

SOBRE EL TRATAMIENTO GEOMETRICO
DE LOS SISTEMAS MECANICOS
Javier Lafuente

INDICE

§1 FORMULACION LAGRANGIANA.

1.0 SISTEMAS MECANICOS DE PARTICULAS.	Pág 1
1.1 ESPACIO DE POSICIONES: SISTEMAS HOLONOMOS.	Pág 1
1.2 ESPACIO DE ESTADOS.	Pág 1
1.3 ENERGIA CINETICA.	Pág 2
1.4 FUERZAS APLICADAS AL SISTEMA.	Pág 3
1.4.1 Fuerza sobre un sistema de partículas:	
1.4.2 Fuerza de tipo ligadura:	
1.4.3 Las fuerzas como formas.	
1.4.4 Pull-back de una fuerza: Fuerza generalizada.	
1.4.5 Expresiones analíticas.	
1.5 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.	Pág 6
1.5.1 Curvas de evolución del sistema.	
1.5.2 Las ecuaciones locales implícitas.	
1.5.3 Ecuaciones explícitas del movimiento.	
1.5.4 Los símbolos de Christoffel.	
1.5.4 Ecuaciones de Lagrange. Sistemas Conservativos	
1.5.5 Principio de Conservación de la Energía.	

§2 FORMULACION HAMILTONIANA.

2.1 ESPACIO DE FASES: HAMILTONIANO.	Pág 13
2.2 ECUACIONES (LOCALES) DE HAMILTON.	Pág 14
2.3 FORMAS CANÓNICAS (DE LIOUVILLE Y SIMPLECTICA) EN $M=T^*(Q)$.	Pág 15
2.4 VARIETADES SIMPLECTICAS: SUBIDA Y BAJADA DE INDICES.	Pág 15
2.5 FORMULACION HAMILTONIANA GLOBAL.	Pág 16

§3 GEOMETRIA SIMPLECTICA.

3.1 ALGEBRA LINEAL SIMPLECTICA.	Pág 16
3.1.1 Estructura simpléctica.	
3.1.2 Forma de volumen canónica.	
3.1.3 Aplicaciones lineales simplécticas. Grupo simpléctico.	
3.2 GEOMETRIA SIMPLECTICA: CORCHETES DE POISSON.	Pág 18
3.2.1 Transformaciones simplécticas.	

- 3.2.3 Corchete de Poisson de dos 1-formas
- 3.2.4 Corchete de Poisson de dos funciones.
- 3.2.5 De nuevo en el espacio de fases.

3.3 TEOREMA DE DARBOUX. COORDENADAS SIMPLECTICAS. Pág 21

- 3.3.1 Cartas simplécticas
- 3.3.2 Atlas Simpléctico
- 3.3.3 Teorema de Darboux

3.4 INVARIANTES INTEGRALES Y VARIEDADES INVARIANTES Pág 23

- 3.4.1 Invariantes integrales de un campo.
- 3.4.2 Invariantes integrales de un campo Hamiltoniano
- 3.4.3 Variedades invariantes.
- 3.4.4 Hipersuperficies invariantes de energía constante.

§4 SISTEMAS HAMILTONIANOS CON SIMETRIAS

- 4.1 NOTACIONES Y CONCEPTOS BASICOS
- 4.2 ACCION SIMPLECTICA.
- 4.3 SISTEMAS HAMILTONIANOS CON SIMETRIA.

§5 DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

- 5.1 Descripción geométrica del espacio de posiciones de un sólido.
- 5.2 Descripción geométrica del espacio de estados de un sólido rígido.
- 5.3 Significado geométrico de la energía cinética.
- 5.4 Cálculo de la energía cinética: Elementos dinámicos de un sólido.
- 5.5 Análisis geométrico del Tensor de Inercia.
- 5.6 Teoremas de conservación.
- 5.7 Ecuaciones de Euler.
- 5.8 Soluciones estacionarias. Descripción de Poisson.

APENDICE I

PRINCIPIO VARIACIONAL DE HAMILTON.

- 0. INTRODUCCIÓN. Pág 1
- 1.- VARIACIONES DE UNA CURVA: ESPACIO TANGENTE A Ω EN UN PUNTO. Pág 2
- 2.- VERSION LOCAL DEL PRINCIPIO DE HAMILTON. Pág 2
- 3.- VERSION GLOBAL DEL PRINCIPIO DE HAMILTON Pág 3
 - 3.1 Derivadas parciales covariantes a lo largo de una variación.
 - 3.2 Propiedades.
 - 3.3. Demostración.

APENDICE II
GEOMETRIA DE LOS MOVIMIENTOS AFINES EUCLIDEOS

Preliminar: Espacios Euclideos orientados.

1.1 Transformaciones ortogonales.

1.2 Isometrías y Movimientos euclideos directos. Clasificación.

1.3 Especialización en dimensión tres.

APENDICE III
TEORIA DE TORSORES

Torsores

Algebra de Lie de los torsores.

Vector \vec{w} asociado a un torsor.

Eje central Ω y módulo de deslizamiento λ .

Expresión matricial reducida.

APENDICE IV
EL GRUPO DE LIE DE LOS MOVIMIENTOS DIRECTOS

Parametrización exponencial:

Una nota sobre el espacio tangente.

Algebra de Lie del grupo de movimientos directos.

TRATAMIENTO GEOMETRICO DE LOS SISTEMAS MECANICOS HOLONOMOS

§1 FORMULACION LAGRANGIANA.

1.0 SISTEMAS MECANICOS DE PARTICULAS.

Llamaremos sistema mecánico a una colección de n partículas con masas m_1, \dots, m_n que pueden desplazarse por el espacio afín euclídeo. Supuesto que se ha fijado un sistema "inercial" cartesiano euclídeo de referencia, conoceremos la posición del sistema, cuando conozcamos el sistema ordenado de $N=3n$ números $x=(x^1, \dots, x^N)$ donde $(x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i})$ denotan las coordenadas, del punto de masa m_i . Denotamos por $x^i: \mathbb{R}^N \ni x \rightarrow x^i(x) = x^i \in \mathbb{R}$

1.1 ESPACIO DE POSICIONES: SISTEMAS HOLONOMOS.

Diremos que el sistema es holónomo con d grados de libertad, si el conjunto de todas sus "posibles" posiciones describe el conjunto de puntos de una variedad diferenciable \mathbf{M} de \mathbb{R}^N , con dimensión igual a d .

