Si $g_1 \in G_{ox_1}$, y $g \in G$ transforma x_1 en $g(x_1) = x_2$, entonces se entiende que g transforma la referencia $g_1 \in G_{ox_1}$ en la $gg_1 = g_2 \in G_{ox_2}$. Recíprocamente si $g_1 \in G_{ox_1}$, $g_2 \in G_{ox_2}$ existe una única transformación $g = g_1^{-1}g_2$ que transforma la referencia g_1 en la g_2.

Una referencia móvil (local) en torno a un punto $p \in E$, es una aplicación diferenciable $\sigma : \mathcal{U} \to G$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de p en E, y $\sigma(x) \in G_{ox}$ para todo $x \in \mathcal{U}$. De hecho, E admite referencias móviles σ en torno a cada punto p con un valor predeterminado $\sigma(p) = g \in G_p$. [2]

Si $A = A(t)$ es una curva parametrizada en E, una referencia movil a lo largo de A viene definida por una aplicación diferenciable $\sigma = \sigma(t)$ donde $\sigma(t)$ es una referencia en $A(t)$ para todo t.

Existen referencias móviles a lo largo de toda curva A. De hecho, fijado un origen t_0 en el intervalo del parámetro t, y una referencia g_0 en $A(t_0)$ hay referencias móviles $\sigma = \sigma(t)$ con $\sigma(t_0) = g_0$.

1.13. Referencia móvil de Frenet

Supongase ahora que nuestra geometría es homogenea y regular de óden r, con elemento de arco dl, y sobre el punto base $o \in E$, supongase fijado un sistema de referencia $\mathcal{R} : H\backslash R_0^{(r)}[dl] \to R_0^{(r)}[dl]$.

Dada la curva regular $A = A(l)$ PPA vamos a construir una referencia movil *canónica* $\varphi_A = \varphi_A(l)$ a lo largo de A que denominamos *referencia movil de Frenet*. Para ello construyamos una referencia movil auxiliar $g = g(l)$. Como $\mathcal{R}\left(g(l)^{-1}A^{(r)}(l)\right)$ y $g(l)^{-1}A^{(r)}(l)$ son H-equivalentes, la condición (6) asegura que existe un único $h(l) \in H$ verificando la condición:

$$h(l)\left(\mathcal{R}\left(g(l)^{-1}A^{(r)}(l)\right)\right) = g(l)^{-1}A^{(r)}(l)$$

y definimos $\varphi_A(l) = g(l)h(l)$ de forma que $\varphi_A(l)^{-1}$ resulta ser el único elemento de G tal que transforma el r-vector $A^{(r)}(l)$ en un r-vector del sistema $\mathcal{R}_0^{(r)}[dl]$ es decir:

$$\varphi(l)^{-1}A^{(r)}(l) \in \mathcal{R}_0^{(r)}[dl] \ \ \forall l$$

[2] Esto es esencialmente lo mismo que decir que $\pi : G \to E$ es fibrado principal de grupo H.

Hay una propiedad que conviene destacar:
Si $A = A(l)$, $B = gA(l)$ son G-equivalentes, entonces $\varphi_B = g\varphi_A$

1.14. Matriz de Curvaturas.

Dada la curva regular $A = A(l)$ sea $\varphi_A = \varphi_A(l)$ su referencia de Frenet entonces si ω_G es la forma de Cartan del grupo de Lie, se define la *matriz de curvaturas* de A a la curva $\phi_A = \phi_A(l)$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G definida por:

$$\phi_A(l) = \omega_G\left(\varphi'_A(l)\right) = \left(L_{\varphi_A(l)^{-1}}\right)_*\left(\varphi'_A(l)\right)$$

simbólicamente podríamos escribir $\phi_A = \varphi_A(l)^{-1}\varphi'_A(l)$ o mejor aún (abusando ostensiblemente de la notación):

$$\varphi'_A = \varphi_A\phi_A \tag{7}$$

y se puede llamar identidad de Frenet

Nótese que si $A = A(l)$ y $B = B(l)$ son curvas PPA G-equivalentes entonces $\phi_A = \phi_B$

1.15. Un Teorema de Existencia y Unicidad

Supongamos que partimos de una curva $\phi = \phi(t)$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G y nos planteamos el problema de determinar las curvas en G, $\varphi = \varphi(t)$ solución de la ecuación diferencial tipo Frenet $\varphi' = \varphi\phi$ es decir:

$$\phi(t) = \left(L_{\varphi(t)^{-1}}\right)_*\left(\varphi'(t)\right)$$

la teoría dice que hay una única solución $\varphi_e = \varphi_e(t)$ con $\varphi_e(0) = e$, y todas las demás, se obienen de φ_e por traslaciones de parámetro, o traslaciones a la izquierda en el grupo. En particular, fijado $g \in G$, existe una única solución $\varphi_g = g\varphi_e(t)$ con $\varphi_g(0) = g$.

Supongamos ahora que $\phi = \phi_A$ para cierta curva regular $A = A(t)$ en E, entonces fijado $x \in E$, y $g \in G_{ox}$ referencia en x, existe una única curva $B = B(t)$ con $B(0) = x$, $\varphi_B(0) = g$, y $\phi_B = \phi$. Además A y B son G-equivalentes.

Como consecuencia se obtiene

Corolario

Dos curvas PPA $A = A(l)$, $B = B(l)$ de E son G-equivalentes, si y solo si tienen la misma matriz de curvatura ($\phi_A = \phi_B$)

1.16. Ecuaciones de Frenet.

La cuestión que nos planteamos es la siguiente:

Dada una ecuación en G de la forma

$$\varphi' = \varphi\phi \tag{8}$$

del tipo (7) donde $\phi = \phi(l)$ es una curva diferenciable en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, ¿existe una curva $A = A(l)$ PPA tal que $\phi_A = \phi$?

Por el epígrafe anterior si existe tal curva, se concluye, que fijada una referencia $g \in G_{ox}$ en el punto $x = go$, existe una única curva $X = X(l)$ PPA tal que $X(0) = x$, y su referencia movil de frenet $\varphi = \varphi_X$ verifica la ecuación (80)

Sin embargo, obviamente en general, no existe tal curva. La condición necesaria y suficiente para que exista, es que $\phi = \phi(l)$ esté dibujada sobre cierto *subespacio* $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ que determinamos de la siguiente manera:

$$\mathfrak{k} = \{\phi_A(0) : A = A(l) \text{ es curva PPA con } A(0) = 0\}$$

de hecho, la aplicación canónica:

$$\Phi : R_o^{(r)}[dl] \ni A^{(r)}(0) \to \phi_A(0) \in \mathfrak{k}$$

está bien definida, e induce biyección

$$\overline{\Phi} : H \backslash R_o^{(r)}[dl] \to \mathfrak{k}$$

Podríamos admitir por definición, que una geometría regular debe verificar la condición adicional de que $H \backslash R_o^{(r)}[dl]$ y $\mathfrak{k}$ sean variedades diferenciables (de dimensión d), y $\overline{\Phi}$ sea un difeomorfismo.

En la práctica, $\mathfrak{g}$ es un espacio de matrices, y $\mathfrak{k}$ es un subespacio vectorial de matrices de $\mathfrak{g}$ cuyos elementos dependen (linealmente) de $d-$étuplas $\left(k^1, \ldots, k^d\right)$ que representan d curvaturas independientes. En el caso general, esta dependencia sería local, y no lineal, y el teorema 1.16 de más abajo tendría también un caracter local.

En estas condiciones, la curvatura $k_A^i(l_0)$ de una curva $A = A(l)$ en $l = l_0$ sería

$$k_A^i(l_0) = k_i \left[\Phi\left(\left(\varphi_A^{-1}(l_0)\, A\,(l + l_0)\right)^{(r)}(0)\right)\right]$$

y se tendría el siguiente

Teorema:

Dadas funciones $k^i = k^i(l)$ diferenciables, un punto $x \in E$, y una referencia $g \in G_{ox}$, existe una única curva $X = X(l)$, PPA de forma que $k_X^i = k_i$ para $i = 1, \ldots d$.

Idea de la demostración:

Se supone que las funciones $k^i = k^i(l)$ determinan una curva $\phi = \phi(l)$ en $\mathfrak{k}$. Hay (¿por tanto?) una curva $A = A(l)$, con $\phi_A = \phi$, $A(0) = o$, $\varphi_A(0) = e$ (es decir, $A^{(r)}(0) \in \mathcal{R}_0^{(r)}[dl]$). La solución es $X(l) = gA(l)$.

1.17. Apendice

1.17.1. Parametrizaciones invariantes preferidas

Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones actuando sobre $\mathbb{R}$.

Una $\Gamma-$*Parametrización preferida* (brevemente $\Gamma-$PP), es un operador F que asigna a cada curva $A = A(t)$, $t \in I$, una clase $F_A = \{\gamma \circ f : \gamma \in \Gamma\}$ con $f = f(t)$, $t \in I$ difeomorfismo verificando las propiedades:

1) F es invariante, es decir, $F_A = F_B$ cuando las curvas A y B son $(G-)$equivalentes.

2) F es intrínseco en el sentido de que cada vez que tengamos dos curvas $A = A(t)$, $t \in I$, $B = A(\mathbf{t}(s))$ (donde $t = \mathbf{t}(s)$ es un cambio de parámetro) se tiene

$$f_A = f_A(t) \in F_A \Leftrightarrow f_B = f_A(\mathbf{t}(s)) \in F_B \tag{9}$$

Nótese que si $\Gamma = \{id_{\mathbb{R}}\}$ entonces F es un invariante intrínseco.

1.17.2. Construcción de un elemento invariante de arco

La pretensión de encontrar un elemento invariante de arco invariante nos conducirá frecuentemente a la siguiente situación:

Supongamos que disponemos de una $\Gamma-$PP, digamos F, y un invariante diferencial ϕ. Dada una curva $A = A(t)$, $t \in I$, para cada $f \in F_A$, podemos considerar el cambio de parámetro $\bar{t} = f(t)$, y la curva reparametrizada $A_f = A_f(\bar{t}) = A(f^{-1}(\bar{t}))$. Imaginemos que la función

$$\zeta_A(t) = \phi_{A_f}(f(t))\frac{df}{dt}(t)$$

no depende del $f \in F_A$ elegido. Entonces el operador $dl = \zeta dt$ que asocia a cada curva $A = A(t)$, la 1-forma $dl_A = \zeta_A(t)dt$ define un elemento invariante de arco. En efecto:

Si $B = B(s)$, $s \in J = [c, d]$, se obtiene por reparametrización arbitraria $t = \mathbf{t}(s)$ de $A = A(t)$, fijamos $f \in F_A$,entonces por (9) es $g = f(\mathbf{t}(s)) \in F_B$ y usando el parámetro común $\bar{t} = f(t) = f(\mathbf{t}(s))$ $=g(s)$ se concluye que $B_g(\bar{t}) = A_f(\bar{t})$ y $\phi_{B_g}(g(s)) = \phi_{A_f}(f(\mathbf{t}(s)))$, por tanto:

$$\zeta_B(s) = \phi_{B_g}(g(s))\frac{dg}{ds}(s)ds = \phi_{A_f}(\mathbf{t}(s))\frac{df}{dt}(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds}ds = \zeta_A(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds}ds$$

2. Clasificación de las curvas en el plano proyectivo.

2.1. Curvas vectoriales.

Las componentes de una curva $A = A(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ diferenciable de $\mathbb{R}^3$ verifican tautológicamente una ecuación diferencial de tercer órden dada por

$$\begin{vmatrix} \theta''' & \theta'' & \theta' & \theta \\ X''' & X'' & X' & X \\ Y''' & Y'' & Y' & Y \\ Z''' & Z'' & Z' & Z \end{vmatrix} = 0$$

que llamamos *Ecuación Diferencial Tautológica (EDT)*podemos escribir de la forma:

$$\theta''' + p\theta'' + q\theta' + r\theta = 0 \tag{10}$$

siendo:

$$p = -\frac{\det(A''', A', A)}{\det(A'', A', A)}, \; q = \frac{\det(A''', A'', A)}{\det(A'', A', A)}, \; r = -\frac{\det(A''', A'', A')}{\det(A'', A', A)} \tag{11}$$

excluyendo los *puntos de inflexión* en donde $|A'', A', A| = 0$. Como cada componente de A satisface (10), podemos escribir

$$A''' + pA'' + qA' + rA = 0$$

Trabajaremos solo con curvas *proyectivamente alabeadas*, es decir, sin puntos de inflexión.
Por otra parte, si $A = A(t)$ satisface una EDT de la forma

$$A''' + \tilde{p}A'' + \tilde{q}A' + \tilde{r}A = 0$$

entonces necesariamente $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$, $r = \tilde{r}$.

2.2. Invariantes.

Un *invariante* (sobre las curvas), es una asignación ϕ, que asocia a cada curva $A = A(t)$, un operador $\phi_A = \phi_A(t)$ (puede ser una función una forma,...etc.) que depende diferenciablemente de t.

1. Se dice que ϕ es *invariante lineal*, si $\phi_A(t) = \phi_{\tilde{A}}(t)$ $\forall t$ cuando $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ son curvas *linealmente equivalentes*, es decir, existen $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ con:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Y}(t) \\ \tilde{Z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}, \; \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Se dice que ϕ es *invariante proyectivo*, si $\phi_A(t) = \phi_{\tilde{A}}(t)$ $\forall t$ cuando $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ son curvas *proyectivamente equivalentes*, (p.e.) es decir, existe $\lambda = \lambda(t)$ función diferenciable ($\lambda(t) \neq 0$ $\forall t$) tal que $B(t) = \lambda(t)\tilde{A}$ es linealmente equivalente a A.

2.3. Invariantes lineales p, q, r.

Como el conjunto de soluciones de (10) constituye un espacio vectorial de dimensión 3, se concluye que si $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ *linealmente equivalente* a A, entonces $\tilde{A}$ satisface la misma EDT (10), por tanto, los coeficientes p, q, y r definidos en (11) son invariantes lineales para las curvas de $\mathbb{R}^3$.

2.4. Ecuación diferencial reducida.

Sin embargo, los coeficientes p, q, y r no son invariantes intrinsecos, ni proyectivos, es decir varían frente a cambios de parámetro $\bar{t} = f(t)$, y transformaciones $\bar{A} = \lambda(t)A$. De hecho, si se elige $f(t)$ satisfaciendo la ecuación diferencial

$$\{f\}_t = -\frac{1}{12}p^2 - \frac{1}{4}p' + \frac{1}{4}q \tag{12}$$

donde

$$\{f\}_t = \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{4}\frac{f''^2}{f'^2} \tag{13}$$

y $\lambda = \lambda(t)$ verificando

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{f''}{f'} + \frac{p}{3} \tag{14}$$

se obtiene que $\bar{A} = \bar{A}(\bar{t})$ verifica una EDT de la forma:

$$\frac{d^3\bar{A}}{d\bar{t}^3} + \bar{r}\bar{A} = 0 \tag{15}$$

siendo

$$\bar{r} = \frac{1}{f'^3}\left(r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{2}q' + \frac{1}{3}pp' + \frac{1}{6}p''\right) \tag{16}$$

2.5. La Ecuación normalizada.

La ecuación $\bar{A} = \bar{A}(\bar{t})$ para la cual se verifica una EDT como la (15), se denomina *ecuación normalizada* de A. Obsérvese que una vez determinado $\bar{t} = f(t)$, la ecuación normalizada queda determinada unívocamente salvo constantes multiplicativas, por la curva proyectiva $[A] = [A]\,(t) = [A(t)]$.

2.6. Ecuación Schwartziana.

Si $f = f(t)$ es una función diferenciable a la función $\{f\}_t$ de (13) se denomina *derivada Schwartziana* respecto a t.
Se demuestra que una ecuación diferencial [Schwartziana] de la forma:

$$\{\theta\}_t = F(t)$$

donde $F = F(t)$ es una función diferenciable conocida, admite una solución $f = f(t)$, definida para todo t, y cualquier otra solución $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$ se obtiene a partir de f de la forma:

$$\tilde{f} = \frac{af + b}{cf + d} \text{ con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

siendo a, b, c, y d constantes reales. Así pues la solución está determinada salvo homografías.

2.7. Parámetro proyectivo.

Por tanto hay un parámetro especial llamado parámetro proyectivo, $\bar{t} = f(t)$ determinado salvo homografías, (verificando la ecuación (12)) para la curva $A = A(t)$ que permite definir por ejemplo, el concepto de razón doble de cuatro puntos sobre la curva :

$$[[A(t_1)], [A(t_2)]; [A(t_3)], [A(t_4)]] = [f(t_1), f(t_2); f(t_3), f(t_4)] \tag{17}$$

independientemente del parámetro proyectivo $\bar{t} = f(t)$ elegido. Por otra parte, se ve que un parámetro $\bar{t} = f(t)$ es proyectivo para la curva $A = A(t)$ si y solo si verifica la propiedad (17) anterior para todos los t_i.