Fijada la posición $m \in \mathbf{M}$, podemos tomar en torno a ella una carta de \mathbf{M} (U, q) , con $q=(q^1, \dots, q^d)$ A las coordenadas q^i se les denomina coordenadas locales generalizadas. A la aplicación $x=q^{-1}: \mathbb{R}^d \ni q(U) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^N$ la denominamos parametrización local de \mathbf{M} por m , y viene unívocamente determinada por las componentes $x^i. x=q^{-1}: q(U) \ni q=(q^1, \dots, q^d) \rightarrow x^i(q) \in \mathbb{R}$. Así, en las proximidades del punto m , la posición (x^i) del sistema queda unívocamente determinada por la serie ordenada de d números $q=(q^1, \dots, q^d)$, que pueden variar libremente dentro de una abierto $q(U)$ de \mathbb{R}^d .

Si $q^\alpha: q(U) \ni q \rightarrow q^\alpha \in \mathbb{R}$ es la proyección α -ésima, denotamos por $\frac{\partial x}{\partial q^\alpha}$ al vector tangente $\frac{\partial}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^j}$ que se identifica con $\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha}, \dots, \frac{\partial x^N}{\partial q^\alpha} \right)$.

Nótese que los índices latinos varían de 1 a N , y los griegos de 1 a d . Este criterio, así como el convenio de sumación de Einstein será mantenido a lo largo de estas notas.

1.2 ESPACIO DE ESTADOS.

Una curva de evolución del sistema es una curva diferenciable $c: I \rightarrow \mathbf{M}$ donde I es un intervalo de \mathbb{R} . Se entiende que $c(t)$ es la posición del sistema en el instante t . Si $0 \in I$, la posición $m=c(0)$ es la posición inicial, y se dice que la evolución del sistema se realiza por m . El vector $c'(0) = \frac{dc}{dt} \Big|_{t=0} \in T_m \mathbf{M}$, representa la velocidad instantánea inicial del sistema cuando evoluciona según la curva c . Así los vectores de $T_m \mathbf{M}$ representan el conjunto de velocidades instantaneas iniciales para todas las posibles evoluciones del sistema por m .

Un vector $v \in T_m M$, es por definición un estado del sistema para la posición $m \in M$, y el fibrado tangente TM representa entonces el espacio de estados.

Si $(U, q = (q^1, \dots, q^d))$ es un sistema de coordenadas generalizadas, entonces $Tq = (q^1, \dots, q^d, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^d) = (q, \dot{q}) : TU \rightarrow q(U) \times \mathbb{R}^d$ define una carta en TM , que queda caracterizada para $v \in T_m M$ por la identidad $v = \dot{q}^\alpha(v) \left(\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right)_m$ y $q^\alpha(v) = q^\alpha(m)$

Las funciones \dot{q}^α se denominan velocidades generalizadas.

El estado $(x, \dot{x}) = (x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N)$ del sistema queda localmente determinado por la serie ordenada de $2d$ números $(q, \dot{q}) = (q^1, \dots, q^d, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^d)$, que varían libremente en $q(U) \times \mathbb{R}^d$. En efecto:

Sea $x = q^{-1} : \mathbb{R}^d \ni q(U) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^N$ la parametrización local, $(q, \dot{q}) \in q(U) \times \mathbb{R}^d$ y $c : I \rightarrow U$ una curva de evolución del sistema por m con velocidad inicial $c'(0) = v$, siendo $q^\alpha = q^\alpha(v)$ y $\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(v)$. Aplicando a la los dos miembros de la identidad $x \cdot q \cdot c(t) = c(t)$, la proyección i -ésima en \mathbb{R}^N x^i , se obtiene:

$$(x^i \cdot c)(t) = x^i(q \cdot c(t)), \text{ y así: } \dot{x}^i = \left. \frac{d(x^i \cdot c)}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \right)_q \left. \frac{dq^\alpha \cdot c}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \right)_q \dot{q}^\alpha.$$

De hecho se verifica $T_x(q, \dot{q}) = (x, \dot{x})$, y por tanto T_x se expresa en la forma: $T_x : q(U) \times \mathbb{R}^d \ni (q, \dot{q}) \rightarrow (x^1(q), \dots, x^N(q), x^1(q, \dot{q}), \dots, x^N(q, \dot{q})) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

$$\text{donde } x^i(q, \dot{q}) = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha.$$

1.3 ENERGIA CINETICA.

La energía cinética de una partícula de masa m que evoluciona en el espacio \mathbb{R}^3 , según la curva $c : I \ni t \rightarrow c(t) \in \mathbb{R}^3$ es en el instante $t = t_0$:

$$\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \left(\left. \frac{d(x^i \cdot c)}{dt} \right|_{t=t_0} \right)^2$$

La energía cinética de un sistema de n partículas que evolucionan en el espacio \mathbb{R}^3 siguiendo la curva $c : I \ni t \rightarrow c(t) \in \mathbb{R}^N$ es en el instante $t = t_0$ igual a la suma de las energías cinéticas en dicho instante, de cada una de las energías cinéticas de las partículas que lo componen, es decir:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N M_i \left(\left. \frac{d(x^i \cdot c)}{dt} \right|_{t=t_0} \right)^2$$

siendo $M_{3i-2} = M_{3i-1} = M_{3i} = m_i$, la masa de la partícula i -ésima.

Esta energía solo depende del estado $(x, \dot{x}) = (x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N)$ definido por c en el instante $t = t_0$, y establece por tanto una aplicación:

$$K : T \mathbb{R}^N \ni (x, \dot{x}) \rightarrow \frac{1}{2} M_i (\dot{x}^i)^2$$

que induce sobre cada espacio tangente $T_x \mathbb{R}^N$ una métrica Riemanniana definida por la condición:

$$K(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

para cada $v = (x, \dot{x}) \in T_x \mathbb{R}^N$.

La matriz (M_{ij}) de esta métrica en las coordenadas canónicas (x^i) es:

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_N \end{pmatrix}$$

El espacio de posiciones \mathbf{M} del sistema es subvariedad de \mathbb{R}^N , y como tal hereda dicha estructura Riemanniana. Se denomina también a $K = K|_{\mathbf{TM}}: \mathbf{TM} \rightarrow \mathbb{R}$ energía cinética del sistema. La métrica Riemanniana g inducida en \mathbf{M} viene caracterizada por la condición: $g(v, v) = 2K(v) = \langle v, v \rangle$ para $v \in T_p \mathbf{M}$. El espacio (\mathbf{M}, g) se denomina variedad Riemanniana asociada al sistema.