2.8. Invariantes geométricos $\bar{r}$ y $\bar{t} = f(t)$

El parámetro proyectivo es invariante geométrico: Sea $t = \mathbf{t}(\tilde{t})$ un cambio de parámetro en la curva $A = A(t)$ y $\tilde{A} = A(\mathbf{t}(\tilde{t}))$. Pues bien, si $\bar{t} = f(t)$ es parámetro proyectivo para $A = A(t)$, entonces $\bar{\tilde{t}} = f(\mathbf{t}(\tilde{t})) = \tilde{f}(\tilde{t})$ es parámetro proyectivo para $\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{t})$ ya que si $t_i = \mathbf{t}(\tilde{t}_i)$, $\bar{t}_i = f(t_i) = \tilde{f}(\tilde{t}_i)$, queda

$$\left[[\tilde{A}(\tilde{t}_1)], [\tilde{A}(\tilde{t}_2)]; [\tilde{A}(\tilde{t}_3)], [\tilde{A}(\tilde{t}_4)]\right] = [[A(t_1)], [A(t_2)]; [A(t_3)], [A(t_4)]]$$

$$= [f(t_1), f(t_2); f(t_3), f(t_4)] = \left[\tilde{f}(\tilde{t}_1), \tilde{f}(\tilde{t}_2); \tilde{f}(\tilde{t}_3), \tilde{f}(\tilde{t}_4)\right]$$

Además, a la vista de (15) se concluye que fijado el parámetro proyectivo $\bar{t} = f(t)$ también es invariante geométrico $\bar{r} = \bar{r}(t)$ dado en la ecuación normal de A.

2.9. El invariante proyectivo H.

Elegido $\bar{t} = f(t)$ parámetro proyectivo para $A = A(t)$, se obtiene $\bar{r}$ por medio de la fórmula (16). Esta fórmula muestra que la función $H = H(t)$ definida por

$$H = \bar{r} f'^3 = r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{2}q' + \frac{1}{3}pp' + \frac{1}{6}p'' \tag{18}$$

no depende del parámetro proyectivo elegido, y es de hecho un invariante proyectivo:

Demostración:

En efecto, si $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ son proyectivamente equivalentes, existe una función $\mu = \mu(t)$ de forma que $B = \mu(t)\tilde{A}$ es linealmente equivalente a $A = A(t)$. Así A, y B verifican la misma EDT

$$\theta''' + p\theta'' + q\theta' + r\theta = 0$$

y podemos tomar $\bar{t} = f(t)$ parámetro proyectivo común para A y B (verificando la ecuación (12)). Debemos hacer notar ahora, que $\bar{t} = f(t)$, también es parámetro proyectivo para $\tilde{A}$ ya que como $\left[\tilde{A}(\bar{t})\right] = [B(\bar{t})]$, se tiene

$$\begin{aligned} \left[\left[\tilde{A}(\bar{t}_1)\right], \left[\tilde{A}(\bar{t}_2)\right]; \left[\tilde{A}(\bar{t}_3)\right], \left[\tilde{A}(\bar{t}_4)\right]\right] &= [[B(\bar{t}_1)], [B(\bar{t}_2)]; [B(\bar{t}_3)], [B(\bar{t}_4)]] \\ &= [\bar{t}_1, \bar{t}_2; \bar{t}_3, \bar{t}_4] \end{aligned}$$

Pongamos $\bar{B} = \lambda(\bar{t})(B(\bar{t})$ la ecuación normalizada de B, se tiene así:

$$\frac{d^3\bar{B}}{d\bar{t}^3} + \bar{r}\bar{B} = 0$$

Como $[\bar{B}(\bar{t})] = \left[\tilde{A}(\bar{t})\right]$ se concluye por 2.5 que $\bar{B} = \bar{B}(\bar{t})$ es también ecuación normalizada de $\tilde{A}(\bar{t})$ así que $\bar{r}(t) = \bar{r}(f(t))$ es el '$\bar{r}$' común a $A = A(t)$, $B = B(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$, y por tanto también es común $H(t) = \bar{r}(t)f'^3$, como queríamos demostrar.

2.10. Elemento de arco proyectivo.

Ya que $\sqrt[3]{\bar{r}} = \sqrt[3]{\bar{r}(t)}$ y el parámetro proyectivo $\bar{t} = f(t)$ estan en las condiciones del epígrafe 1.17.2 $A = A(t)$, la 1-forma

$$d\sigma = \sqrt[3]{\bar{r}}df = \sqrt[3]{\bar{r}}f'(t)dt = \sqrt[3]{H}dt \tag{19}$$

que resulta ser elemento invariante de arco, (pues H es invariante proyectivo). Se denomina a $d\sigma$, *elemento de arco proyectivo.* Si $A = A(t)$, está definida para $a \le t \le b$ el arco proyectivo de A es

$$\mathcal{L}(A) = \int_a^b d\sigma = \int_a^b \sqrt[3]{H}dt \tag{20}$$

y define un invariante geométrico proyectivo (escalar) (véase epígrafe 1.8), es decir $\mathcal{L}(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\tilde{A})$ si A y $\tilde{A}$ son proyectivamente equivalentes.

2.11. Parametrización por el arco proyectivo.

Fijado un origen a en el intervalo del parámetro t de la curva $A = A(t)$, y supuesto que $H(t) \neq 0\ \forall t$, la igualdad

$$\sigma = \sigma(t) = \int_a^t d\sigma$$

define un cambio de parámetro. De hecho si $A = A(t)$ es ecuación normalizada verificando

$$\frac{d^3A}{dt^3} + rA = 0$$

entonces

$$\sigma = \sigma(t) = \int_a^t \sqrt[3]{r}dt,\ \frac{d\sigma}{dt} = r(t) \neq 0,\ \forall t$$

el parámetro arco proyectivo $\sigma = \sigma(t)$ es así un invariante geométrico proyectivo, unívocamente determinado salvo constantes aditivas.
Si $A = A(t)$ está parametrizada por el arco proyectivo, $t = \sigma$, y por la identidad (19) $d\sigma = \sqrt[3]{H}dt$, el invariante proyectivo $H = 1$.

Observación

La condición $H(t) \neq 0\ \forall t$ es invariante geómetrico y proyectivo. De hecho, debemos fijar nuestra atención a partir de ahora, solo en las curvas que verifican esta condición, que son las únicas que se *dejan* parametrizar respecto al arco. En particular, quedan excluidas de nuestro estudio las cónicas:
Una cónica (no degenerada) se escribe respecto de un adecuado sistema de referencia (C_0, C_1, C_2) de la forma $C(t) = C_0 + tC_1 + t^2C_2$, y se verifica identicamente $d^3C/dt^3 = 0$, así resulta que t es parámetro proyectivo para la cónica, sin embargo, por ser $H = 0$ resulta $d\sigma = 0$, y *no hay* propiamente arco proyectivo.

2.12. Curvatura proyectiva.

Tomemos la curva $B = B(\sigma)$ parametrizada por el arco proyectivo. Multiplicando B por una función $\lambda = \lambda(\sigma)$, (*determinada salvo constante multiplicativa*) podemos conseguir $A = \lambda(\sigma)B$ satisfaga una EDT de la forma

$$\frac{d^3A}{d\sigma^3} + 2k\frac{dA}{d\sigma} + hA = 0$$

en donde hemos hecho desaparecer el sumando que corresponde a $d^2A/d\sigma^2$. Como $H = 1$, sustituyendo en la igualdad (18) $p = 0$, $q = 2k$, $r = h$, se concluye que $h = k' + 1$, y queda

$$\frac{d^3A}{d\sigma^3} + 2k\frac{dA}{d\sigma} + (k' + 1)\,A = 0 \tag{21}$$

La función $k = k(\sigma)$ es un invariante (geométrico) proyectivo que se denomina *curvatura proyectiva.* Si $\bar{t} = \bar{t}(\sigma)$ es el parámetro proyectivo, entonces habrá de verificar una ecuación diferencial como la (12) que en este caso queda:

$$2\{\bar{t}\}_\sigma = k$$

la expresión explícita de k en una parametrización $A = A(t)$ arbitraria es:

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{H^2}}\left(-\frac{1}{2}p' - \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{3}\frac{H''}{H} + \frac{7}{18}\frac{H'^2}{H^2}\right) \tag{22}$$

2.13. La referencia movil proyectiva de Frenet.

Supuesto la curva $A = A(\sigma)$ parametrizada por el arco proyectivo, probaremos que existe una única referencia movil a lo largo de la curva $(A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)})$ determinada salvo una constante multiplicativa de forma que $A^{(0)} = \lambda A(\sigma)$ con $\lambda = \lambda(\sigma)$ función diferenciable, y verifican las siguientes ecuaciones (de Frenet):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dA^{(0)}}{d\sigma} = A^{(1)} \\ \dfrac{dA^{(1)}}{d\sigma} = -kA^{(0)} + A^{(2)} \\ \dfrac{dA^{(2)}}{d\sigma} = -A^{(0)} - kA^{(1)} \end{array}\right. \tag{23}$$

la referencia es única, si se impone la condición adicional:

$$\det\left(A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}\right) = 1$$

Si esto es cierto, la función $k = k(\sigma)$, es necesariamente la curvatura proyectiva, ya que de la primera y segunda ecuación se obtiene:

$$A^{(2)} = \frac{d^2A^{(0)}}{d\sigma^2} + kA^{(0)}$$

derivando ambos miembros y sustituyendo en la tercera se obtiene exactamente la

$$\frac{d^3A^{(0)}}{d\sigma^3} + 2k\frac{dA^{(0)}}{d\sigma} + (k' + 1)\,A^{(0)} = 0 \tag{24}$$

que se corresponde con la (21). Así pues, si existe la refencia móvil de Frenet, entonces necesariamente $A^{(0)} = \lambda A(\sigma)$ es la (única, salvo constante multiplicativa) representación vectorial de la curva proyectiva $[A(\sigma)]$ que verifica la ecuación (24)

Recíprocamente, fijada $[A(\sigma)]$ parametrizada por el arco proyectivo, tomamos $A^{(0)} = \lambda A(\sigma)$ verificando (24), definimos:

$$A^{(1)} = \frac{dA^{(0)}}{d\sigma},\ A^{(2)} = \frac{dA^{(1)}}{d\sigma} + kA^{(0)} \tag{25}$$

y automáticamente la referencia $\left(A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}\right)$ verifica las ecuaciones (23).

Finalmente, si .$\left(B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}\right)$ es otra referencia de Frenet, entonces verifica (24), y podemos suponer por $B^{(0)} = A^{(0)}$ (salvo constante multiplicativa), pero entonces la elección de $B^{(1)}, B^{(2)}$, ya viene determinada por $A^{(0)}$, a través de las fórmulas (100)

2.14. Clasificación proyectiva de las curvas planas.

Si $A = A(t)$, es una curva en $\mathbb{R}^3$ la función $k_A = k_A(t)$ denota su curvatura proyectiva. Esta función k_A solo depende de la curva proyectiva $[A]$, y más exactamente, de la clase proyectiva de la curva, según se vió en el apartado 2.12. Es decir, si $A = A(t)$, y $B = B(t)$ son proyectivamente equivalentes, entonces $k_A(t) = k_B(t)\ \forall t$. Así la función curvatura proyectiva, es un invariante geométrico proyectivo de las curvas planas (¡con curvatura proyectiva!). Se trata de ver que este invariante es completo, es decir:

Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $k = k(\sigma)$, una base $(C_0; C_1, C_2)$ con $\det(C_0; C_1, C_2) = 1$, y un valor concreto del parámetro $\tau = a$, existe una curva $A = A(\sigma)$ P.P.A.P con curvatura $k_A = k$, y cuyo diedro de Frenet $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, y $A^{(2)}$ verifica:

$$A^{(0)}(a) = C_0,\ A^{(1)}(a) = C_1, \text{y } A^{(2)}(a) = C_2$$

En particular, si $A = A(\sigma)$, $B = B(\sigma)$ son curvas parametrizadas por el arco proyectivo (P.P.A.P) que tienen la misma función de curvatura proyectiva $k(\sigma) = k_A(\sigma) = k_B(\sigma)$ entonces definen curvas proyectivamente equivalentes

Demostración:

Si $k = k(\sigma)$ $0 \le \sigma \le L$ es una función diferenciable, planteamos la búsqueda de $A = A^{(0)}$, $A^{(1)}$, y $A^{(2)}$ verificando las ecuaciones de Frenet (23). Escribiendo estas ecuaciones tomando $A = A^{(0)} = (A_1, A_2, A_3)$, $A^{(1)} = (A_4, A_5, A_6)$, $A^{(2)} = (A_7, A_8, A_9)$, queda un sistema de la forma:

$$\begin{pmatrix} dA_1/d\sigma \\ \vdots \\ dA_9/d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{19} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{91} & \cdots & \varphi_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_9 \end{pmatrix} \tag{26}$$

donde $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(\sigma)$ son funciones diferenciables. Por tanto, fijadas condiciones iniciales en $\sigma = a$, $A_0^{(0)}, A_0^{(1)}$, y $A_0^{(2)}$ queda determinada una única solución $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha)}(\sigma)$ con $A^{(\alpha)}(a) = A_0^{(\alpha)}$ $\alpha = 0, 1, 2$. que verifica las ecuaciones de Frenet (23). Así $A = A^{(0)}(\sigma)$ verifica (24) y tiene curvatura proyectiva la función $k = k(\sigma)$ dada.

Supóngase ahora que $A = A(\sigma)$, $B = B(\sigma)$ son curvas P.P.A.P que tienen la misma función de curvatura proyectiva $k(\sigma) = k_A(\sigma) = k_B(\sigma)$ $0 \le \sigma \le L$.

Podemos suponer que $A = A^{(0)}$, $B = B^{(0)}$ son los primeros vectores de las correspondientes referencias de Frenet. Apliquemos a $A = A(\sigma)$ la transformación lineal que lleva la referencia $(A^{(0)}(0), A^{(1)}(0), A^{(2)}(0))$ a $(B^{(0)}(0), B^{(1)}(0), B^{(2)}(0))$. Se obtiene así una curva $\tilde{A} = \tilde{A}(\sigma)$ proyectivamente equivalente con $(\tilde{A}^{(0)}(0), \tilde{A}^{(1)}(0), \tilde{A}^{(2)}(0)) = (B^{(0)}(0), B^{(1)}(0), B^{(2)}(0))$ satisfaciendo identicas ecuaciones de Frenet. Por el teorema de unicidad de soluciones para un sistema como (26) se concluye que $\tilde{A} = B$, que es proyectivamente equivalente a A.

Corolario

Si dos curvas $A = A(t)$, $B = B(t)$ tienen la misma curvatura proyectiva $k = k(t)$, (ver fórmula (22)), entonces son proyectivamente equivalentes, si y solo si se verifica:

$$\frac{d\sigma_A}{dt} = \frac{d\sigma_B}{dt}$$

donde σ_A, y σ_B son los parametros arco proyectivo correspondientes. Esta igualdad, equivale (ver apartado 2.9) a

$$H_A = H_B$$

2.15. Geodésicas proyectivas

Las curvas $A = A(\sigma)$ parametrizadas poe el arco proyectivo, con curvatura proyectiva $k = 0$, se denominan geodésicas de la ecuación (21) se concluye que vienen caracterizadas por satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3 A}{d\sigma^3} + A = 0$$

esta ecuación es del tipo (15), por lo que en este caso, el parámetro arco proyectivo, es también parámetro proyectivo. Así, fijada una base $(A(0), A'(0), A''(0))$ base podemos encontrar una única curva vectorial $A = A(\sigma)$, consistente con la notación, que explícitamente se escribe:

$$\begin{aligned} A(\sigma) \quad = \quad & \frac{1}{3}\left(A(0) - A'(0) + A''(0)\right)\exp(-t) + \\ & \frac{1}{3}\left(2A(0) + A'(0) - A''(0)\right)\exp\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \\ & \frac{1}{3}\left(A'(0) + A''(0)\right)\sqrt{3}\exp\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

En concreto para condiciones iniciales $A(0) = (0, 0, 1)$, $A'(0) = (0, 1, 0)$, y $A''(0) = (1, 0, 0)$ se obtiene $X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)$ y cortando por $Z = 1$, podemos dibujar (usando Maple) la curva $x(\sigma) = X(\sigma)/Z(\sigma)$, $y(\sigma) = Y(\sigma)/Z(\sigma)$:

donde el eje horizontal es el eje y.

¿Que propiedades geométricas interesantes tienen estas curvas, sensiblemente *parecidas* a las cónicas?

De todo esto se deduce que por cada vector tangente ω de orden 2 en el plano proyectivo, hay una única geodésica que define a ω en $\sigma = 0$.

3. Clasificación de las curvas en el plano equiafín.

3.1. Curvas afines.

Las componentes de una curva $A = A(t) = (X(t), Y(t))$ diferenciable de $\mathbb{R}^2$ verifican tautológicamente una ecuación diferencial de tercer órden dada por

$$\begin{vmatrix} \theta''' & \theta'' & \theta' \\ X''' & X'' & X' \\ Y''' & Y'' & Y' \end{vmatrix}$$

que podemos escribir de la forma:

$$\theta''' + p\theta'' + q\theta' = 0 \tag{27}$$

siendo:

$$p = -\frac{\det(A''', A')}{\det(A'', A')}, \quad q = \frac{\det(A''', A'')}{\det(A'', A')}, \tag{28}$$

excluyendo los *puntos de inflexión* en donde $\det(A'', A') = 0$. Como cada componente de A satisface (27), podemos escribir

$$A''' + pA'' + qA' = 0 \tag{29}$$

Trabajaremos solo con curvas *afinmente alabeadas*, es decir, sin puntos de inflexión.
Por otra parte, si $A = A(t)$ satisface una ecuación diferencial de la forma

$$A''' + \tilde{p}A'' + \tilde{q}A' = 0$$

entonces necesariamente $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$.

Observación

Los invariantes p y q ($r = 0$) son los que corresponden con la curva proyectiva $A(t) = (X(t), Y(t), 1)$ que en adelante identificaremos con la curva afín $A = A(t) = (X(t), Y(t))$.

3.2. Invariantes (equi) afines.

Dos curvas planas $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ son curvas *afínmente equivalentes*, es decir, existen $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ con:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Y}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \gamma \neq 0$$

Si $\gamma = 1$, se dice que las curvas son *equiafínmente equivalentes*.

Un *invariante* (equi)*afin*, es una asignación ϕ, que asocia a cada curva afín $A = A(t)$, un operador $\phi_A = \phi_A(t)$ (puede ser una función una forma,...etc.) que depende diferenciablemente de t, y que verifica la condición:

$\phi_A(t) = \phi_{\tilde{A}}(t)$ $\forall t$ cuando A, y $\tilde{A}$ y son (equi)afínmente equivalentes.

Nótese que los invariantes lineales y proyectivos de las curvas, son en particular invariantes afines, y los equiafines son necesariamente afines. En particular, p y q son invariantes afines (y equiafines). Por otra parte, es fácil de comprobar que también son ahora invariantes equiafines las funciones $\det(A', A'')$., $\det(A'', A''')$, ...etc

3.3. Ecuación afín normalizada

Sin embargo, los coeficientes p, q, no son invariantes geométricos, es decir varían frente a cambios de parámetro $\bar{t} = f(t)$. De hecho, podemos conseguir anular el coeficiente p eligiendo adecuadamente f.

En efecto, sea $A = A(t)$ curva afín, $\bar{t} = f(t)$ un cambio de parámetro, y sea $\bar{A} = \bar{A}(\bar{t}) = A(f^{-1}(\bar{t}))$ se tiene entonces $A = \bar{A}(f(t))$, y

$$\begin{aligned} A' &= f'\bar{A}' \\ A'' &= f''\bar{A}' + f'^2\bar{A}'' \\ A''' &= f'''\bar{A}' + 3f'f''\bar{A}'' + f'^3\bar{A}''' \end{aligned} \tag{30}$$

sustituyendo en (29) queda:

$$f'^3\bar{A}''' + (3f'f'' + pf'^2)\bar{A}'' + (f''' + pf'' + qf')\bar{A}' = 0$$

y podemos elegir f tal que $3f'f'' + pf'^2 = 0$, es decir:

$$\frac{f''}{f'}\left(= \frac{d\ln(f')}{dt} =\right) = -\frac{p}{3} \tag{31}$$

Podemos determinar explícitamente las soluciones de (31): Si $P = P(t)$ es una primitiva cualquiera de p entonces es $f' = \alpha \exp(-P/3)$, donde α es constante positiva, y fijado un origen a,

$$f(t) = \beta + \alpha \int_a^t \exp(-P/3)dt \tag{32}$$

La ecuación $\bar{A} = \bar{A}(\bar{t})$ se denomina *ecuación normalizada afín* de la curva, y está caracterizada por satisfacer una ecuación diferencial de la forma:

$$\bar{A}''' + \bar{q}\bar{A}' = 0 \tag{33}$$

en donde $f'^3\bar{q} = f''' + pf'' + qf'$ y sustituyendo $f' = \alpha \exp(-P/3)$, etc..queda:

$$\bar{q} = \frac{1}{\alpha^2}\exp\left(\frac{2P}{3}\right)\left(q - \frac{p'}{3} - \frac{2p^2}{9}\right) \tag{34}$$

3.4. Parámetro afín

Por tanto para una curva afín $A = A(t)$ hay un parámetro especial llamado *parámetro afín* $\bar{t} = f(t)$ (verificando la ecuación (32)) unívocamente determinado, salvo afinidades. Además el parámetro afín es invariante afín, pues solo depende de p (que es invariante lineal).

Se puede definir por ejemplo el concepto de razón simple de tres puntos sobre la curva:

$$(A(t_1); A(t_2); A(t_3)) = (f(t_1); f(t_2); f(t_3)) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_3) - f(t_1)} \tag{35}$$

independientemente del parámetro afín $\bar{t} = f(t)$ elegido.

Por otra parte, se ve que el parámetro $\bar{t} = f(t)$ es afín para la curva $A = A(t)$ si y solo si se verifica la propiedad (35) anterior para todos los t_i.

3.5. Parámetro equiafín y arco equiafín

Elijamos un parámetro afín de $A = A(t)$, $\bar{t} = f(t)$, y sea $\bar{A} = A(f^{-1}(\bar{t}))$, y f verifica la ecuación (32). Podemos elegir la constante multiplicativa α de forma que $\det\left(\bar{A}', \bar{A}''\right) = 1$. En efecto, de las ecuaciones (30) se obtiene:

$$\det(A', A'') = \det\left(f'\bar{A}', f''\bar{A}' + f'^2\bar{A}''\right) = f'^3 \det\left(\bar{A}', \bar{A}''\right)$$

así que si queremos que $f'^3 = (\alpha \exp(-P/3))^3 = \det(A', A'')$ es necesario que

$$\alpha^3 = \exp(P) \det(A', A'') \tag{36}$$

De hecho la función $\Phi = \exp(P)\det(A', A'')$ es una función constante, ya que como

$$\det(A', A'')' = \det(A'', A'') + \det(A', A''') = -p \det(A', A'')$$

es $\Phi' = \exp(P)\left(p \det(A', A'') + \det(A', A'')'\right) = 0$.

Con esta elección de f, se denomina a $\tau = f(t)$, *parámetro equiafín* de $A = A(t)$ y es un invariante geométrico.

A la ecuación $\bar{A} = \bar{A}(\tau) = A(f^{-1}(\tau))$ se denomina *ecuación normalizada* de A.

Observese que:

$$d\tau = \sqrt[3]{\det(A', A'')}dt \tag{37}$$

es un elemento invariante de arco. Se denomina a $d\tau$, *elemento de arco equiafín.* Si $A = A(t)$, está definida para $a \leq t \leq b$ el arco equiafín de A es

$$\mathcal{L}_{\text{eq}}(A) = \int_a^b d\tau = \int_a^b \sqrt[3]{\det(A', A'')}dt \tag{38}$$

y define un invariante geométrico equiafín (escalar) (véase epígrafe 1.8), es decir $\mathcal{L}_{\text{eq}}(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}_{\text{eq}}(A) = \mathcal{L}_{\text{eq}}(\tilde{A})$ si A y $\tilde{A}$ son equiafinmente equivalentes.

3.6. Curvatura equiafín

La curva $A = A(\tau)$ está parametrizada por el arco equiafin, si y solo si verifica una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^3A}{d\tau^3} = \mu \frac{dA}{d\tau} \tag{39}$$

y la condición:

$$\det(A', A'') = 1 \tag{40}$$

La función $\mu = \mu(\tau)$ se llama función de *curvatura afín*, cuya expresión explícita en el parámetro inicial t es (usando (36) y (34):

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt[3]{\det(A', A'')^2}}\left(q - \frac{p'}{3} - \frac{2p^2}{9}\right) = \frac{-K}{\sqrt[3]{\det(A', A'')^2}} \tag{41}$$

y resulta ser un invariante geométrico equiafín. La fórmula con parámetro equiafín es

$$\mu = \det\left(\frac{d^3A}{d\tau^3}, \frac{d^2A}{d\tau^2}\right)$$

3.7. Relaciones entre los invariantes equiafines y proyectivos.

Los invariantes diferencial de arco y curvatura, proyectivas y equiafines, de una curva plana están ligados por las relaciones:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{d\mu}{d\tau}}$$

$$k = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{d\mu}{d\tau}}\right)^2}\left(-\frac{\mu}{2} - \frac{1}{3}\frac{d^3\mu/d\tau^3}{\mu} + \frac{7}{18}\left(\frac{d^2\mu/d\tau^2}{d\mu/d\tau}\right)^2\right)$$

Para probar esto, basta tomar la curva $A = A(\tau)$ parametrizada por el arco equiafín, determinar H por medio de la fórmula (18) tomando $p = 0$, $q = -\mu$, $r = 0$, obteniendo

$$H = \frac{1}{2}\frac{d\mu}{d\tau}$$

la primera fórmula se deduce entonces por sustitución en (19) y la segunda en (22).

3.8. La referencia movil afín de Frenet.

Supuesto la curva $A = A(\tau)$ parametrizada por el arco equiafín, probaremos que existe una única referencia movil a lo largo de la curva (A_1, A_2) de forma que $A_1 = A'$ que verifican las siguientes ecuaciones (de Frenet):

$$\begin{aligned} dA_1/d\tau &= A_2 \\ dA_2/d\tau &= \mu A_1 \end{aligned} \tag{42}$$

con la condición adicional:

$$\det(A_1, A_2) = 1 \tag{43}$$

Si esto es cierto, la función $\mu = \mu(\tau)$, es necesariamente la curvatura afín, ya que de la primera y segunda ecuación se obtiene (39). Recíprocamente, fijada $A = A(\tau)$ parametrizada por el arco afín, verifica la ecuación (39) y la (40) tomamos $A_1 = A'$, $A_2 = A''$: y automáticamente la referencia (A_1, A_2) verifica las ecuaciones (42).y (43)

La unicidad es evidente.

3.9. Clasificación equiafín de las curvas planas.

Si $A = A(t)$, es una curva afín la función $\mu_A = \mu_A(t)$ denota su curvatura equiafín. Esta función μ_A solo depende de la clase equiafín de la curva, según se vió en el apartado 41. Es decir, si $A = A(t)$, y $B = B(t)$ son proyectivamente equivalentes, entonces $\mu_A(t) = \mu_B(t)\ \forall t$. Así la función curvatura aín, es un invariante geométrico equiafín de las curvas planas. Se trata de ver que este invariante es completo, es decir:

Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $\mu = \mu(\tau)$, un sistema de referencia equiafín, $(C_0; C_1, C_2)$ y un valor concreto del parámetro $\tau = a$, existe una única curva $A = A(\tau)$ P.P.A.E con curvatura métrica $\mu_A = \mu$, y cuyo diedro de Frenet $A_1 = A'$, A_2 verifica:

$$A(a) = C_0,\ A_1(a) = C_1,\ A_2(a) = C_2$$

En particular, si $A = A(\tau)$, $B = B(\tau)$ son curvas P.P.A.E.que tienen la misma función de curvatura equiafín $\mu(\tau) = \mu_A(\tau) = \mu_B(\tau)$ entonces definen curvas equiafinmente equivalentes.

Demostración:

Si $\mu = \mu(\tau)$ $0 \leq \tau \leq L$ es una función diferenciable, planteamos la búsqueda de A_1, A_2 verificando las ecuaciones de Frenet (42). y (43). Escribiendo (42) tomando $A_1 = (A^1, A^2)$ y $A_2 = (A^3, A^4)$ queda:

$$\begin{pmatrix} dA^1/d\tau \\ dA^2/d\tau \\ dA^3/d\tau \\ dA^4/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \\ A^4 \end{pmatrix} \tag{44}$$

que es un sistema lineal. Fijado por tanto C_1, C_2 vectores con $\det(C_1, C_2) = 1$, existe una única solución $A_i = A_i(\tau)$, con $A_i(a) = C_i$ para $i = 1, 2$, que verifica las ecuaciones (42). Veamos que verifica la (43). En efecto, $\det(A_1(a), A_2(a)) = \det(C_1, C_2) = 1$, y

$$\begin{aligned} \det(A_1, A_2)' &= \det(A_1', A_2) + \det(A_1, A_2') = \\ &= \det(A_2, A_2) + \det(A_1, \mu A_1) = 0 \end{aligned}$$

finalmente fijado el origen C_0 construimos:

$$A(\tau) = C_0 + \int_a^\tau A_1(\tau) d\tau \tag{45}$$

Nótese que la curva $A = A(\tau)$ construida es la única que tiene curvatura equiafín $\mu_A = \mu$, y en $\tau = a$, su referencia equiafín de Frenet es $(C_0; C_1, C_2)$.

De esta forma si $A = A(\tau)$, y $B = B(\tau)$, son curvas P.P.A.E. que tienen la misma cuvatura equiafín $\mu = \mu_A = \mu_B$, podemos considerar la transformación (equi)-afín Φ que manda el sistema de referencia $(A(0); A_1(0), A_2(0))$ al $(B(0); B_1(0), B_2(0))$ siendo (A_1, A_2) (B_1, B_2) las correspondientes referencias de Frenet. Las curvas $\Phi(A)$ y B son soluciones del sistema (44) con las mismas condiciones iniciales para $\tau = 0$. Por tanto $\Phi(A) = B$. Así A y B son equiafinmente equivalentes.

Corolario

Dos curvas equiafines $A = A(t)$, y $B = B(t)$, que tienen la misma curvatura equiafín $\mu = \mu(t)$, son equiafínmente equivalentes si y solo si se verifica:

$$\frac{d\tau_A}{dt} = \frac{d\tau_B}{dt}$$

Esta igualdad equivale (ver (38)) a:

$$\det(A', A'') = \det(B', B'')$$

3.10. Geodésicas equiafines

Las curvas $A = A(t)$ de curvatura equiafín $\mu \equiv 0$, y con parámetro afín t, se denominan geodésicas equiafines. Del sistema (42) para $\mu = 0$, se deduce que las geodésicas equiafines son las soluciones de :

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 0$$

y se concluye que fijada (C_0, C_1, C_2) sistema de referencia afín, existe una única geodésica (parábola) $A = A(t) = C_0 + tC_1 + \left(t^2/2\right) C_2$ con $A(0) = C_0$, $A'(0) = C_1$, $A''(0) = C_2$.

De todo esto se deduce que por cada vector tangente ω de orden 2 en el plano afín, hay una única geodésica equiafín que define a ω en $t = 0$.

3.11. Curvas de curvatura equiafín constante

Fijadas la referencia equiafín inicial (C_0, C_1, C_2) con $\det(C_1, C_2) = 1$, existe una única curva $A = A(\tau)$ P.P.A.A, con curvatura constante $\mu = m$ que defina en $\tau = 0$ la referencia de Frenet (C_0, C_1, C_2).