Calculemos los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ de g respecto a una carta (U, q) :

$$g_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \frac{\partial}{\partial q^\beta} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial q^\beta} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = M_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^\beta} = \sum_{i=1}^N M_i \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}$$

y la expresión de la energía cinética es entonces:

$$K = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \frac{1}{2} M_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N M_i \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

1.4 FUERZAS APLICADAS AL SISTEMA.

Si $(F^{3i-2}, F^{3i-1}, F^{3i}) \in \mathbb{R}^3$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula P_i del sistema, en un instante $t=t_0$, su evolución: $I \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que cada P_i debe satisfacer la segunda ley de Newton. Es decir:

$$\left. \frac{d^2(x^i \cdot c)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = \frac{F^i}{M_i}$$

Cuando la fuerza total $F = (F^1, \dots, F^N)$ es una función del estado $(x, \dot{x}) = (x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N)$ y del tiempo t , la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2(x^i \cdot c)}{dt^2} = \frac{F^i}{M_i}$$

es la ecuación del movimiento del sistema.

Fijado un estado (x, \dot{x}) de la partícula, y un instante t_0 , existe una única curva (en el sentido de las ecuaciones diferenciales) c que verifica la ecuación anterior y define en $t=t_0$ el estado (x, \dot{x}) , es decir:

$$(x^i \cdot c)(t_0) = x^i, (x^i \cdot c)'(t_0) = \dot{x}^i, \frac{d^2(x^i \cdot c)}{dt^2} = \frac{F^i}{M_i}$$

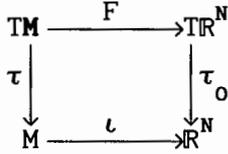
Parece pues natural establecer para un sistema holónomo de partículas con espacio \mathbf{M} de posiciones, la siguiente definición.

1.4.1 Fuerza sobre un sistema de partículas:

Una fuerza sobre el sistema es una aplicación diferenciable:

$$F: TM \rightarrow T\mathbb{R}^N$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama:



donde τ y τ_0 son las proyecciones canónicas y ι es la inclusión.

Es decir, F asigna a cada posición $p \in M$ un operador $F_p: T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^N$.

El conjunto $\mathfrak{F}(M)$ de fuerzas tiene estructura evidente de $\mathcal{F}(TM)$ -módulo.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica euclídea canónica de \mathbb{R}^N , para cada $p \in \mathbb{R}^N$ tenemos la descomposición:

$$T_p \mathbb{R}^N = T_p M \oplus \nu_p(M)$$

donde $\nu_p(M) = \{v \in T_p \mathbb{R}^N : v \cdot w = 0 \text{ para todo } w \in T_p M\}$.

Cada vector $v \in T_p M$ se descompone de forma única:

$$v = v^T + v^\perp \text{ con } v^T \in T_p M \text{ y } v^\perp \in \nu_p(M)$$

En particular la fuerza $F: TM \rightarrow T\mathbb{R}^N$ se descompone en la forma:

$$F = F^T + F^\perp, \text{ con } F^T(v) = F(v)^T, \text{ y } F^\perp(v) = F(v)^\perp \text{ para } v \in T_p M$$

1.4.2 Fuerza de tipo ligadura:

La fuerza $F: TM \rightarrow T\mathbb{R}^N$ se dice de tipo ligadura, si $F^T = 0$. Es decir, F es ortogonal a M en cada punto.

1.4.3 Las fuerzas como formas.

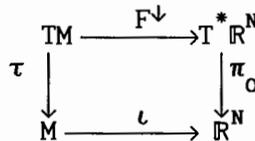
La operación \downarrow de bajada de índices en \mathbb{R}^N respecto al producto escalar canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ permite identificar $T_p \mathbb{R}^N$ con $T_p^* \mathbb{R}^N$ mediante la regla:

$$v^\downarrow: T_p \mathbb{R}^N \ni w \rightarrow v \cdot w \in \mathbb{R} \text{ para } v \in T_p \mathbb{R}^N$$

en particular, si $F: TM \rightarrow T_p \mathbb{R}^N$ es una fuerza se define F^\downarrow en la forma:

$$F^\downarrow: T_p M \ni v \rightarrow F(v)^\downarrow \in T_p^* \mathbb{R}^N$$

y F^\downarrow verifica la conmutatividad del siguiente diagrama:



Esta podría ser una definición equivalente de fuerza.

En adelante, identificaremos F con F^\downarrow , y las denotaremos a ambas por F . El carácter covariante o contravariante de F debe quedar claro según el contexto en donde se utilice.

Nótese que una forma $\alpha \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^N)$ puede identificarse con una fuerza $\alpha \in \mathfrak{F}(M)$, que denotamos por el mismo nombre:

$$\alpha(v) = \alpha(\tau(v)) \text{ para todo } v \in TM$$

1.4.4 Pull-back de una fuerza: Fuerza generalizada.

Sea $F: TM \rightarrow T^*R^N$ una fuerza. Para cada $v \in T_p M$ es $F(v) \in T_p^*R^N$ y $\iota^* F(v) \in T_p^*M$ se define entonces: $\iota^* F: TM \ni v \rightarrow (\iota^* F)(v) \in T_p^*M$. Es decir para cada $p \in M$:

$$\iota^* F: T_p M \ni v \rightarrow F(v) \circ d\iota(p) = F(v) \mid T_p M \in T_p^* M$$

y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_p R^N & \xrightarrow{F(v)} & R \\ \searrow d\iota_p & & \downarrow \iota_p^* F(v) \\ & & T_p M \end{array}$$

Una aplicación $Q: TM \rightarrow T^*M$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Q} & T^*M \\ \searrow \tau & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

se denomina fuerza generalizada. A $Q = \iota^* F$, se le llama fuerza generalizada asociada a F .

El conjunto $\mathcal{Q}(M)$ de fuerzas generalizadas, tiene estructura evidente de $\mathcal{F}(TM)$ -módulo, y la aplicación pull-back:

$$\iota^*: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathcal{Q}(M)$$

es un homomorfismo de $\mathcal{F}(TM)$ -módulos.