Se trata de integrar el sistema (42)

$$\begin{aligned} dA_1/d\tau &= A_2 \\ dA_2/d\tau &= mA_1 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales dadas, y luego determinar $A = A(\tau)$ por la fórmula (45). El caso $m = 0$, ya se ha estudiado. Si $m \neq 0$, distinguimos dos casos:

a) Si $m > 0$, se tiene $d^2A_1/d\tau^2 = \left(\sqrt{m}\right)^2 A_1$, $dA_1/d\tau = A_2$, de donde teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda:

$$A_1 = \left(\cosh\sqrt{m}\tau\right) C_1 + \left(\frac{\sinh\sqrt{m}\tau}{\sqrt{m}}\right) C_2$$

$$A_2 = \sqrt{m}\left(\sinh\sqrt{m}\tau\right) C_1 + \left(\cosh\sqrt{m}\tau\right) C_2$$

y usando (45) queda

$$A(\tau) = C_0 + \left(\frac{\sinh\sqrt{m}\tau}{\sqrt{m}}\right) C_1 + \left(\frac{-1+\cosh\sqrt{m}\tau}{m}\right) C_2$$

que resulta ser una hipérbola. En Efecto, si $O = C_0 - \dfrac{1}{m}C_2$, en las coordenadas X, Y del sistema de referencia equiafín (O, C_1, C_2) la curva tiene por ecuación

$$\frac{Y^2}{\left(1/\sqrt{m}\right)^2} - \frac{X^2}{\left(1/m\right)^2} = 1$$

b) Si $m < 0$, se tiene $d^2A_1/d\tau^2 = -\left(\sqrt{-m}\right)^2 A_1$, $dA_1/d\tau = A_2$, de donde teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda:

$$A_1 = \left(\cos\sqrt{-m}\tau\right) C_1 + \left(\frac{\sin\sqrt{-m}\tau}{\sqrt{-m}}\right) C_2$$

$$A_2 = \sqrt{-m}\left(\sin\sqrt{-m}\tau\right) C_1 + \left(\cos\sqrt{-m}\tau\right) C_2$$

y usando (45) queda

$$A(\tau) = C_0 + \left(\frac{\sin\sqrt{-m}\tau}{\sqrt{-m}}\right) C_1 + \left(\frac{-1+\cos\sqrt{-m}\tau}{m}\right) C_2$$

que resulta ser una elipse. En Efecto, si $O = C_0 - \dfrac{1}{m}C_2$, en las coordenadas X, Y del sistema de referencia equiafín (O, C_1, C_2) la curva tiene por ecuación

$$\frac{Y^2}{\left(1/\sqrt{m}\right)^2} + \frac{X^2}{\left(1/m\right)^2} = 1$$

4. Clasificación de las curvas en el plano afín

4.1. La dirección normal afín de una curva.

Elegido τ parámetro equiafín para la curva $A = A(\tau)$, si $\bar{t} = f(\tau)$ es otro parámetro afín se verifica que $f'' = 0$ y por las fórmulas (30) se concluye que

$$\frac{d^2A}{d\tau^2} = \left(\frac{d\bar{t}}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2A}{d\bar{t}^2}$$

y por tanto la dirección de $d^2A/d\bar{t}^2$ no depende del parámetro afín $\bar{t}$ elegido, y es por tanto invariante geométrico afín.

4.2. Elemento de arco afín

Elegido $\bar{t} = f(t)$ parámetro afín para $A = A(t)$, la curva $\bar{A} = A(f^{-1}(\bar{t}))$ verifica (33), y $\bar{q}$ se obtiene por medio de la fórmula (34). Estas dos fórmulas muestran que la función $K = K(t)$ definida por $K = f'^2\bar{q}$, puede escribirse en la forma:

$$K = f'^2\bar{q} = q - \frac{p'}{3} - \frac{2p^2}{9} \tag{46}$$

y es un invariante afín, por serlo p, y q.

Supuesto que $K(t) \neq 0\ \forall t$, entonces K tiene signo constante $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ que es invariante afín (geométrico) que denominamos *signo.* Nótese que el par $(f, \bar{q})$ está en las condiciones del epígrafe 1.17.2 y la 1-forma:

$$d\xi = \sqrt{\varepsilon\bar{q}}df = \sqrt{\varepsilon\bar{q}}f'(t)dt = \sqrt{\varepsilon K}dt \tag{47}$$

y $d\xi$ define un elemento de arco afín.

En particular, si partimos de $A = A(\tau)$ parametrizada por el arco equiafín, se verifica

$$\frac{d^3A}{d\tau^3} - \mu\frac{dA}{d\tau} = 0$$

y sustituyendo en (46) $p = 0$, $q = -\mu$, queda $K = K(\tau) = -\mu(\tau)$ con lo que

$$d\xi = \sqrt{|\mu(\tau)|}d\tau = \sqrt{-\varepsilon\mu(\tau)}dt \tag{48}$$

4.3. Parametrización por el arco afín.

Si $A = A(t)$ está definida para $a \leq t \leq b$, el arco afín de A es:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{af}}(A) = \int_a^b d\xi = \int_a^b \sqrt{\varepsilon K}dt \tag{49}$$

y define un invariante geométrico afín (escalar) (véase epígrafe 1.8), es decir $\mathcal{L}_{AF}(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}_{\mathrm{af}}(A) = \mathcal{L}_{\mathrm{af}}(\tilde{A})$ si A y $\tilde{A}$ son afinmente equivalentes.

Fijado un origen a en el intervalo del parámetro t de la curva $A = A(t)$, de signo ε, la igualdad

$$\xi = \xi(t) = \int_a^t d\xi$$

define un cambio de parámetro. De hecho si τ es arco equiafín, $A = A(\tau)$entonces

$$\xi = \xi(\tau) = \int_a^\tau \sqrt{-\varepsilon\mu(\tau)}d\tau, \tag{50}$$

el parámetro arco afín $\xi = \xi(t)$ es así un invariante geométrico afín, unívocamente determinado salvo constantes aditivas.

Observación

Quedan excluidas de nuestro estudio, las curvas $A = A(t)$, en donde $K(t) = 0$ para algún t, y en particular quedan excluidas las que verifican la ecuación $A''' = 0$ que son exactamente las parábolas.

4.4. Ecuaciones de Frenet: Curvatura afín

Pongamos $A = A(\tau)$ P.P.A.E, y denotemos por $A = A(\xi)$ a la misma curva parametrizada por el arco afín (P.P.A.A.), y sea $A_1 = A_1(\tau)$, $A_2 = A_2(\tau)$ su diedro equiafín de Frenet. Se define:

$$A_{(1)} = \frac{dA}{d\xi} = \frac{d\tau}{d\xi}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon\mu}}A_1$$

que es el primer vector del diedro afín de Frenet. El segundo vector se toma como la *componente normal* de $dA_{(1)}/d\xi$, es decir, usando las ecuaciones equiafines de Frenet (42) queda

$$\begin{aligned} \frac{dA_{(1)}}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon\mu}}\right)A_1 + \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon\mu}}\frac{d\tau}{d\xi}\frac{dA_1}{d\tau} \\ &= \sqrt{-\varepsilon\mu}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon\mu}}\right)A_{(1)} + \frac{1}{-\varepsilon\mu}A_2 \end{aligned}$$

Así pues, debemos tomar

$$A_{(2)} = \frac{1}{-\varepsilon\mu}A_2$$

derivando ahora $A_{(2)}$ respecto a ξ, y usando (42) queda

$$\frac{dA_{(2)}}{d\xi} = \mu\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\mu}\right)A_{(2)} - \varepsilon A_{(1)}$$

Llamando *curvatura afín*

$$\varkappa = \frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\mu/d\xi}{\mu} = \frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{d\tau}{d\xi}\right) \tag{51}$$

quedan las siguientes fórmulas de Frenet (donde todas las derivadas están tomadas respecto a ξ):

$$\begin{aligned} A'_{(1)} &= \varkappa A_{(1)} + A_{(2)} \\ A'_{(2)} &= -\varepsilon A_{(1)} + 2\varkappa A_{(2)} \end{aligned} \tag{52}$$

La expresión explícita de la curvatura afín $\varkappa$ en un parámetro inicial t arbitrario se obtiene de la siguiente forma:

Si $\tau = f(t)$ es el parámetro afín y $\xi = \xi(t)$ es el arco afín dado en (50), se tiene:

$$\varkappa = \frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{d\tau}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{d\tau}{dt}\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{dt}{d\xi}\right)$$

Usando (31) y (50), se ve que

$$\frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{d\tau}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\ln f')\frac{1}{d\xi/dt} = -\frac{p}{3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon K}}$$

respecto al segundo sumando podemos escribir

$$\frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{dt}{d\xi}\right)=\frac{d\xi}{dt}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{d\xi/dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon K}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon K'}{\sqrt{(\varepsilon K)^3}}$$

y sumando queda finalmente:

$$\varkappa=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon K}}\left(-\frac{p}{3}+\frac{K'}{2K}\right) \tag{53}$$

4.5. Clasificación afín de las curvas planas.

Establecemos, ya sin demostración, el siguiente:

Teorema

Dada una función diferenciable $\varkappa=\varkappa(\xi)$, un signo $\varepsilon\in\{-1,1\}$, y un sistema de referencia afín, $(C_0;C_1,C_2)$ y un valor concreto del parámetro $\xi=a$, existe una única curva $A=A(\xi)$ P.P.A.A con curvatura afín $\varkappa_A=\varkappa$ y signo $.\varepsilon_A=\varepsilon$, y cuyo diedro de Frenet $A_1=A'$, A_2 verifica:

$$A(a)=C_0,\ A_1(a)=C_1,\ A_2(a)=C_2$$

En particular, $A=A(\xi)$, $B=B(\xi)$ son curvas parametrizadas por el arco afín (P.P.A.A) que tienen la misma función de curvatura afín $\varkappa(\xi)=\varkappa_A(\xi)=\varkappa_B(\xi)$ y mismo signo $\varepsilon=\varepsilon_A=\varepsilon_B$, entonces definen curvas afinmente equivalentes.

Corolario

Dos curvas afines $A=A(t)$, y $B=B(t)$, que tienen la misma curvatura afín $\varkappa=\varkappa(t)$ y el mismo signo ε, son afínmente equivalentes si y solo si se verifica:

$$\frac{d\xi_A}{dt}=\frac{d\xi_B}{dt}$$

Esta igualdad equivale (ver (50)) a:

$$K_A=K_B$$

4.6. Geodésicas afines

Las curvas $A=A(\xi)$ de curvatura afín$\varkappa=0$ con parámetro arco afín ξ, se denominan geodésicas equiafines. Usando las ecuaciones (52), y $A_{(1)}=dA/d\xi$ se ve que la curva $A=A(\xi)$ P.P.A.A verifica la diferencial de tercer orden :

$$\frac{d^3A}{d\xi^3}-3\varkappa\frac{d^2A}{d\xi^2}+\left(\varepsilon-\varkappa'+2\varkappa^2\right)\frac{dA}{d\xi}=0 \tag{54}$$

Haciendo ahora en (54) $\varkappa=0$, se concluye que el parámetro ξ arco afín, es también parámetro afín, y las geodésicas afines son exactamente las soluciones de

$$\frac{d^3A}{d\xi^3}+\varepsilon\frac{dA}{d\xi}=0$$

Por tanto, fijado (C_0,C_1,C_2) sistema de referencia afín, existen exactamente dos geodésicas con $(C_0,C_1,C_2)=(A(0),A'(0),A''(0))$:

$$A(\xi)=A(0)+A''(0)-A''(0)\cos\xi+A'(0)\sin\xi,\ \text{para }\varepsilon=1$$

$$A(\xi)=A(0)+A''(0)-A''(0)\cosh\xi+A'(0)\sinh\xi,\ \text{para }\varepsilon=-1$$

De todo esto se deduce que por cada vector tangente ω de orden 2 en el plano proyectivo, hay exactamente dos geodésicas afines (hipérbola y elipse) que definen a ω en $\xi=0$.

4.7. Curvas afines de curvatura constante

Para determinar las curvas de curvatura afín constante$\varkappa = r$, distinguimos los siguientes casos:

a) Si $r = 0$, entonces por (51) se deduce que $\mu = \mu(\xi) = m$ es constante, y de el apartado 3.11 se concluye que si $\varepsilon = +1$ (es decir $m < 0$) es una elipse, y si $\varepsilon = -1$ es hipérbola

Si $r \neq 0$ hay que resolver la ecuación diferencial

$$d^2 A_{(1)}/d\xi^2 - 3rdA_{(1)}/d\xi + \left(2r^2 + \varepsilon\right) A_{(1)} = 0$$

cuya ecuación característica $\lambda^2 - (3r)\,\lambda + \left(2r^2 + \varepsilon\right) = 0$ tiene discriminante

$$\Delta = r^2 - 4\varepsilon$$

por lo que habra que distinguir los siguientes casos:

b) $\varepsilon = -1$

c) $\varepsilon = 1$, $|r| > 2$

d) $\varepsilon = 1$, $|r| = 2$

e) $\varepsilon = 1$, $|r| < 2$

5. Clasificación de las curvas en el plano de Moebius.

5.1. El plano de Moebius, la recta proyectiva compleja y la esfera de Riemann

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, se identifica con el plano real $\mathbb{R}^2$. Basta para ello identificar la pareja (X_0, X_1) de números reales con el número complejo $X = X_0 + iX_1$. La recta proyectiva compleja $\mathbb{P}$, es una superficie definida por las parametrizaciones locales

$$j_0 : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni Y \to (1 : Y) \in \mathbb{P} - \{(0:1)\} = \mathbb{P}_0$$

$$j_1 : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni X \to (X : 1) \in \mathbb{P} - \{(0:1)\} = \mathbb{P}_1$$

las ecuaciones del cambio de coordenadas son

$$\mathbb{C} - \{0\} \ni X \to Y = \frac{1}{X} \in \mathbb{C} - \{0\}$$

que define una transformación conforme en $\mathbb{R}^2$ con su estructura euclidea natural. Es por esto que en $\mathbb{P}$ hay una estructura conforme natural. La recta proyectiva $\mathbb{P}$ (con su estructura conforme), puede verse geométricamente a través de j_1, como un plano $\widetilde{\mathbb{C}}$ (con su estructura euclidea conforme) ampliado con un punto del infinito, $\infty = (1, 0)$ cuando identificamos:

$$(X : Y) = \frac{X}{Y}, \text{ siendo } \frac{X}{0} = \infty = (1 : 0) \tag{55}$$

También puede verse $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}}$ como la esfera $\mathbb{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (con su estructura conforme canónica), cuando identificamos:

$$(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),\ (0, 0, 1) = \infty$$

Se denomina a $\mathbb{S}$ *esfera de Riemann.*

5.2. Transformaciones de Moebius positivas

Las aplicaciones $\mathbb{P} \ni (X : Y) \to (\tilde{X} : \tilde{Y}) \in \mathbb{P}$ tales que

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \tag{56}$$

forman el grupo de las homografías de la recta proyectiva compleja, y respetan la estructura conforme (ver observación 5.2. Se denominan *Transformaciones de Moebius positivas (Moebius$^+$)*.

En el plano ampliado $\widetilde{\mathbb{C}}$ las transformaciones Moebius$^+$ (56) se describen por:

$$Z \to \frac{aZ + b}{cZ + d}, \text{ con } ad - bc \neq 0 \tag{57}$$

Observación

Una transformación Moebius$^+$ como (57) siempre puede escribirse como composición de transformaciones del tipo:

$$Z \to aZ + b \text{ con } a \neq 0 \tag{58}$$

y del tipo

$$Z \to 1/Z \tag{59}$$

Las transformaciones del tipo (58) describen el grupo de semejanzas del plano afín $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ que daba lugar al problema de clasificación de la sección anterior. La transformación (59) es composición de

$$Z \to 1/\overline{Z} \tag{60}$$

y de

$$Z \to \overline{Z} \tag{61}$$

La transformación (60) es una inversión de centro el origen, y potencia igual a la unidad, y como es sabido, conserva los ángulos (en la estructura euclidea de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$). La transformación (61) es una simetría ortogonal respecto al eje real. Esto prueba que la transformación (59) es transformación conforme, y en consecuencia lo son las transformaciones Moebius$^+$. Por otra parte, las transformaciones de Moebius$^+$ forman el grupo total de las transformaciones conformes de $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{S}$, que preservan la orientación.

5.3. Las transformaciones de Moebius

Se concluye entonces que el conjunto de transformaciones

$$Z \to \frac{a\overline{Z} + b}{c\overline{Z} + d}, \text{ con } ad - bc \neq 0$$

describe las transformaciones conformes que cambian la orientación, que denotamos por Moeb$^-$ y viene descrito de otra forma por el conjunto de transformaciones $\mathbb{P} \ni (X : Y) \to (\tilde{X} : \tilde{Y}) \in \mathbb{P}$ con

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \tag{62}$$

La unión de este conjunto con el grupo de Moebius$^+$ constituye el grupo total de transformaciones conformes de $\mathbb{P}$, también llamado grupo de transformaciones de Moebius.

5.4. Curvas en el plano de Moebius

Una curva sobre el plano de Moebius $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}}$, viene representada por una curva $\mathbb{C}^2$-plana $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, es decir, las funciones $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ son de variable real t con valores complejos, y satisfacen tautológicamente una ecuación diferencial del tipo

$$\det \begin{pmatrix} \theta'' & \theta' & \theta \\ X'' & X' & X \\ Y'' & Y' & Y \end{pmatrix} = 0$$

que podemos escribir de la forma:

$$\theta'' + p\theta' + q\theta = 0 \tag{63}$$

siendo:

$$p = p_0 + p_1 i = -\frac{\det(A'', A)}{\det(A', A)}, q = q_0 + q_1 i = \frac{\det(A'', A')}{\det(A', A)} \tag{64}$$

excluyendo los puntos *singulares* en donde $\det(A', A) = 0$. Como cada componente de A satisface (63), podemos escribir

$$A'' + pA' + qA = 0$$

Trabajaremos solo con curvas *regulares*, es decir, sin puntos de singulares.

Por otra parte, si $A = A(t)$ satisface una ecuación diferencial de la forma

$$A'' + \tilde{p}A' + \tilde{q}A = 0$$

entonces necesariamente $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$.

Observación

Una curva $\mathbb{C}^2$-plana $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, define una curva $[A] = (X(t) : Y(t))$ en $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}}$ y la curva plana (en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$)

$$[A](t) = (X(t) : Y(t)) = \frac{X(t)}{Y(t)}$$

según la identificación (55) Nótese que como la curva es regular, aunque *puede pasar* eventualmente por el infinito, no puede permanecer allí *tiempo* alguno.

5.5. Invariantes

Dos curvas $\mathbb{C}^2$-planas $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ se dicen *linealmente equivalentes*, si sus componentes están relacionadas por automorfismos lineales de $\mathbb{C}^2$ del tipo (62) o (56). En este último caso, se dicen que son $\mathbb{C}$-*linealmente equivalentes*. Los invariantes (de las curvas $\mathbb{C}^2$-planas) frente a estas equivalencias, se llaman *invariantes lineales* o $\mathbb{C}$-*lineales* respectivamente. Así, los invariantes p_0, p_1, q_0, q_1 definidos en (64) son invariantes $\mathbb{C}$-lineales, pero solo p_0, y q_0 son lineales, ya que $p \to \bar{p}$, y $q \to \bar{q}$ cuando se aplica a la curva una transformación del tipo (62), por tanto $p_0 \to p_0$, $q_0 \to q_0$, $p_1 \to -p_1$, y $q_1 \to -q_1$

Las curvas $\mathbb{C}^2$-planas $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ se dicen *Moebius*$^+$*-equivalentes (*respectiv. *Moebius-equivalentes*) si existe una función de valores complejos, $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable ($\lambda(t) \neq 0\ \forall t$) tal que $B(t) = \lambda(t)\tilde{A}$ es $\mathbb{C}$-linealmente equivalente a A. (respectiv. linealmente equivalente a A).

Un invariante se llama de Moebius (ó Moebius$^+$) si toma el mismo valor sobre curvas Moebius (ó Moebius$^+$) equivalentes.

Observación

Un invariante que permanece impasible cuando transformamos la curva $A = A(t)$ en $\tilde{A} = \lambda A(t)$, con $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable ($\lambda(t) \neq 0\ \forall t$) se dice que es proyectivo. Así los invariantes lineales y proyectivos son exactamente los invariantes de Moebius.

5.6. Reducción de la ecuación diferencial

Sin embargo, los invariantes p_0, p_1, q_0, q_1 definidos en (64) no son invariantes geométricos ni proyectivos de $A = A(t)$, es decir, varían frente a cambios de parámetro $\hat{t} = f(t)$, y transformaciones $\tilde{A} = \lambda A(t)$, con $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable ($\lambda(t) \neq 0\ \forall t$). De hecho se tiene:

5.6.1. Cambio de parámetro

Sea $A = A(t)$ curva $\mathbb{C}^2$-plana, $\hat{t} = f(t)$ cambio de parámetro y $\hat{A} = \hat{A}(\hat{t})$ tal que $A(t) = \hat{A}(f(t))$, entonces:

$$(p,q) \overset{\hat{t}=f(t)}{\rightsquigarrow} (\hat{p},\hat{q}) : \begin{cases} \hat{p} = \dfrac{f''}{f'^2} + \dfrac{p}{f'} \\ \hat{q} = \dfrac{q}{f'} \end{cases} \tag{65}$$

donde se supone que $A'' + pA' + qA = 0$ y $\ddot{\hat{A}} + \hat{p}\dot{\hat{A}} + \hat{q}\hat{A} = 0$ son las ecuaciones diferenciales correspondientes a A y $\hat{A}$.

5.6.2. Cambio de representante

A partir de $\lambda = \lambda(\hat{t})$ diferenciable ($\lambda(\hat{t}) \neq 0 \ \forall \hat{t}$) sea $\tilde{A} = \lambda\hat{A}(\hat{t})$, entonces:

$$(\hat{p},\hat{q}) \overset{\tilde{A}=\lambda\hat{A}}{\rightsquigarrow} (\tilde{p},\tilde{q}) : \begin{cases} \tilde{p} = -2\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \hat{p} \\ \tilde{q} = 2\left(\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \dfrac{\ddot{\lambda}}{\lambda} - \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}\hat{p} + \hat{q} \end{cases} \tag{66}$$

en donde hemos denotado por $\dot{\varphi}$ a la derivada de φ respecto a $\hat{t}$

5.6.3. Reducción de la EDT, fijado el cambio de parámetro.

De la primera fórmula de (66) y de la identidad:

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{d\hat{t}} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{dt}{d\hat{t}} = \frac{\lambda'}{f'}$$

se concluye, que fijado $\hat{t} = f(t)$ cambio de parámetro en $A = A(t)$ podemos elegir $\lambda = \lambda(t)$ de forma que:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'} + p\right) \tag{67}$$

para conseguir $\tilde{p} = 0$, además $\lambda = \lambda(t)$ queda así unívocamente determinada por f salvo constantes multiplicativas.

5.6.4. Reducción

Con la elección $\lambda = \lambda(t)$ dada en (67) queda $\ddot{\tilde{A}} + \tilde{q}\tilde{A} = 0$, con $\tilde{q} = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 i$. Se plantea buscar el cambio de parámetro $\hat{t} = f(t)$ que haga $\tilde{q}_0 = 0$. Para ello debemos determinar la $\tilde{q}$ dada en la fórmula (66.2) en función de f , p, y q usando (67) y el valor de $\hat{q}$ en (65.1). El resultado es

$$f'^2\tilde{q} = 4\{f\}_t + p^2 + 2p' - 4q \tag{68}$$

de forma que tomando $\hat{t} = f(t)$ que satisface:

$$\{f\}_t = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(-p^2 - 2p' + 4q\right) \tag{69}$$

se obtiene $\tilde{q}_0 = 0$, y llamando $r = \tilde{q}_1$, $\tilde{A}$ verifica la ecuación:

$$\ddot{\tilde{A}} + ir\tilde{A} = 0 \tag{70}$$

donde

$$r = \frac{1}{f'^2} \operatorname{Im}\left(p^2 + 2p' - 4q\right) \tag{71}$$

se denomina a (70) ecuación normalizada de $A = A(t)$.

5.7. Parámetro de Moebius.

Nótese que la ecuación diferencial (69) solo depende de la clase de Moebius de la curva. Hacemos ahora referencia al apartado 2.6 para concluir que hay un parámetro especial llamado parámetro de Moebius, $\hat{t} = f(t)$ determinado salvo homografías, (verificando la ecuación (69) para la clase de Moebius de $A = A(t)$ que permite definir por ejemplo, el concepto de razón doble de cuatro puntos sobre la curva :

$$[[A(t_1)], [A(t_2)]; [A(t_3)], [A(t_4)]] = [f(t_1), f(t_2); f(t_3), f(t_4)] \tag{72}$$

independientemente del parámetro de Moebius $\hat{t} = f(t)$ elegido, y de la clase de Moebius de $A = A(t)$. Por otra parte, se ve que un parámetro $\hat{t} = f(t)$ es de Moebius para la curva $A = A(t)$ si y solo si verifica la propiedad (72) anterior para todos los t_i.

Observación

Es importante observar ahora que partiendo de la curva $\mathbb{C}^2$-plana $A = A(t)$, y fijado un parámetro de Moebius $\hat{t} = f(t)$ queda determinada salvo constante multiplicativa, una función $\lambda = \lambda(t)$, de manera que la curva $\tilde{A}$ resultante verifica la ecuación normalizada (70).

Observación

El parámetro t de las curvas $A = A(t)$ que verifican la ecuación diferencial $A'' = 0$, es parámetro de Moebius, y son todas de la forma $A(t) = (at+b, ct+d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Poniendo $[A](0) = \infty$, podemos suponer $d = 0$, quedando de la forma

$$[A](t) = Z(t) = \alpha + \frac{\beta}{t}$$

es decir:

$$Z_0 = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{t}$$
$$Z_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{t}$$

que es la recta que pasa (para $t = \infty$) por (α_0, α_1) y tiene dirección la del vector (β_0, β_1). Nótese que la imagen de $[A]$ se identifica con una recta proyectiva, Δ en donde $[A] : \widetilde{\mathbb{R}} \to \Delta$ es una homografía. Por otra parte, la recta $Z(t) = 1 + ti$, se transforma por la homografía $Z \to 1/Z$, en la curva:

$$Z_0 = \frac{1}{1+t^2}$$
$$Z_1 = \frac{-t}{1+t^2}$$

que es la circunferencia $(Z_0 - 1/2)^2 + Z_1^2 = (1/2)^2$. Quedan pues excluidas las rectas y las circunferencias. Como el grupo conforme total, se el generado por las semejanzas lineales y la transformación $Z \to 1/Z$, se concluye que rectas y circunferencias constituyen una única clase de Moebius caracterizada por la propiedad $H_1 = 0$.

5.8. Un invariante de Moebius.

Elegido $\hat{t} = f(t)$ parámetro de Moebius para $A = A(t)$, se obtiene $\bar{r}$ por medio de la fórmula (71). Esta fórmula muestra que la función $H_1 = H_1(t)$ definida por

$$H_1 = f'^2 r = \mathrm{Im}\left(p^2 + 2p' - 4q\right) = 2p_0p_1 + 2p_1' - 4q_1 \tag{73}$$

no depende del parámetro de Moebius elegido, y es de hecho un invariante Moebius$^+$:

Demostración:

En efecto, si $A = A(t)$, y $C = C(t)$ son proyectivamente equivalentes, existe una función $\mu = \mu(t)$ de forma que $B = \mu(t)C$ es $\mathbb{C}$-linealmente equivalente a $A = A(t)$. Así A, y B verifican la misma ecuación diferencial

$$\theta'' + p\theta' + q\theta = 0$$

y podemos tomar $\hat{t} = f(t)$ parámetro proyectivo común para A y B (verificando la ecuación (69)). Debemos hacer notar ahora, que $\hat{t} = f(t)$, también es parámetro proyectivo para C ya que como $\left[C(\hat{t})\right] = \left[B(\hat{t})\right]$, se tiene

$$\begin{aligned}\left[\left[C(\hat{t}_1)\right], \left[C(\hat{t}_2)\right]; \left[C\hat{t}_3)\right], \left[C(\hat{t}_4)\right]\right] &= \left[\left[B(\hat{t}_1)\right], \left[B(\hat{t}_2)\right]; \left[B(\hat{t}_3)\right], \left[B(\hat{t}_4)\right]\right] \\ &= \left[\hat{t}_1, \hat{t}_2; \hat{t}_3, \hat{t}_4\right]\end{aligned}$$

Pongamos $\tilde{B} = \lambda(\hat{t})(B(\hat{t})$ la ecuación normalizada de B, se tiene así:

$$\frac{d^2\tilde{B}}{d\hat{t}^2} + r\tilde{B} = 0$$

Como $\left[\tilde{B}(\hat{t})\right] = \left[C(\hat{t})\right]$ se concluye por la observación 5.7 que $\tilde{B} = \tilde{B}(\hat{t})$ es también ecuación normalizada de $C(\hat{t})$ así que $r(t) = r(f(t))$ es el 'r' común a $A = A(t)$, $B = B(t)$, y $C = C(t)$, y por tanto también es común $H_1(t) = r(t)f'^2$, como queríamos demostrar.

Observación

Se excluyen a partir de ahora de nuestro estudio, las curvas cuyo invariante H_1 se anula en algún punto. Así $H_1 = H_1(t)$ tiene signo constante que denotamos por $\varepsilon = \pm 1$, y lo denominamos invariante Moebius$^+$ de *signo.*

Por otra parte el valor absoluto $|H_1| = \varepsilon H_1$ es un invariante de Moebius, ya que cuando se aplica a la curva una transformación Moebius$^-$ (62) $H_1 \to -H_1$.

Observación

Las curvas con $H_1 = 0$, son exactamente las rectas (ver observación 5.7) y las obtenidas a partir de ellas por transformaciones del tipo (56), que son circunferencias.

5.9. Elemento de arco de Moebius.

Ya que $r = r(t)$ y el parámetro de Moebius $\hat{t} = f(t)$ estan en las condiciones del epígrafe 1.17.2 la 1-forma

$$d\zeta = \sqrt{|r|}df = \sqrt{|r|}f'(t)dt = \sqrt{\varepsilon H_1}dt \tag{74}$$

que resulta ser elemento de arco invariante de Moebius, por serlo εH_1. Se denomina a $d\sigma$, *elemento de arco de Moebius.* Si $A = A(t)$, está definida para $a \leq t \leq b$ el arco de Moebius de A es

$$\mathcal{L}_m(A) = \int_a^b d\zeta = \int_a^b \sqrt{\varepsilon H_1}dt \tag{75}$$

y define un invariante geométrico de Moebius (escalar) (véase epígrafe 1.8), es decir $\mathcal{L}_c(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}_m(A) = \mathcal{L}_m(B)$ si A y B son Moebius equivalentes.

5.10. Parametrización por el arco de Moebius.

Fijado un origen a en el intervalo del parámetro t de la curva $A = A(t)$, y supuesto que $H_1(t) \neq 0\ \forall t$, la igualdad

$$\zeta = \zeta(t) = \int_a^t d\zeta$$

define un cambio de parámetro. De hecho si $A = A(t)$ es ecuación normalizada verificando

$$\frac{d^2A}{dt^2} + irA = 0$$

entonces t es parámetro de Moebius, y

$$\zeta = \zeta(t) = \int_a^t \sqrt{\varepsilon r}dt,\ \frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon r(t) \neq 0,\ \forall t$$

el parámetro arco de Moebius $\zeta = \zeta(t)$ es así un invariante geométrico de Moebius, unívocamente determinado salvo constantes aditivas.

Si $A = A(t)$ está parametrizada por el arco de Moebius (PPAM), $t = \zeta$, y por la identidad (74) $d\zeta = \sqrt{\varepsilon H_1}dt$, el invariante H_1 de Moebius$^+$ vale $H_1 = \varepsilon$.