Nótese que si $\alpha \in \mathfrak{X}^*(R^N)$, α puede interpretarse también como una fuerza, y no hay ambigüedad al escribir $\iota^* \alpha$. El resultado es una 1-forma en M , que a su vez puede interpretarse como una fuerza generalizada.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición:

Si F es una fuerza, entonces se tiene la equivalencia:

$$F \text{ es fuerza de ligadura} \Leftrightarrow \iota^* F = 0$$

Por otra parte, como $\iota^*(F+F') = \iota^*(F) + \iota^*(F')$ se concluye que:

$$\iota^*(F) = \iota^*(F^T)$$

Demostración: Fijado un $p \in M$, se tiene:

$$\iota^* F = 0 \Leftrightarrow (\iota^* F)(v)(w) = F(v)(w) = F(v) \cdot w = F^T(v) \cdot w = 0, \forall v, w \in T_p M \Leftrightarrow F^T(v) = 0 \quad \forall v \in T_p M$$

1.4.5 Expresiones analíticas.

Las formas dx^1, \dots, dx^N

determinan una base en el $\mathcal{F}(TM)$ -módulo $\mathfrak{F}(M)$. De echo, una fuerza F de M , puede escribirse en la forma:

$$F = F_i dx^i \quad \text{con } F_i: TM \ni v \rightarrow F(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \in R$$

y su restricción al dominio U de las coordenadas locales q :

$$F(v) = F_i(q(v), \dot{q}(v)) dx^i$$

en donde como es habitual se identifica $F_1: T(U) \rightarrow \mathbb{R}$ con $F_1 \circ T_x: T(q(U)) \rightarrow \mathbb{R}$.

así: $\iota^* F = \iota^* (F_1 dx^1) = F_1 (\iota^* dx^1) = F_1 d(\iota^* x^1) = F_1 dx^1 = F_1 \frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = Q_\alpha dq^\alpha$, siendo:

$$Q_\alpha = F_1 \frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha}$$

y $Q = Q_\alpha dq^\alpha$ es la fuerza generalizada asociada a F .

1.5 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.

Supongamos que sobre nuestro sistema de partículas se aplica una fuerza $F^A: TM \rightarrow TR^N$. La fuerza total real $F: TM \rightarrow TR^N$ que actúa sobre el sistema, debe ser el resultado de la suma de la fuerza aplicada F^A , y de cierta fuerza F^L -que denominamos de ligadura- que obliga a que la posición del sistema permanezca en cada instante dentro del espacio de posiciones M , es decir:

$$F = F^A + F^L$$

El principio de D'Alambert-Lagrange establece que la fuerza de ligadura F^L es una fuerza de tipo ligadura, es decir:

$$\iota^* F^L = 0$$

De esta forma, por la proposición de 1.4.4 se concluye que la fuerza generalizada Q asociada a F coincide con la asociada a F^A :

$$\iota^* F = \iota^* F^A = Q: TM \rightarrow T^*M$$

1.5.1 Curvas de movimiento del sistema.

Un movimiento del sistema, es una curva $c: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

1.5.1 (1) $c(t) \in M$ para todo $t \in I$.

$$1.5.1 (2) \frac{d^2(x^1 \cdot c)}{dt^2} = \frac{F^1}{M_1}$$

siendo $F = (F^1, \dots, F^N)$ la fuerza total que actúa sobre el sistema.

Sean (U, q) coordenadas generalizadas, y $x: q(U) \rightarrow U \subset M \subset \mathbb{R}^N$ la correspondiente parametrización local. Supongamos $c: I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^N$ una curva de evolución del sistema, y denotemos por $x^i(t) = x^i(c(t))$ y $q^\alpha(t) = q^\alpha(\iota \cdot c(t))$. Se tiene:

$$x^i(t) = x^i(q^1(t), \dots, q^d(t))$$

y aplicando la regla de la cadena, se verifica:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{dq^\alpha}{dt}; \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2}$$

Las ecuaciones 1.5.1 (2) pueden escribirse ahora:

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} = \frac{F^i}{M_1} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt}$$

como el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \partial x^i \\ \partial q^\alpha \end{pmatrix}$ es igual a d , las ecuaciones anteriores

permiten despejar $\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2}$ quedando en la forma:

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} = \Phi^\alpha(q^1(t), \dots, q^d(t), \frac{dq^1}{dt}, \dots, \frac{dq^d}{dt})$$

Sin embargo no podemos asegurar "a priori" que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha} \xi^\alpha = \frac{F^1}{M_1} - \frac{\partial^2 x^1}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

en las variables ξ^α sea compatible cada vez que fijemos los parámetros $(q, \dot{q}) = (q^1, \dots, q^d, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^d)$, a no ser que exista una solución movimiento del sistema con condiciones iniciales $T_x(q, \dot{q})$.

El **principio** que asegura la existencia de tal solución para valores arbitrarios de (q, \dot{q}) , raramente es enunciado explícitamente en los libros de mecánica, y lo denominamos **principio de existencia**.

Trataremos de establecer en este epígrafe 1.5, para un sistema holónomo de partículas con una fuerza aplicada F^A , la siguiente conclusión:

Existe un único campo de vectores \mathcal{E} en TM , que es ecuación diferencial de segundo orden en M , de manera que se verifica la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

- 1) $c: I \rightarrow M$ es curva integral de \mathcal{E}
- 2) $\iota c: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un movimiento del sistema.
- 3) $\nabla \frac{dc}{dt} = (Q^\uparrow) \left(\frac{dc}{dt} \right)$

siendo:

- a) $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ la inclusión canónica.
- b) ∇ es la conexión de Levi-Civita de métrica g inducida por la energía cinética $K: TM \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la relación $2K(v) = g(v, v)$.
- c) $Q = \iota^* F^A: TM \rightarrow T^*M$ es la fuerza generalizada, y $Q^\uparrow: TM \rightarrow TM$, donde \uparrow operador subida de índices $\uparrow T^*M \rightarrow TM$ respecto a la métrica g .

En consecuencia la terna (M, K, Q) constituye un modelo geométrico que permite analizar en su totalidad el comportamiento dinámico del sistema.

Llegaremos a esta conclusión en varias etapas:

1.5.2 Las ecuaciones locales implícitas: $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial K}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha$.

Sean (U, q) coordenadas generalizadas, y $x: q(U) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^N$ la correspondiente parametrización local. Supongamos $c: I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^N$ un movimiento del sistema, y como antes denotemos por $x^i(t) = x^i(c(t))$ y $q^\alpha(t) = q^\alpha(c(t))$. Se tiene:

$$x^i(t) = x^i(q^1(t), \dots, q^d(t))$$

Probaremos que para todo $t \in I$ se verifica:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha}((\iota.c)'(t)) \right) - \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}((\iota.c)'(t)) = Q_\alpha((\iota.c)'(t))$$

Escribiendo $q(t) = (q^1(t), \dots, q^d(t))$, $\dot{q}(t) = (\frac{dq^1}{dt}, \dots, \frac{dq^d}{dt})$ queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha}(q(t), \dot{q}(t)) \right) - \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}(q(t), \dot{q}(t)) = Q_\alpha(q(t), \dot{q}(t))$$

Para probar esta última igualdad, reescribamos la codición 1.5.1 (2) en la forma:

$$M_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} dx^i = F_i dx^i$$

y apliquemos a ambos miembros el operador ι^* . Para $Q = \iota^* F = \iota^{*A} F^A$ queda:

$$M_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = Q_\alpha dq^\alpha$$

Por tanto:

$$M_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{d^2 x^j}{dt^2} = Q_\alpha$$

$$\text{Como } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{dx^j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \right) \frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{d^2 x^j}{dt^2}$$

se tiene: $Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} - Q_\alpha^{(2)}$ con:

$$Q_\alpha^{(1)} = M_{ij} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{dx^j}{dt} \right), \quad Q_\alpha^{(2)} = M_{ij} \frac{dx^j}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \right)$$

Probaremos entonces que:

$$Q_\alpha^{(1)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha}(q(t), \dot{q}(t)) \right) \text{ y } Q_\alpha^{(2)} = \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}(q(t), \dot{q}(t))$$

En efecto, nótese que $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right) = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta$, y por tanto:

$$Q_\alpha^{(1)} = \frac{d}{dt} \left(M_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{dx^j}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Por otra parte: } \frac{\partial K}{\partial q^\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(M_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \frac{\partial x^j}{\partial q^\gamma} \right) \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \\ &= \frac{1}{2} \left(M_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{\partial x^j}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\beta + \frac{1}{2} \left(M_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \right) \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left(M_{1j} \frac{\partial^2 x^1}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{dx^j}{dt} \dot{q}^\beta \right) + \frac{1}{2} \left(M_{1j} \frac{dx^1}{dt} \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma \right)$$

como ambos sumandos son iguales queda finalmente:

$$\frac{\partial K}{\partial q^\alpha} = M_{1j} \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial^2 x^1}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \dot{q}^\beta = M_{1j} \frac{dx^j}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha} \right) = Q_\alpha^{(2)}$$

1.5.3 Ecuaciones explícitas del movimiento.

A partir de las ecuaciones $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial K}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha$, y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\gamma} \frac{dq^\gamma}{dt} + \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \frac{d\dot{q}^\beta}{dt} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2}$$

se obtiene:

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2} = Q_\alpha + \frac{\partial K}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\gamma} \frac{dq^\gamma}{dt}$$

y si $(g^{\alpha\beta})$ denota la matriz inversa de $(g_{\alpha\beta})$ se tiene finalmente:

$$\frac{d^2 q^\beta}{dt^2} = g^{\alpha\beta} \left(Q_\alpha + \frac{\partial K}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma \right) \quad \text{con} \quad \dot{q}^\gamma = \frac{dq^\gamma}{dt} \quad [1]$$

Todo movimiento del sistema (en U) debe satisfacer las ecuaciones anteriores.

Recíprocamente, imaginemos que $\sigma(t)$ para $|t| < \varepsilon$ verifica las ecuaciones anteriores. Sea $q^\alpha = q^\alpha \cdot \sigma(0)$, $\dot{q}^\alpha = \frac{d(q^\alpha \cdot \sigma)}{dt} \Big|_{t=0}$, y sea $(x, \dot{x}) = Tx(q, \dot{q})$.

Por el principio de existencia, hay una solución $c(t)$ con $c'(0) = (x, \dot{x})$ verificando las condiciones 1 y 2 de 1.5.1, y por 1.5.2 se concluye que c verifica también las ecuaciones [1] con los mismos valores iniciales que σ .

Usando ahora la existencia y unicidad de soluciones para [1], se concluye que $c = \sigma$, que es lo que queríamos probar.

1.5.4 Los símbolos de Christoffel.

La ecuación diferencial [1] anterior depende solo de la fuerza generalizada Q y la energía cinética K , y puede escribirse en función de los coeficientes de la métrica $g_{\alpha\beta}$. En efecto, teniendo en cuenta que:

$$K = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu$$

se tiene:

$$\frac{\partial K}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} = g_{\alpha\nu} \dot{q}^\nu, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q^\gamma \partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\nu$$

con lo que de la ecuación [1] se obtiene

$$\frac{d^2 q^\beta}{dt^2} = g^{\alpha\beta} Q_\alpha + g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\gamma} \right) \dot{q}^\mu \dot{q}^\gamma$$

Llamando $Q^\beta = g^{\alpha\beta} Q_\alpha$, e intercambiando los índices μ y γ en el último sumando:

$$\frac{d^2 q^\beta}{dt^2} = Q^\beta + g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\mu} \right) \dot{q}^\mu \dot{q}^\gamma$$

sumando miembro a miembro estas dos últimas igualdades, y dividiendo por dos:

$$\frac{d^2 q^\beta}{dt^2} = Q^\beta + g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\mu} \right) \right) \dot{q}^\mu \dot{q}^\gamma$$

Se denominan a:

$$\Gamma_{\mu\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\mu} \right)$$

símbolos de Christoffel de primera especie, y a $\Gamma_{\mu\gamma}^\beta = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\gamma\alpha}$ de segunda. Se tiene finalmente la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \frac{dq^\mu}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = Q^\beta$$

En particular, si no hay fuerzas exteriores aplicadas, entonces $Q=0$, y las ecuaciones del movimiento quedan:

$$\frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \frac{dq^\mu}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = 0$$

1.5.5 Ecuación intrínseca del movimiento.

Esto prueba que los movimientos de un sistema sin fuerzas exteriores, son exactamente las geodésicas de la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g definida sobre el espacio de posiciones M , por la energía cinética K .