5.11. Curvatura de Moebius.

Elegido $\zeta = \zeta(t) = \int_a^t d\zeta$ el parámetro longitud de arco de Moebius para $A = A(t)$, podemos tomar ahora $\lambda = \lambda(t)$, verificando la ecuación (67)

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'} + p\right)$$

para conseguir que $A = A(\zeta)$ satisfaga una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2A}{d\zeta^2} - \rho A = 0 \tag{76}$$

como en estas circunstancias es $H_1 = \varepsilon$, particularizando la fórmula (73) con $p = 0$, $q = \rho$, queda $H_1 = \mathrm{Im}(4\rho) = \varepsilon$, y llamando

$$\nu = \varepsilon\,\mathrm{Re}(\rho)$$

queda

$$\rho = \varepsilon\left(\nu + \frac{1}{4}i\right) \tag{77}$$

La función $\nu = \nu(\zeta)$ es un invariante (geométrico) proyectivo que se denomina *curvatura de Moebius,* y solo depende de la clase de Moebius de la curva. Si $\hat{t} = \hat{t}(\zeta)$ es el parámetro de Moebius, entonces habrá de verificar una ecuación diferencial como la (69) que en este caso queda:

$$\{\hat{t}\}_\zeta = \varepsilon\nu$$

la expresión explícita de ν en una parametrización $A = A(t)$ arbitraria es:

$$\nu = \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{H_0}{H_1} - \frac{5}{4}\frac{H_1'^2}{H_1^3} - \frac{H_1''}{H_1^2}\right) \tag{78}$$

donde

$$H = p^2 + 2p' - 4q = H_0 + iH_1 \tag{79}$$

5.12. El Invariante Fundamental H

La función H definida arriba constituye un invariante $\mathbb{C}$- de Moebius de $A = A(t)$, ya que así es para la componente imaginaria $H_1 = \mathrm{Im}(H)$ (en virtud del apartado 5.8) y para la curvatura ν. Así, la parte real H_0 se despeja de (78) tambien es invariante de Moebius. Observese que

$$H = \varepsilon\,(4\nu + i) \text{ si } A = A(\zeta) \text{ está PPAC}$$

5.13. La referencia movil de Moebius-Frenet.

Supuesto la curva $A = A(\zeta)$ curva $\mathbb{C}^2$-plana parametrizada por el arco de Moebius, hay por tanto una única referencia movil a lo largo de la curva, (A_0, A_1, A_2) determinada salvo una constante multiplicativa de forma que $A_0 = \lambda A(\zeta)$ con $\lambda = \lambda(\zeta)$ función diferenciable, y verifican las siguientes ecuaciones (de Frenet):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dA_0}{d\zeta} = A_1 \\ \dfrac{dA_1}{d\zeta} = A_2 \\ \dfrac{dA_2}{d\zeta} = \varepsilon\left(\nu + \dfrac{i}{4}\right)A_0 \end{array}\right. \tag{80}$$

5.14. Clasificación de Moebius de las curvas.

Si $A = A(t)$, es una curva $\mathbb{C}^2$-plana, la función $\nu_A = \nu_A(t)$ denota su curvatura de Moebius. Esta función ν_A solo depende de la curva proyectiva $[A]$, y más exactamente, de la clase de Moebius de la curva, según se vió en el apartado 5.11. Es decir, si $A = A(t)$, y $B = B(t)$ son Moeebius equivalentes, entonces $\nu_A(t) = \nu_B(t)\ \forall t$. Así la función curvatura de Moebius, es un invariante geométrico proyectivo de las curvas planas. Se trata de ver que este es un invariante completo, es decir:

Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $\nu = \nu(\zeta)$, un signo $\varepsilon = \pm 1$, una referencia $(C_0; C_1, C_2)$, y un valor concreto del parámetro $\zeta = a$, existe una curva $\mathbb{C}^2$-plana (determinada salvo constante multiplicativa) $A = A(\zeta)$ P.P.A.C con curvatura $\nu_A = \nu$, y signo ε, cuya referencia de Frenet A_0, A_1, y A_2 verifica:

$$A_0(a) = C_0,\ A_1(a) = C_1, \text{y } A_2(a) = C_2$$

En particular, si $A = A(\zeta)$, $B = B(\zeta)$ son curvas parametrizadas por el arco de Moebius (P.P.A.C) que tienen la misma función de curvatura proyectiva $\nu(\zeta) = \nu_A(\zeta) = \nu_B(\zeta)$ entonces definen curvas Moebius equivalentes.

Corolario

Dos curvas $\mathbb{C}^2$-planas $A = A(t)$, $B = B(t)$ tienen la misma curvatura de Moebius $\nu = \nu(t)$, (ver fórmula (78)), entonces son Moebius equivalentes, si y solo si se verifica:

$$\frac{d\zeta_A}{dt} = \frac{d\zeta_B}{dt}$$

donde ζ_A, y ζ_B son los parametros arco de Moebius correspondientes. Esta igualdad, equivale (ver (74)) a

$$|(H_A)_1| = |(H_B)_1|$$

En virtud de las fórmulas (78) y (74) se concluye entonces

Dos curvas $\mathbb{C}^2$-planas $A = A(t)$, $B = B(t)$ son son Moeebius equivalentes si y solo si

$$H_A = H_B \text{ ó bien } H_A = \overline{H_B}$$

en el primer caso, son Moeb$^+$-equivalentes.

5.15. Geodésicas

Una geodésica es una curva $A = (X(\zeta), Y(\zeta))$ parametrizada por el arco de Moebius, con curvatura de Moebius $\nu = 0$. Usando (76) y (77) se concluye que las geodésicas verifican una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2A}{d\zeta^2} = \varepsilon\left(\frac{i}{4}\right) A \text{ con } \varepsilon = \pm 1$$

la solución general es

$$A(\zeta) = A(0)\cosh(m\zeta) + \frac{A'(0)}{m}\sinh(m\zeta) \text{ con } m = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \varepsilon i)$$

En particular, tomando

$$\varepsilon = 1, X(\zeta) = \sinh(m\zeta), Y(\zeta) = \cosh(m\zeta),\ Z = \frac{X}{Y}$$

la curva $(Z_0(\zeta), Z_1(\zeta))$ tiene el siguiente aspecto (para $\varepsilon = -1$, la curva sería la simétrica respecto al eje Z_1)

cada vector tangente ω determina exactamente dos geodésicas A y B con $A'(0) = B'(0) = \omega$.

6. Clasificación de las curvas en el plano euclídeo

6.1. El plano euclideo

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, mirado como $\mathbb{R}$-plano afín, se identifica con el plano real $\mathbb{R}^2$. Basta para ello identificar la pareja (X_0, X_1) de números reales con el número complejo $X = X_0 + iX_1$. La estructura algebraica de $\mathbb{C}$ permite establecer la estructura euclidea usual del plano, cuya norma viene definida por el módulo:

$$|X|^2 = X\bar{X} = (X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = X_0^2 + X_1^2$$

y que procede del producto escalar ordinario que viene dado por:

$$\langle X, Y\rangle = Real\left(X\bar{Y}\right)$$

Por otra parte, $\mathbb{C}$ puede verse como subconjunto del plano ampliado $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \{X = (X : 1) : X \in \mathbb{C}\} \cup \{(1 : 0)\}$, y la estructura euclidea ordinaria de $\mathbb{C}$ es compatible con la conforme de $\widetilde{\mathbb{C}}$ (ver epígrafe 5.1). Así, las transformaciones de Moebius que dejan fijo el punto del infinito ∞ constituye el grupo de las transformaciones conformes de $\mathbb{C}$, que son aplicaciones $\mathbb{R}-$lineales que pueden escribirse en la forma (ver (56) y (62)) $\mathbb{C} \ni X \to \tilde{X} \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \tag{81}$$

para las que conservan la orientación y

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \tag{82}$$

para las que la cambian. La razón de semejanza es $|a|$, por lo que si $|a| = 1$ se obtienen los movimientos del plano.

Una curva plana viene dada ahora por una aplicación diferenciable de un intervalo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

$$X(t) = (X(t) : 1) = X_0(t) + iX_1(t) = (X_0(t), X_1(t))$$

también denotamos por

$$A = A(t) = (X(t), 1)$$

la correspondiente curva $\mathbb{C}^2$-plana. Se verifica tautológicamente una ecuación diferencial de segundo órden dada por

$$\begin{vmatrix} \theta'' & \theta' \\ X'' & X' \end{vmatrix} = 0$$

que podemos escribir de la forma:

$$\theta'' + p\theta' = 0$$

siendo:

$$p = -\frac{X''}{X'} = p_0 + ip_1 \tag{83}$$

excluyendo los *puntos singulares* en donde $X' = 0$. También podemos escribir

$$X'' + pX' = 0 \tag{84}$$

Trabajaremos solo con curvas *regulares*, es decir, sin puntos singulares.
Por otra parte, si $X = X(t)$ satisface una ecuación diferencial de la forma

$$X'' + \tilde{p}X' = 0$$

entonces necesariamente $p = \tilde{p}$.

Observación

El invariante p ($q = 0$) corresponde con el definido en (64) para la curva $\mathbb{C}^2$-plana $A(t) = (X(t), 1)$ que en adelante identificaremos con la curva plana $A = X(t)$.

6.2. Invariantes conformes y métricos.

Dos curvas planas $A = (X(t), 1)$, y $\tilde{A} = (\tilde{X}(t), 1)$ se dicen *conformente equivalentes*, (*C-equivalentes)* si sus componentes están relacionadas por automorfismos lineales de $\mathbb{C}^2$ del tipo (81) o (82). En el primer caso se dicen *C^+-equivalentes.* Cuando se trata de movimientos ($|a| = 1$) se dice que son *métricamente equivalentes.*(*M-equivalentes o M^+*-equivalentes) Los invariantes (de las curvas planas) frente a estas equivalencias, se llaman *invariantes conformes* o *métricos o conformes*$^+$ o *métricos*$^+$(*C,M,C^+,M^+*) respectivamente. Así, el invariante $p_0 = \mathrm{Re}(p)$ definido en (83) por ser invariante lineal, es conforme y por tanto métrico. Sin embargo cuando se aplica una transformación tipo (82), $p \to \bar{p}$, por tanto , $p_1 \to -p_1$. En todo caso $|p_1|$ es también invariante lineal, métrico y conforme, y p_1 lo es C$^+$ y M$^+$. Podemos determinar explícitamente p_0 y p_1 mediante las fórmulas:

$$p_0 = -\frac{\langle X', X''\rangle}{\langle X', X'\rangle} = -\frac{d}{dt}\ln\left(\sqrt{\langle X', X'\rangle}\right) \tag{85}$$

$$p_1 = -\frac{\det(X', X'')}{\langle X', X'\rangle} \tag{86}$$

6.3. Parámetro conforme, y arco métrico.

Sin embargo, los invariantes p_0, p_1 definidos en (83) no son invariantes geométricos de $A = X(t)$, es decir, varían frente a cambios de parámetro $\hat{t} = f(t)$. De hecho, usando las fórmulas de transformación (65) $(p, 0) \overset{\hat{t}=f(t)}{\rightsquigarrow} (\hat{p}, 0)$ podemos ajustar f para que $\hat{p}_0 = 0$ imponiendo

$$\frac{f''}{f'} = \left(\frac{d}{dt}\ln f'\right) = -p_0$$

usando (85) se concluye que una solución general de la ecuación anterior es, tomando un origen

$$f(t) = \alpha\int_a^t |X'|\,dt + \beta \text{ con } \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$$

se denomina a $\hat{t} = f(t)$ *parámetro conforme*, que es invariante conforme, pues solo depende de p_0, y queda unívocamente determinado, salvo transformaciones afines de parámetro. Observese que usando nuevamente las fórmulas de transformación (65) y (86) queda:

$$\hat{p}_1 = \frac{p_1}{f'} = \frac{p_1}{\alpha\,|X'|} = -\frac{\det(X', X'')}{\alpha\,|X'|^{3/2}} \tag{87}$$

Tomando la constante $\alpha = 1$, se denomina a $s = f(t)$ parámetro arco métrico de $A = A(t)$ y es invariante métrico y geométrico. Se denomina a

$$ds = |X'|\,dt \tag{88}$$

elemento de arco métrico Si $A = A(t)$, está definida para $a \leq t \leq b$ el arco métrico ó *longitud* de A es

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(A) = \int_a^b ds = \int_a^b |X'|\,dt$$

y define un invariante geométrico métrico (escalar) (véase epígrafe 1.8), es decir $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(A) = \mathcal{L}_{\mathrm{m}}(\tilde{A})$ si A y $\tilde{A}$ son M-equivalentes.

6.4. Curvatura métrica

La curva $X = X(s)$ tiene parámetro conforme, si y solo si verifica una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2X}{ds^2} = p_1\left(i\frac{dX}{ds}\right), \; p_1 \in \mathbb{R} \tag{89}$$

y el parámetro es arco métrico, si y solo si, además se verifica:

$$|X'| = 1 \tag{90}$$

en este caso, la función $p_1 = \vec{\kappa} = \vec{\kappa}(s)$ se llama función de *curvatura métrica orientada* y es invariante por movimientos directos. La función $\kappa = |\vec{\kappa}|$ se denomina curvatura métrica La expresión explícita de $\vec{\kappa}$ en el parámetro inicial t es (usando (86)

$$\vec{\kappa} = \frac{\det(X', X'')}{|X'|^{3/2}} \tag{91}$$

La curvatura métrica κ resulta ser un invariante métrico geométrico. La fórmula con parámetro arco métrico es

$$\kappa = |X''|$$

Observación

Nótese que si $\kappa > 0$, entonces $\kappa = \vec{\kappa}$ y $\kappa' = \vec{\kappa}'$, $\kappa'' = \vec{\kappa}''$, mientras que si $\kappa < 0$, entonces $\kappa = -\vec{\kappa}$ y $\kappa' = -\vec{\kappa}'$, $\kappa'' = \vec{\kappa}''$. Por otra parte, usando la observación (6.2) se ve que si $A = X(t) = X_0(t) + iX_1(t)$, y $\bar{A} = \bar{X}(t) = X_0(t) - iX_1(t)$ entonces $\vec{\kappa}_{\bar{A}} = -\vec{\kappa}_A$.

6.5. Los invariantes de Moebius en función de los métricos.

Los invariantes diferencial de arco y curvatura, de Moebius y métricos, de una curva plana están ligados por las relaciones:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \sqrt{2\left|\frac{d\kappa}{ds}\right|}$$

$$\nu = \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa^2}{2\,|\kappa'|} + \frac{5}{8}\frac{\kappa''}{|\kappa'|^3} + \frac{1}{2}\frac{\kappa'''}{\kappa'^2}\right)$$

basta para probar esto, tomar la curva $A = X(s)$ parametrizada por el arco métrico, y determinar H por la fórmula (79) y teniendo en cuenta que ahora se verifica la ecuación reducida (89) podemos tomar $q = 0$, $p = -i\vec{\kappa}$ quedando

$$H = -\kappa^2 - 2\vec{\kappa}'i = H_0 + iH_1$$

Aplíquese luego las fórmulas (74) y (78), teniendo en cuenta que $\varepsilon = -signo(\kappa')$ y la observación 6.4.

6.6. Ecuaciones métricas de Frenet

Supuesto $X = X(s)$ PPAM, definimos el diedro de Frenet $A_1 = X'(s)$, $A_2 = iA_1$ de (89) se deduce que se verifican las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1' &= \vec{\kappa}A_2 \\ A_2' &= -\vec{\kappa}A_1 \end{aligned} \tag{92}$$

que son las *ecuaciones métricas de Frenet*.

Dada la curva $A = X(t)$, llamamos *determinación diferenciable del ángulo* (D.D.A.) a una función diferenciable $\theta = \theta(t)$, tal que

$$X'(t) = |X'(t)|\exp(i(\theta(t)) \tag{93}$$

se puede probar que las D.D.A existen, y están determinadas salvo múltiplos enteros de 2π. Nótese que $\theta(t)$ representa el ángulo determinado entre $A'(t)$ y el eje *real*, por lo que, es un invariante geométrico. Si el parámetro $t = s$ es el arco métrico, entonces el vector tangente $A_1 = X'$ es unitario y

$$A_1(s) = \exp(i(\theta(s))$$

Nótese que $A_1'(s) = \theta'(s)i\exp(i(\theta(s)) = \theta'(s)A_2(s)$ y por la primera fórmula (92) se tiene

$$\vec{\kappa}(s) = \theta'(s) \text{ y } \kappa(s) = \left|\theta'(s)\right| \tag{94}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $\vec{\kappa} = \vec{\kappa}(s)$, un sistema de referencia ortonormal, $(C_0; C_1, C_2 = iC_1)$ y un valor concreto del parámetro $s = a$, existe una única curva $A = (X(s), 1)$ P.P.A.M con curvatura métrica $\kappa_A = \kappa$, y cuyo diedro de Frenet $A_1 = A'$, $A_2 = iA_1$ verifica:

$$A(a) = C_0,\; A_1(a) = C_1,\; A_2(a) = C_2$$

En particular, si $A = A(s)$, $B = B(s)$ son curvas parametrizadas por el arco métrico (P.P.A.M) que tienen la misma función de curvatura métrica orientada $\vec{\kappa}(s) = \vec{\kappa}_A(s) = \vec{\kappa}_B(s)$ entonces definen curvas M^+-equivalentes

La demostración puede iniciarse ahora de manera algo diferente:

Pongamos $C_1 = \exp(i\beta)$, entonces $C_2 = i\exp(i\beta)$. Busquemos una función $\theta = \int \kappa$, verificando $\theta(a) = \beta$ y definamos:

$$A_1 = \exp(i\theta)$$

la curva buscada es $A = (X(s), 1)$ es única, y se obtiene la fórmula

$$X(s) = C_0 + \int_a^s \cos\theta(s)ds + i\int_a^s \sin\theta(s)ds \tag{95}$$

el resto del teorema tiene demostración estandar.

Corolario

Dos curvas $A = (X(t), 1)$ $B = (Y(t), 1)$ son M^+-equivalentes, si y solo si, tienen la misma función de curvatura métrica orientada, y la misma diferencial de arco métrico, es decir:

$$\vec{\kappa}_A(t) = \vec{\kappa}_B(t),\ \frac{ds_A}{dt} = \frac{ds_B}{dt}$$

Corolario

Dos curvas A, B son M-equivalentes, si y solo si, tienen la misma función de curvatura métrica, y la misma diferencial de arco métrico, es decir:

$$\kappa_A(t) = \kappa_B(t),\ \frac{ds_A}{dt} = \frac{ds_B}{dt}$$

Demostración: Si $\vec{\kappa}_A = \vec{\kappa}_B$ por el corolario 6.6 son M equivalentes. Si $\vec{\kappa}_A = -\vec{\kappa}_B$, entonces por la observación 6.4 es $\vec{\kappa}_{\bar{B}} = -\vec{\kappa}_B = \vec{\kappa}_A$ y así A y $\bar{B}$ son métricamente$^+$-equivalentes, por tanto A y B son métricamente equivalentes.