La fuerza generalizada Q , mediante el operador subida de índices respecto a la métrica g , se puede interpretar como aplicación $Q: TM \rightarrow TM$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Q} & TM \\ & \searrow \tau & \downarrow \tau \\ & & M \end{array}$$

Si ∇ es derivada covariante de la conexión de Levi-Civita, las ecuaciones del movimiento se pueden escribir globalmente en la forma:

$$\frac{\nabla^2 c}{dt^2} = Q$$

Para $c: I \rightarrow M$ curva de M , c' representa la velocidad, $c'' = \frac{\nabla c'}{dt} = \frac{\nabla^2 c}{dt^2}$ es la "aceleración" Riemanniana de la curva c , y Q es la "fuerza". Así la ecuación diferencial anterior "recupera" el aspecto formal de la Segunda Ley de la Dinámica de Newton

1.5.6 Ecuaciones de Lagrange. Sistemas Conservativos

Un caso particular interesante, es cuando la fuerza aplicada F^A sobre el sistema solo depende de la posición, y no del estado. Es decir, existe una función diferenciable, que denotamos también por F^A , que hace conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T M & \xrightarrow{F^A} & T \mathbb{R}^N \\ & \searrow \tau & \uparrow F^A \\ & & M \end{array}$$

Usualmente esta fuerza aplicada F^A se obtiene como restricción de una "campo de fuerzas" $\bar{F}^A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ de forma que $\bar{F}^A \cdot \iota = F^A$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \xleftarrow{\bar{F}^A} & \mathbb{R}^N \\ & \swarrow F^A & \uparrow \iota \\ & & M \end{array}$$

Si interpretamos \bar{F}^A como un campo de 1-formas de \mathbb{R}^N , entonces:

$$\iota^* \bar{F}^A = \iota^* F^A = Q: M \rightarrow T^* M \text{ es ahora una 1-forma en } M$$

En estas condiciones, se dice que \bar{F}^A (o F^A) es conservativa, si existe una función diferenciable $\bar{V}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que

$$\bar{F}^A = -d\bar{V} \text{ o equivalentemente } \bar{F}^A = -\text{grad}(\bar{V})$$

en donde el gradiente se ha tomado respecto a la estructura euclídea canónica de \mathbb{R}^N . Se denomina a $V = \iota^* \bar{V} = \bar{V}|_M$ función potencial del sistema. Tenemos:

$$Q = \iota^* F^A = \iota^* \bar{F}^A = -\iota^* (d\bar{V}) = -d(\iota^* \bar{V}) = -d(V)$$

y en coordenadas generalizadas podemos escribir:

$$Q = \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} dq^\alpha, \text{ y } Q_\alpha = \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}$$

Así llamando $L = K - V: TM \rightarrow \mathbb{R}$, donde ahora V se identifica con $V \cdot \tau_M$, y teniendo en cuenta que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$, de las ecuaciones $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha$ se deduce:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

que se denominan ecuaciones de Lagrange. La función L se la denomina función de Lagrange, y el sistema (M, K, V) se dice conservativo.

Por otra parte, la ecuación intrínseca del movimiento queda:

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = -\text{grad } V$$

Véase ahora el APENDICE I en donde se expone una formulación "variacional" intrínseca del movimiento del sistema.

1.5.5 Principio de Conservación de la Energía.

Sea (M, K, V) un sistema holónomo conservativo. Se denomina a K energía cinética, a V energía potencial, y la energía total es:

$$E=K+V$$

Demostraremos que la energía total es una magnitud conservativa, es decir: si $c: I \ni t \rightarrow c(t) \in M$ es un movimiento del sistema entonces:

$$\frac{d}{dt} E(c'(t)) = 0 \text{ o equivalentemente } E(c'(t)) = \text{cte para todo } t \in I$$

En efecto, se tiene:

$$E=K+V=2K-(K-V)=2K-L$$

En coordenadas locales, es $2K=(g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta) \dot{q}^\alpha = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha$, así:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha - L$$

Supuesto que c está metida en la carta (U, q) sea:

$$q^\alpha = q^\alpha(t) = q^\alpha \cdot c(t), \quad \dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(t) = \frac{dq^\alpha}{dt}(t)$$

se tiene: $\frac{d}{dt} E(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha \right) - \frac{d}{dt} L$, así:

$$\frac{d}{dt} E(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right) \dot{q}^\alpha = 0$$

ya que por ser $q^\alpha(t)$ movimiento del sistema, se supone que verifica las ecuaciones de Lagrange.

§2 FORMULACION HAMILTONIANA.

2.1 ESPACIO DE FASES: HAMILTONIANO.

Sea (Q, K, V) un sistema mecánico holónomo conservativo. Recuerdese que:

El *espacio de posiciones* Q es una variedad diferenciable de dimensión d . A las coordenadas de una carta de Q , $(q^1, \dots, q^d) = (q^i)$ se le denominan coordenadas generalizadas.

El fibrado tangente a Q , TQ se denomina *espacio de estados* del sistema. Una carta (q^i, \dot{q}^i) de TQ , se obtiene a partir de las coordenadas generalizadas (q^i) por el criterio: $v = \dot{q}^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_{\tau(v)}$, siendo $\tau: TQ \rightarrow Q$ la proyección canónica.

$K: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es la *energía cinética* del sistema, que en coordenadas locales (q^i, \dot{q}^i) se escribe: $K = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$

La función diferenciable $V: Q \rightarrow \mathbb{R}$ representa la *energía potencial* del sistema, y se identifica con una función $V: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ por la identidad $V = V \circ \tau$. La forma $F = -dV: TQ \rightarrow T^*Q$ denota la fuerza exterior del sistema.

A la aplicación $L = K - V: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ se le denomina *Lagrangiana*. Las ecuaciones (locales) de Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$, pueden globalizarse en una ecuación diferencial de segundo orden en Q , $\mathcal{E}: TQ \rightarrow T^2Q$ que describe la evolución del sistema a partir de cada estado inicial, y se denominan *ecuaciones del movimiento*. Localmente se expresa:

$$\mathcal{E} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(g^{kh} \frac{\partial V}{\partial q^h} - \Gamma^k_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

siendo Γ la conexión de Levi-Civita inducida por la métrica g_{ij} .

La función $E = K + V$ se denomina *energía total* del sistema, y constituye una integral primera de \mathcal{E} , es decir, permanece constante para cada curva de evolución.