6.7. Geodésicas métricas

Las curvas de curvatura métrica $\kappa = 0$ parametrizadas por el arco métrico verifican en virtud de (89) la condición

$$\frac{d^2X}{ds^2} = 0,\ \ |X'| = 1$$

eliminando la segunda condición, se obtienen las geodésicas métricas, que son las curvas con parámetro conforme y curvatura mérica nula, y son todas de la forma

$$X(t) = X(0) + tX'(0)$$

que son rectas afines.

6.8. Curvas de curvatura métrica constante.

Supuesto $\kappa > 0$, constante, y fijado el punto C_0 podemos construir explícitamente la curva de curvatura constante $X(s)$, con $X(0) = C_0$, utilizando la fórmula (95) para $\theta = \kappa s + \theta_0$, y llamando $r = 1/\kappa$:

$$\begin{aligned} X(s) &= C_0 + \int_0^s \cos(\kappa s + \theta_0)\,ds + i\int_0^s \sin(\kappa s + \theta_0)\,ds \\ &= C_0 + r\left(\sin(\kappa s + \theta_0) - \sin\theta_0 + i\left(\cos\theta_0 - \cos(\kappa s + \theta_0)\right)\right) \end{aligned} \tag{96}$$

que es una circunferencia de radio r PPAM con condiciones iniciales $X(0) = C_0$, y $X'(0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$

6.9. Los invariantes equiafines en función de los métricos.

Debemos cambiar ahora la notación, para adaptarnos a la de las curvas equiafines. El significado de p y q es el que aparece en el epígrafe 51, y nuestra curva $A(s) = (X(s), 1)$ PPAM, se identifica ahora con $A(s) = (X_0(s), X_1(s))$, de forma que el diedro de Frenet asociado es

$$A_1(s) = A'(s) = (X_0'(s), X_1'(s)), A_2(s) = (-X_1'(s), X_0'(s))$$

usando ahora las ecuaciones (92) y derivando la primera de ellas, se deduce fácilmente que A verifica la EDT

$$\frac{d^3A}{ds^3} - (\ln\kappa)' \frac{d^2A}{ds^2} + (\ln\kappa)^2 \frac{dA}{ds} = 0$$

así teniendo en cuenta que por (91) $\det(A', A'') = \kappa$, podemos aplicar la fórmula (41) para $p = -(\ln\kappa)'$, $q = \kappa^2$ para obtener

$$\mu = \frac{1}{\kappa^{2/3}} \left(\kappa^2 + \frac{(\ln\kappa)''}{3} - \frac{2(\ln\kappa)'^2}{9} \right)$$

por otra parte, de (37) se deduce

$$d\tau = \sqrt[3]{\kappa} ds$$

7. Clasificación de las curvas en el plano conforme

7.1. Arco conforme

Partimos de una curva $A = (X(t), 1)$ y su EDT asociada $X'' + pX' = 0$. Elegido un parámetro conforme $\hat{t} = f(t)$, la curva $\hat{X}(\hat{t}) = X(f^{-1}(\hat{t}))$ verifica una EDT de la forma (ver(87))

$$\frac{d^2\hat{X}}{d\hat{t}^2} + \hat{p}_1 \frac{d\hat{X}}{d\hat{t}} = 0 \text{ con } \hat{p}_1 = -\frac{\det(X', X'')}{\alpha\, |X'|^{3/2}} = \frac{p_1}{f'}$$

lo cual indica que la función $|\hat{p}_1 f'| = |p_1(t)|$ es un invariante conforme. Por otra parte el par $(f, |\hat{p}_1|)$está en las condiciones del epígrafe 1.17.2 y la 1-forma

$$d\vartheta = |\hat{p}_1|\, f'(t)dt = |\hat{p}_1|\, df \tag{97}$$

que resulta ser un elemento de arco conforme. Si $A = A(t)$, está definida para $a \le t \le b$ el arco conforme de A es

$$\mathcal{L}_c(A) = \int_a^b d\vartheta = \int_a^b |p_1(t)|\, dt = \int_a^b \left| \frac{\det(X', X'')}{\langle X', X' \rangle} \right| dt \tag{98}$$

y define un invariante geométrico conforme (escalar) (véase 1.8), es decir $\mathcal{L}_c(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}_c(A) = \mathcal{L}_c(\tilde{A})$ si A y $\tilde{A}$ son conformemente equivalentes.

7.2. Arco conforme y curvatura métrica

En el supuesto que la curva inicial $A = (X(s), 1)$ esté PPAM, entonces s es parámetro conforme, y usando (89) se concluye que

$$d\vartheta = |p_1(s)|\, ds = \kappa ds \tag{99}$$

así si $\theta = \theta(s)$ es una DDA (ver(93)), usando las igualdades (94) se concluye que:

$$d\vartheta = |d\theta|\,,\ \text{y}\ \mathcal{L}_c(A) = \int_a^b d\vartheta = \int_a^b \left|\frac{d\theta}{ds}\right| ds = |\theta(b) - \theta(a)|$$

7.3. Ecuaciones de Frenet: Curvatura conforme

Pongamos $A = (X(s), 1)$ P.P.A.M. Supongamos $\vec{\kappa} = \kappa$ (es decir $\vec{\kappa} > 0$; si no fuera así, sustituiriamos A por su conjugada $\bar{A} = (\bar{X}, 1)$. Denotemos por $A = (X(\vartheta), 1)$ a la misma curva parametrizada por el arco conforme (P.P.A.C), y sea $A_1 = A_1(s)$, $A_2 = A_2(s) = iA_1(s)$ su diedro métrico de Frenet. Se tiene por (99):

$$A_{(1)} = \frac{dX}{d\vartheta} = \frac{dX}{ds}\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{1}{\kappa}A_1$$

que es el primer vector del diedro confrme de Frenet. El segundo vector se toma ya obligadamente, como:

$$A_{(2)} = iA_{(1)} = \frac{1}{\kappa}A_2 \tag{100}$$

derivando ahora $A_{(1)}$ y $A_{(2)}$ respecto a ϑ, por medio de la regla la cadena

$$\frac{d}{d\vartheta} = \frac{d}{ds}\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}$$

y aplicando las fórmulas métricas de Frenet (92) se obtiene:

$$\begin{aligned} A'_{(1)} &= -\left(\kappa'/\kappa\right) A_{(1)} + A_{(2)} \\ A'_{(2)} &= -A_{(1)} - \left(\kappa'/\kappa\right) A_{(2)} \end{aligned}$$

en donde todas las derivadas están tomadas respecto a ϑ. La función

$$\varrho = -\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{d}{d\vartheta}\ln\frac{1}{\kappa} \tag{101}$$

es pues un invariante conforme que denominamos *curvatura conforme-lineal*. Su expresión cuando $A = A(s)$ está parametrizada por el arco métrico es:

$$\varrho = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} = -\frac{|X''|'}{|X''|^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right) \tag{102}$$

y usando una parametrización arbitraria $A = A(t)$, queda:

$$\varrho = \frac{1}{|X'|}\frac{d}{dt}\left(\frac{|X'|^3}{\det\left(X', X''\right)}\right) \tag{103}$$

Las ecuaciones conformes de Frenet quedan de la forma:

$$\begin{aligned} A'_{(1)} &= \varrho A_{(1)} + A_{(2)} \\ A'_{(2)} &= -A_{(1)} - \varrho A_{(2)} \end{aligned} \tag{104}$$

Establecemos, ya sin demostración, el siguiente

Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $\varrho = \varrho(\vartheta)$, un sistema de referencia conforme, $(C_0; C_1, C_2 = iC_1)$ y un valor concreto del parámetro $\vartheta = a$, existe una única curva $A = A(\vartheta)$ P.P.A.C con curvatura conforme $\varrho_A = \varrho$, y cuyo diedro de Frenet $A_{(1)} = A'$, $A_{(2)} = iA_{(1)}$ verifica:

$$A(a) = C_0,\ A_{(1)}(a) = C_1,\ A_{(2)}(a) = C_2$$

En particular, si $A = A(\vartheta)$, $B = B(\vartheta)$ son curvas P.P.A.C. que tienen la misma función de curvatura métrica $\varrho(\vartheta) = \varrho_A(\vartheta) = \varrho_B(\vartheta)$ entonces definen curvas conformemente equivalentes.

Corolario

Dos curvas $A = A(t)$, $B = B(t)$ son conformemente equivalentes, si y solo si, tienen la misma función de curvatura conforme, y la misma diferencial de arco conforme, es decir:

$$\varrho_A(t) = \varrho_B(t),\ \frac{d\vartheta_A}{dt} = \frac{d\vartheta_B}{dt}$$

7.4. Invariantes de Moebius en función de los conformes.

Supógase $A = (X(\vartheta), 1)$ PPAC. Usando (104) se ve que satisface una EDT de la forma

$$\frac{d^2X}{d\vartheta} + (-\varrho - i)\frac{dX}{d\vartheta} = 0$$

calculando el invariante H de (79) en este caso particular ($p = \varrho + i$, $q = 0$) queda $H = (-\varrho - i)^2 - 2\varrho'$, es decir:

$$H_0 = \varrho^2 - 2\varrho' - 1,\ H_1 = 2\varrho$$

de donde por (74) se concluye

$$d\zeta = \sqrt{2\,|\varrho|}d\vartheta$$

además de (78) se obtiene

$$\nu = \frac{1}{4}\left(\frac{\varrho^2 - 2\varrho' - 1}{2\,|\varrho|} - \frac{5}{8}\frac{\varrho'^2}{|\varrho|^3} - \frac{1}{2}\frac{\varrho''}{\varrho^2}\right)$$

7.5. invariantes afines en función de los conformes

Debemos cambiar ahora la notación, para adaptarnos a la de las curvas afines. El significado de p y q es el que aparece en el epígrafe 51, y nuestra curva $A(\vartheta) = (X(\vartheta), 1)$ PPAM, se identifica ahora con $A(\vartheta) = (X_0(\vartheta), X_1(\vartheta))$, de forma que el diedro de Frenet asociado es

$$A_{(1)}(\vartheta) = A'(\vartheta) = (X_0'(\vartheta), X_1'(\vartheta)), A_2(\vartheta) = (-X_1'(\vartheta), X_0'(\vartheta))$$

Derivando la primera ecuación (104) y usando la segunda se obtiene:

$$\frac{d^3A}{d\vartheta^3} - 2\varrho\frac{d^2A}{d\vartheta^2} + \left(\varrho^2 - \varrho' + 1\right)\frac{dA}{d\vartheta} = 0 \tag{105}$$

Sustituyendo en (46) para $p = -2\varrho$, $q = \left(\varrho^2 - \varrho' + 1\right)$ queda:

$$K = \frac{1}{9}\left(\varrho^2 - 3\varrho' + 9\right)$$

y con este valor de K se obtiene por sustitución en (53) y en (47) supuesto $K > 0$:

$$d\xi = \frac{1}{3}\sqrt{\varrho^2 - 3\varrho' + 9}d\vartheta$$

$$\varkappa = \frac{3}{\sqrt{\varrho^2 - 3\varrho' + 9}}\left(\frac{2\varrho}{3} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\vartheta}\ln\left(\left(\varrho^2 - 3\varrho' + 9\right)\right)\right)$$

7.6. Geodésicas conformes

Son las curvas $A = X(\vartheta)$ PPAC, que tienen curvatura conforme $\varrho = 0$. Usando (105) se concluye que satisface

$$\frac{d^3A}{d\vartheta^3} + \frac{dA}{d\vartheta} = 0$$

que es la ecuación diferencial de las geodésicas afines con $\varepsilon = 1$ (ver epígrafe 4.6 en pág 28), es decir, elipses. Pero no todas las elipses son geodésicas conformes:

Usando las ecuaciones de conformes de Frenet (104) junto con (100) se concluye que

$$\frac{d^2X}{d\vartheta^2} - i\frac{dX}{d\vartheta} = 0$$

y por (89) se concluye que en este caso el arco conforme ϑ también es parámetro conforme, y como por (101) es

$$\varrho = \frac{d}{d\vartheta}\ln\frac{1}{\kappa} = 0$$

se concluye que las geodésicas conformes, son exactamente las curvas de curvatura métrica κ constante, parametrizadas por el arco conforme. Usando la expresión explícita (96) reparametrizada por el arco conforme ($s = r\vartheta$) queda:

$$\begin{aligned} X(\vartheta) &= C_0 + \int_0^{r\vartheta}\cos(\vartheta + \theta_0)\,ds + i\int_0^{r\vartheta}\sin(\vartheta + \theta_0)\,ds \\ &= C_0 + \sin(r\vartheta + \theta_0) - \sin\theta_0 + i\left(\cos\theta_0 - \cos(r\vartheta + \theta_0)\right) \end{aligned}$$

que es la única geodésica con condiciones iniciales

$$X(0) = C_0 \text{ ,y } X'(0) = r\left(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0\right)$$

De todo esto se deduce que por cada vector tangente ω en el plano proyectivo, hay una única geodésica (circunferencia) que define a ω en $\vartheta = 0$.

8. Clasificación de las curvas en el Plano Hiperbólico

8.1. Transformaciones hiperbólicas

Llamamos transformación (lineal) hiperbólica a una aplicación $\mathbb{C}^2 \ni (X,Y) \to (\tilde{X},\tilde{Y}) \in \mathbb{C}^2$ de la forma :

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0 \tag{106}$$

La transformacion de Moebius inducida $\mathbb{P} \ni (X:Y) \to (\tilde{X}:\tilde{Y}) \in \mathbb{P}$ se denomina tranformación (proyectiva) hiperbólica.

En el plano ampliado $\widetilde{\mathbb{C}}$ las transformaciones hiperbólicas se describen por:

$$(X:Y) = Z \to \frac{aZ+b}{cZ+d}, \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R} \ ad-bc = 1 \tag{107}$$

y están caracterizadas por la propiedad de dejar invariante el semiplano de los números complejos con parte real positiva:

$$\mathbb{H} = \{Z = Z_0 + iZ_1 : Z_0 > 0\} \tag{108}$$

este semiplano dotado de la geometría de las transformaciones hiperbólicas (107) se denomina semi-plano Hiperbólico ó de Poincaré.

8.2. Referencias hiperbólicas

Es bien conocido que dar una base (A,B) de $\mathbb{C}^2$ equivale a dar a un Sistema de Referencia Proyectivo (SRP) $\mathcal{S} = ([A],[B],[C])$ (con $C = A+B$) en la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}$. Por otra parte, cualquier otra base de $\mathbb{C}^2$ que de lugar al SRP $\mathcal{S}$ es de la forma $(\lambda A, \lambda B)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Fijados dos (SRP) existe una única homografía (como (56)) que lleva una a otra. La homografía $\mathcal{S}$ que lleva el SRP $\mathcal{S}$ a la canónica $(\infty,0,1) = ((1:0),(0:1),(1:1))$ se denomina coordenadas respecto a $\mathcal{S}$, de forma que las coordenadas $\mathcal{S}([P])$ de un punto $[P] \in \mathbb{P}$ son $\mathcal{S}([P]) = (\lambda:\mu)$ equivale a decir que $\rho P = \lambda A + \mu B$ para ciero $\rho \in \mathbb{C}$. Recordemos también que $\mathcal{S}(P)$ representa la razón doble:

$$\frac{\lambda}{\mu} = [[A],[P];[B],[C]] \in \widetilde{\mathbb{C}}$$

y el conjunto de puntos con coordenada real, se representa en el plano $\mathbb{C}$ como el conjunto de puntos de la circunferencia determinada por A, B y C.

Si $A = (X,Y)$ con $(X:Y) \in \mathbb{H}$, denotando $\bar{A} = (\bar{X},\bar{Y})$ su vector conjugado, resulta ser $(A,\bar{A})$ una base[3] de $\mathbb{C}^2$ que denominamos *base hiperbólica* y el SRP a que da lugar $\mathcal{S}_A = ([A],[B],[C])$ (con $C = A + \bar{A}$) se denomina *Sistema de Referencia Hiperbólico* (SRH).