El fibrado cotangente a Q , $M = T^*Q$ se denomina *espacio de fases*. Localmente respecto a coordenadas generalizadas (q^i) viene descrito por las coordenadas (p_i, q^i) por la condición $\alpha = p_i(\alpha) (dq^i)_{\pi(\alpha)}$, donde $\pi: T^*Q \rightarrow Q$ representa la proyección canónica. Las coordenadas p_i se denominan momentos generalizados.

La aplicación $\mathcal{L} = \downarrow: TQ \rightarrow T^*Q$ de bajada de índices se denomina *operador de Lagrange* y localmente viene representado por las ecuaciones:

$$p_i \cdot \mathcal{L}(q, \dot{q}) = p_i(q, \dot{q}) = g_{ij}(q) \dot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

El operador de Lagrange induce un difeomorfismo cuya aplicación inversa $\mathcal{L}^{-1} = \uparrow: T^*Q \rightarrow TQ$ es el operador subida de índices, y tiene por ecuaciones:

$$\dot{q}^j \cdot \mathcal{L}(p, \dot{q}) = \dot{q}^j(p, q) = g^{ij} p_i$$

La aplicación $H = E \cdot \uparrow: M = T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *Hamiltoniano* del sistema.

Se tienen así los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{cccc}
 [1]: & \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow q^1 & \downarrow q^1 \\ & & \mathbb{R} \end{array} & [2]: & \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} & \downarrow p_1 \\ & & \mathbb{R} \end{array} & [3]: & \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow \dot{q}^1 & \downarrow \dot{q}^1 \\ & & \mathbb{R} \end{array} & [4]: & \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow E & \downarrow H \\ & & \mathbb{R} \end{array}
 \end{array}$$

2.2 ECUACIONES (LOCALES) DE HAMILTON.

El campo $\mathcal{L}_*(\mathcal{E})$ en $M=T^*Q$ se denomina ecuaciones del movimiento en el espacio de fases. Localmente, si $(p_1(t), q^1(t))$ es una curva integral de $\mathcal{L}_*(\mathcal{E})$ entonces $q^1(t)$ define una curva de evolución del sistema. Demostraremos que la expresión local del campo $\mathcal{L}_*(\mathcal{E})$ es de la forma:

$$\mathcal{L}_*(\mathcal{E}) = -\frac{\partial H}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q^1}$$

y por tanto las ecuaciones diferenciales del movimiento inducidas son las denominadas ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \quad \frac{dq^1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

En efecto, se tiene: $E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} \dot{q}^1 - L(q, \dot{q})$, así:

$$dE = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} d\dot{q}^1 + \dot{q}^1 d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\right) - \left[\frac{\partial L}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} d\dot{q}^1 \right]$$

como $H = (\mathcal{L}^{-1})^* E$ usando los diagramas [1], [2] y [3] queda

$$dH = d((\mathcal{L}^{-1})^* E) = (\mathcal{L}^{-1})^* (dE) = p_1 d\dot{q}^1 + \dot{q}^1 dp_1 - \left[(\mathcal{L}^{-1})^* \left(\frac{\partial L}{\partial q^1} \right) dq^1 + p_1 d\dot{q}^1 \right],$$

ya que $p_1 = (\mathcal{L}^{-1})^* \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}(q, \dot{q})$. Comparando con $dH = \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial H}{\partial q^1} dq^1$ se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}^1, \quad \frac{\partial H}{\partial q^1} = -\frac{\partial L}{\partial q^1}(q, \dot{q})$$

así los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{cc}
 [5]: & \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow \dot{q}^1 & \downarrow \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ & & \mathbb{R} \end{array} & [6]: & \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow -\frac{\partial L}{\partial q^1} & \downarrow \frac{\partial H}{\partial q^1} \\ & & \mathbb{R} \end{array}
 \end{array}$$

Si $c(t) = (q(t))$ es una curva de evolución del sistema, entonces es:

$$c'(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \text{ con } q^1(t) = q^1 \cdot c(t) = q^1 \cdot c'(t) \text{ y } \dot{q}^1(t) = \frac{dq^1}{dt} = \dot{q}^1 \cdot c'(t)$$

Por otra parte, podemos escribir $\mathcal{L}(c') = (p(t), q(t))$, siendo:

$$p_1(t) = p_1(\mathcal{L}(c')), \quad q^1(t) = q^1(\mathcal{L}(c'(t))) = q^1 \cdot c'(t)$$

$\mathcal{L}(c')$ es una curva en M que por definición es curva integral del campo $\mathcal{L}_*(\mathcal{E})$.

Se tiene así:

$$\frac{dq^1}{dt} = \dot{q}^1 \cdot c'(t) = \frac{\partial H}{\partial p_1}(\mathcal{L}(c'(t))) = \frac{\partial H}{\partial p_1}(p(t), q(t)).$$

además, como c verifica las ecuaciones de Lagrange, se tiene:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(p_i \cdot \xi(c'(t)) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(c'(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(c'(t)) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\xi \cdot c'(t)) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(p(t), q(t))$$

2.3 FORMAS CANÓNICAS (DE LIOUVILLE Y SIMPLECTICA) EN $M=T^*(Q)$.

Sea $\pi: M=T^*Q \rightarrow Q$ la proyección canónica. Aplicando el funtor tangente, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\pi} & TQ \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ M & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array} \quad \text{y en coordenadas locales} \quad \begin{array}{ccc} (p, q, \dot{p}, \dot{q}) & \xrightarrow{T\pi} & (q, \dot{q}) \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ (p, q) & \xrightarrow{\pi} & q \end{array}$$

Si $\alpha \in M$ con $\pi(\alpha) = q \in Q$, hay una forma lineal canónica $\vartheta(\alpha): T_\alpha M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T_\alpha M & \xrightarrow{T\pi} & T_q Q \\ \vartheta(\alpha) \searrow & & \downarrow \alpha \\ & & \mathbb{R} \end{array} \quad \vartheta(\alpha) = \alpha \cdot d\pi(\alpha) \quad (d\pi(\alpha) = T_\alpha \pi = T\pi|_{T_\alpha M})$$

La aplicación $\vartheta: M \ni \alpha \rightarrow \vartheta(\alpha) \in T^*M$ define un elemento canónico de $\mathcal{X}^*(M)$, denominada *forma de Liouville*. Estudiemos su expresión local respecto a una carta canónica (p, q) :

Si $u \in T_\alpha M$, entonces $u = \left[a^i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)_\alpha + b^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_\alpha \right]$ y $d\pi(\alpha)(u) = \sum b^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_\alpha$. Así:

$$\vartheta(\alpha)(u) = \alpha(d\pi(\alpha)(u)) = \left[\sum p_i(\alpha) dq^i \right] \left(\sum b^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_\alpha \right) = \sum p_i(\alpha) b^i = \left[\sum p_i(\alpha) dq^i(\alpha) \right](u)$$

Por tanto la expresión local de la forma de Liouville ϑ es:

$$\vartheta = \sum p_i dq^i$$

La forma simpléctica canónica de M es $\Omega = d\vartheta$, que tiene por expresión local:

$$\Omega = \sum dp_i \wedge dq^i$$

Claramente Ω es una 2-forma exacta y no degenerada.