Observación

Como $\det(A,\bar{A}) = \det(\bar{A},A) = -\det(\bar{A},A)$ se concluye que $\det(A,\bar{A})$ es imaginario puro y se tiene la igualdad:

$$\mathbb{H} = \{[A] : \operatorname{Im}(\det(A,\bar{A})) > 0\}$$

[3] Nótese que $(A,\bar{A})$ deja de ser base, solo cuando $[A] = (X:Y) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Ya que la función: $\mathbb{C}^2 \ni A \to \operatorname{Im}\left(\det\left(A, \bar{A}\right)\right) \in \mathbb{R}$, toma valor cero, exactamente, cuando $[A] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Nótese que si $\left(A, \bar{A}\right)$ es base hiperbólica, también lo es $\left(\lambda A, \lambda \bar{A}\right)$ para $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{\lambda A}$

Observación

Obsérvese que los concepto SRH y SRP son preservados por las transformaciones hiperbólicas. En el plano complejo $\mathbb{C}$ una referencia hiperbólica se representa en la forma:

Geométricamente $\mathcal{S}_A$ viene determinada por un punto $[A] \in \mathbb{H}$, y una circunferencia centrada en el eje real que contiene al punto $[A]$ y representa el conjunto de puntos con coordenada homogénea real respecto a $\mathcal{S}_A$.

Es muy fácil comprobar que el grupo de transformaciones hiperbólicas, actúa transitivamente sobre el conjunto de las referencias hiperbólicas. Es decir:

Proposición

La transformaciones hiperbólicas transforman un SRH en un SRH. Además fijados $\mathcal{S}_A$, y $\mathcal{S}_B$ dos SRH, existe una única transformación hiperbólica que lleva uno al otro.

En efecto si $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es real $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, $\det \mathcal{M} > 0$, $A = A_0 + iA_1$, con $A_j = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathcal{M}\bar{A} = \mathcal{M}\left(A_0 - iA_1\right) = \mathcal{M}\left(A_0\right) - i\mathcal{M}\left(A_1\right) = \overline{\mathcal{M}\left(A\right)}$$

así la BaseH $\left(A, \bar{A}\right)$ se transforma en la base hiperbólica $\left(\mathcal{M}\left(A\right), \overline{\mathcal{M}\left(A\right)}\right)$. Recíprocamente pongamos $\left(A, \bar{A}\right)$ y $\left(B, \bar{B}\right)$ dos bases. Entonces (A_0, A_1) determina una base de $\mathbb{R}^2$ ya que en otro caso sería $A = (1 + \lambda i) A_0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ y $[A] \notin \mathbb{H}$ (pues $[A] = X_0/Y_0 \in \mathbb{R}$). Hay por tanto una única transformación lineal $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^2$tal que $\mathcal{M}A_0 = B_0$, $\mathcal{M}A_1 = B_1$. Por tanto $\mathcal{M}\left(A, \bar{A}\right) = \left(B, \bar{B}\right)$. Además por la observación 8.2

$$0 > \operatorname{Im}\left(\det\left(B, \bar{B}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\det\left(A, \bar{A}\right)\right)\det \mathcal{M} \Longrightarrow \det \mathcal{M} > 0$$

y $\mathcal{M}$ induce la única transformación (hiperbólica que lleva $\mathcal{S}_A$ a $\mathcal{S}_B$ ■

8.3. Invariantes de las curvas hiperbólicas

Una curva $\mathbb{C}^2$-hiperbólica, es una curva

$\mathbb{C}^2$-plana $A = A(t)$ que define una curva $[A]$ en el plano hiperbólico $\mathbb{H}$, es decir

$$\operatorname{Im}\left(\det\left(A(t), \overline{A(t)}\right)\right) > 0 \ \forall t$$

Dos curvas $\mathbb{C}^2$-hiperbólicas $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ se dicen $\mathbb{R}-$*linealmente equivalentes*, si sus componentes están relacionadas por automorfismos lineales hiperbólicos en $\mathbb{C}^2$ del tipo (106). Los invariantes (de las curvas $\mathbb{C}^2$-planas) frente a estas equivalencias, se llaman *invariantes* $\mathbb{R}-$*lineales.* En particular, los invariantes $\mathbb{C}-$*lineales* (ver epígrafe 5.5 en pág 32) son $\mathbb{R}-$*lineales.*

Las curvas $\mathbb{C}^2$-hiperbólicas $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ son *hiperbólicamente equivalentes* .si existe una función de valores complejos, $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable $(\lambda(t) \neq 0 \ \forall t)$ tal que $B(t) = \lambda(t)\tilde{A}$ es $\mathbb{R}$-linealmente equivalente a A.

Un *invariante* se llama *hiperbólico* si toma el mismo valor sobre curvas hiperbólicamente equivalentes.

8.4. Invariantes lineales m y n

Como para cada t , $\left(A(t), \overline{A(t)}\right)$ es una base de $\mathbb{C}^2$ se concluye que existen funciones $m = m(t)$, $n = n(t)$ con valores en $\mathbb{C}$ de manera que

$$A' = mA + n\bar{A}$$

Es fácil ver que las funciones m, y n son invariantes $\mathbb{R}$-lineales.

Observación

Los puntos $A(t)$ en los que $n(t) = 0$, se dicen puntos singulares. Observese que una curva con todos los puntos singulares verifica $A' = mA$, y así $X = X(t) = \alpha e^{mt}$, $Y(t) = \beta e^{mt}$, y $(X : Y) = \alpha/\beta = cte.$
Trataremos solo con curvas regulares (es decir, con curvas sin puntos singulares).

8.5. Arco hiperbólico

Los invariantes $\mathbb{R}$-lineales m y n, varían frente a cambios de parámetro, y transformaciones $B = \lambda(t)A$. De hecho se obtiene inmediatamente:

$$B' = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} + m\right) B + \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} n\bar{B} = m_B B + n_B \bar{B} \tag{109}$$

y se ve que así que $|n| = |n_B|$ es invariante con carácter proyectivo, y la $1-$forma

$$dl = |n|\, dt \tag{110}$$

es elemento de arco hiperbólico. Si $A = A(t)$, está definida para $a \leq t \leq b$ el arco hiperbólico de A es

$$\mathcal{L}_H(A) = \int_a^b d\sigma = \int_a^b |n|\, dt \tag{111}$$

y define un invariante geométrico hiperbólico (escalar) (véase (1.8)), es decir $\mathcal{L}_H(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}_H(A) = \mathcal{L}_H(\tilde{A})$ si A y $\tilde{A}$ son hiperbólicamente equivalentes.

Haciendo un cambio de parámetro $l = f(t)$, con $f'(t) = |n(t)| > 0$ se tiene $B = B(l)$ con $A(t) = B(l(t))$ y

$$B' = \frac{dB}{dl} = \frac{dA}{dt}\frac{dt}{dl} = \frac{1}{f'}\frac{dA}{dt} = \frac{m}{f'}B + \frac{n}{f'}\bar{B} = m_B B + n_B \bar{B}$$

y ahora se tiene $|n_B| = 1$.

8.6. Curvatura hiperbólica

Pongamos $A = A(l)$ parametrizada por el arco hiperbólico, es decir

$$A' = mA + n\bar{A} \text{ con } |n| = 1$$

Supuesto $n = e^{2i\theta}$, podemos tomar en (109) la función $\lambda = \lambda(l)$ de la forma $\lambda = e^{-i\theta}$ y *girar* n para conseguir

$$n_B(l) \equiv 1,\ m_B = m - i\frac{d\theta}{dl} = m - \frac{1}{2}\frac{dn/dl}{n}$$

. Este *valor* de $n_B(l) \equiv 1$, no queda alterado si *multiplicamos ahora* B por una función $\rho = \rho(l)$ con valores reales, $C = \rho(l)B$ y se tiene:

$$C' = \left(\frac{\rho'}{\rho} + m_B\right) C + \bar{C} = m_C C + \bar{C}$$

y podemos elegir $\rho = \rho(l)$ de forma que m_C sea imaginario puro, y podemos escribir $m_C = -hi = \mathrm{Im}(m_B)i$ .Se denomina a h *curvatura hiperbólica.* Tenemos así la expresión reducida:

$$C' = -hiC + \bar{C} \tag{112}$$

Por su propia construcción la curvatura hiperbólica h, es invariante hiperbólico que se escribe:.

$$h = -\,\mathrm{Im}\left(m - \frac{dn/dl}{2n}\right) \tag{113}$$

Cálculo con parámetro arbitrario. Partiendo de $A = A(t)$, con $A' = mA + n\bar{A}$, cambiando al arco hiperbólico $l = f(t)$, con $f' = |n|$ se tiene $B = B(l)$ con $A(t) = B(l(t))$ y

$$m_B = \frac{m}{|n|},\ n_B = \frac{n}{|n|}$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{dn_B}{dl} = \frac{dn_B}{dt}\frac{1}{|n|} = \frac{n'\,|n| - n\,|n|'}{|n|^3}$$

por (113) se tiene

$$h = -\frac{1}{|n|}\,\mathrm{Im}\left(m - \frac{n'}{2n}\right) \tag{114}$$

8.7. Invariantes de Moebius e hiperbólicos.

Si $A = A(t)$ es una curva hiperbólica con $A' = mA + n\bar{A}$, es facil probar que

$$A'' = \left(m^2 + m' + n\bar{n}\right) A + (mn + n\bar{m} + n')\,\bar{A}$$

por otra parte, si A verifica la EDT $A'' + pA' + qA = 0$, queda

$$A'' = (-pm - q)\,A + (-pn)\,\bar{A}$$

de ambas ecuaciones se concluye:

$$\begin{aligned} p &= -m - \bar{m} - \frac{n'}{n} \\ q &= m\bar{m} + \frac{n'm}{n} - m' - nn \end{aligned}$$

en particular si $m = -hi$, $n = 1$ queda $p = 0$, $q = h^2 + h'i$ y usando (79)

$$H = p^2 + 2p' - 4q = -4h^2 - 4h'i = H_0 + iH_1$$

Naturalmente para que A sea curva regular de Moebius necesitamos que $H_1 = -4h'$ no se anule nunca. pongamos $\varepsilon = sign(-h')$. Se concluye por (78) que la curvatura ν de Moebius, se escribe en función de la curvatura hiperbólica h :

$$\nu = \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{h^2}{h'} - \frac{5}{16}\frac{h''^2}{h'^3} - \frac{1}{4}\frac{h'''}{h'}\right) \tag{115}$$

por otra parte, teniendo en cuenta (74) la relación entre el arco de Moebius ζ, y el arco hiperbólico l es

$$\frac{d\zeta}{dl} = 2\sqrt{-\varepsilon h'} \tag{116}$$

8.8. Clasificación de Hiperbólica de las curvas.

Si $A = A(t)$, es una curva $\mathbb{C}^2$-plana, la función $h_A = h_A(t)$ denota su curvatura hiperbólica. Esta función h_A solo depende de la curva proyectiva $[A]$, y más exactamente, de la clase hiperbólica de la curva. Es decir, si $A = A(t)$, y $B = B(t)$ son hiperbólicamente equivalentes, entonces $h_A(t) = h_B(t)$ $\forall t$. Así la función curvatura hiperbólica, es un invariante geométrico hiperbólico. Se trata de ver que este es un invariante completo, es decir:

Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $h = h(l)$, una base hiperbólica $(C, \bar{C})$, y un valor concreto del parámetro $l = a$, existe una curva hiperbólica (determinada salvo constante multiplicativa) $A = A(l)$ P.P.A.H con curvatura $h_A = h$, que verifica: $A(a) = C$.

En particular (usando la proposición 8.2), si $A = A(l)$, $B = B(l)$ son curvas hiperbólicas parametrizadas PPAH que tienen la misma función de curvatura proyectiva $h(l) = h_A(l) = h_B(l)$ entonces definen curvas hiperbólicamente equivalentes

Corolario

Dos curvas hiperbólicas $A = A(t)$, $B = B(t)$ que tienen la misma curvatura hiperbólica $h = h(t)$, (ver fórmula (114)), entonces son hiperbólicamente equivalentes, si y solo si se verifica:

$$\frac{dl_A}{dt} = \frac{dl_B}{dt}$$

donde l_A, y l_B son los parametros arco hiperbólico correspondientes. Esta igualdad, equivale (ver (110)) a

$$|n_A| = |n_B|$$

8.9. Geodésicas.

Las curvas hiperbólicas de curvatura hiperbólica cero, se llaman geodésicas. Así si $[A] = [A(l)]$ es una curva en $\mathbb{H}$, parametrizada por el arco hiperbólico, podemos elegir el representante $A = A(l)$ verificando la ecuación reducida (ver (112)) $A' = -hiA + \bar{A}$, de forma que es geodésica si y solo si $A' = \bar{A}$. Esto significa que:

$$\left(A + \bar{A}\right)' = A + \bar{A}$$
$$\left(A - \bar{A}\right)' = A - \bar{A}$$

pero una curva $C = C(l)$, con $C' = C$ es necesariamente de la forma $C(l) = (\alpha e^l, \beta e^l)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y $[C]$ es constante. Por tanto, $\left[A(l) + \bar{A}(l)\right] = \alpha$, $\left[A(l) - \bar{A}(l)\right] = \beta \in \mathbb{R}$, son puntos fijos (reales) del plano complejo. Por la observación 8.2 se concluye que los puntos $\left([A(l)], \left[\bar{A}(l)\right], \alpha, \beta\right)$ están todos situados en una circunferencia centrada en el eje real con diámetro $|\beta - \alpha|$. Naturalmente, $[A(l)]$ recorre la zona de la circunferencia que está en el plano hiperbólico $\mathbb{H}$.

Esto es así, siempre que no sea $\alpha = \beta$, pues en este caso, $[A(l)]$ recorre la semirrecta ortogonal al eje real,que parte de α.

9. Apéndice

9.1. Ordenación de las geometrías del plano.

Las distintas geometrías, están ordenadas por el siguiente grafo, donde la flecha $\rightarrow$ indica *contenido.*

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Moebius} & \leftarrow & \text{Hiperbólico} & & \\
\uparrow & & & & \\
\text{Conforme} & \rightarrow & \text{Afín} & & \\
\uparrow & & \uparrow & \searrow & \\
\text{Métrico} & \rightarrow & \text{Equiafín} & \rightarrow & \text{Proyectivo}
\end{array}
$$

9.2. Tabla esquemática

La siguiente tabla recuerda los símbolos que representan los arcos y las curvaturas en las distintas geometrías, y contiene otros datos de interés. Por ejemplo, $\iota\,[j^r]\;(n)$ indica que el invariante ι, es de órden r (ver epígrafe 1.1). Además, su fórmula explícita respecto a un parámetro arbitrario viene referenciada en el texto por (n).

Las geodésicas de una geometría plana son las curvas de curvatura geométrica nula, parametrizadas por el arco geométrico. En todos los casos, el arco geométrico, resulta ser también parámetro geométrico. Para el caso equiafín y métrico, también se consideran geodésicas, las curvas de curvatura nula con *parámetro* geométrico. Esta definición se adapta a la exigencia de que en la geometría haya un entero característico r con la siguiente propiedad:

fijado un r-vector ω en un punto C, existe una única geodésica (ó quizás dos) $A = A(t)$ tal que $A^{(r)}(0) = \omega$. En la fila *geodésicas* aparece indicado este entero para cada geometría.

	dim	**Arco**	**Curvatura**	**Geodésicas**	**T. Sing.**
Proyectivo	8	$\sigma\ \boxed{j^5}$ (19)	$k\ \boxed{j^7}$ (22)	$\boxed{j^2}$	Cónicas
Afín	6	$\xi\ \boxed{j^4}$ (47)	$\varkappa\ \boxed{j^5}$ (53)	Cónicas* $\boxed{j^2}$	Paráb.
Equiafín	5	$\tau\ \boxed{j^3}$ (37)	$\mu\ \boxed{j^4}$ (41)	Paráb. $\boxed{j^2}$	Rectas
Conforme	4	$\vartheta\ \boxed{j^2}$ (99)	$\varrho\ \boxed{j^3}$ (103)	Circunf. $\boxed{j^1}$	Rectas
Métrico	3	$s\ \boxed{j^1}$ (88)	$\kappa\ \boxed{j^2}$ (91)	Rectas (j^1)	Puntos
Moebius	6	$\zeta\ \boxed{j^3}$ (74)	$\nu\ \boxed{j^5}$ (78)	$\boxed{j^1}$	Circ/Rect
Hiperbólico	3	$l\ \boxed{j^1}$ (110)	$h\ \boxed{j^2}$ (114)	Circ/Rect $\boxed{j^1}$	Puntos

Obsérvese que el orden del invariante curvatura es en todos los casos una unidad inferior a la dimensión del grupo, y el órden del elemento de arco dos unidades menos.