Ejercicio:

Probar que la 1-forma de Liouville ϑ de M , es la única con la propiedad:

$$\alpha^* \vartheta = \alpha \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{X}^*(Q) \quad (\alpha: Q \rightarrow T^*Q)$$

En particular $\alpha^* \Omega = d\alpha$.

2.4 VARIETADES SIMPLECTICAS: SUBIDA Y BAJADA DE INDICES.

Una variedad M de dimensión $n=2d$ se dice que tiene una estructura simpléctica, (ó que M es espacio simpléctico), si se ha definido una 2-forma Ω cerrada de M que es no degenerada en todo punto.

La 2-forma Ω se dice entonces que es la forma fundamental del espacio simpléctico que se denota ahora por $M=(M, \Omega)$.

$\omega(u,v) \neq 0$; podemos suponer $\omega(u,v)=1$, y necesariamente u y v son linealmente independientes. Sea $P=\{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Respecto a la base $\{u,v\}$ la forma $\omega|_{P \times P}$ tiene por matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, y es por tanto no degenerada. En particular si denotamos por $V' = P^\perp = \{w \in V : \omega(w,p) = 0 \text{ para todo } p \in P\}$ se tiene $P \cap V' = \{0\}$.

Por otra parte, es $V = P + V'$ ya que para todo $z \in V$ construimos:

$p = \omega(z,v)u - \omega(z,u)v \in P$; $w = z - p$ pertenece a V' ya que:

$$\omega(u,p) = -\omega(z,u)\omega(u,v) = \omega(u,z), \text{ y } \omega(v,p) = \omega(z,v)\omega(v,u) = \omega(v,z)$$

Construyase ahora la base de V deseada intercalando adecuadamente los vectores u,v en la base obtenida aplicando la hipótesis de inducción a $\omega|_{V' \times V'}$. ■

Reorganizando adecuadamente los elementos de la base se obtiene:

COROLARIO

Si Ω es una 2-forma no degenerada en el espacio vectorial E , entonces necesariamente E tiene dimensión par $2d$, y existe una base

$$(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d)$$

de E respecto a la cual la matriz de Ω tiene la forma: $J_d = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ siendo I la matriz identidad de dimensión d .

Se denomina a $E=(E,\Omega)$ espacio vectorial simpléctico, y a la base $(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d)$ base simplectica de E .

3.1.2 Forma de volumen canónica.

Sea $E=(E,\Omega)$ un espacio vectorial simpléctico, y $(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d)$ una base simpléctica. Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d)$ es su base dual entonces: $\Omega = \sum \alpha_i \wedge \beta_i$, y se tiene el siguiente resultado:

LEMA:

En las condiciones anteriores, se tiene $\Omega^d = d! (\alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d \wedge \beta_d)$.

Demostración:

Por inducción sobre d . Para $d=1$ el resultado es evidente. Supuesto probado para d probémoslo para $d+1$:

Sea $\Omega = \alpha_1 \wedge \beta_1 + \dots + \alpha_d \wedge \beta_d$, $\omega = \alpha_{d+1} \wedge \beta_{d+1}$. Teniendo en cuenta que el producto (exterior) de formas de grado par es conmutativo, es válida la fórmula:

$$(\Omega + \omega)^{d+1} = \sum \binom{d+1}{k} \Omega^{d+1-k} \wedge \omega^k$$

Pero claramente $\omega^k = 0$ para $k > 1$, y $\Omega^{d+1} = 0$ por lo que la suma anterior queda usando la hipótesis de inducción:

$$(\Omega + \omega)^{d+1} = \binom{d+1}{1} \Omega^d \wedge \omega = (d+1)d! (\alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d \wedge \beta_d) \wedge \alpha_{d+1} \wedge \beta_{d+1} = (d+1)! (\alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d \wedge \beta_d \wedge \alpha_{d+1} \wedge \beta_{d+1})$$

■

COROLARIO

Si $E=(E,\Omega)$ es un espacio simpléctico y como antes $\Omega=\alpha_1\wedge\beta_1+\dots+\alpha_d\wedge\beta_d$, entonces es $\omega=\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_d\wedge\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_d=\frac{(-1)^{[d/2]}}{d!}\Omega^d$

Por otra parte ω es una forma de volumen y se denomina volumen canónico de (E,Ω) .

$[d/2]$ denota el mayor entero que es menor o igual que $d/2$.

Demostración:

Nótese que para "pasar" de $\alpha_1\wedge\beta_1\wedge\dots\wedge\alpha_d\wedge\beta_d$ a $\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_d\wedge\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_d$ es necesario hacer $1+2+\dots+(d-1)=\frac{(d-1)d}{2}$ "saltos" y $(-1)^{\frac{(d-1)d}{2}}=(-1)^{[d/2]}$

3.1.3 Aplicaciones lineales simplécticas. Grupo simpléctico.

Sean (E,Ω) y (E',Ω') dos espacios vectoriales simplécticos con la misma dimensión d . Una aplicación lineal $f:E\rightarrow E'$ se dice simpléctica si $f^*\Omega'=\Omega$.

La condición necesaria y suficiente para que la aplicación lineal f sea simpléctica es que lleve una (ó toda) base simpléctica a una base simpléctica.

La composición de aplicaciones lineales simplécticas es simpléctica, y en particular el conjunto $Sp(E,\Omega)$ de transformaciones lineales simplécticas de E en E tiene estructura de grupo.

3.2 GEOMETRIA SIMPLECTICA: CORCHETES DE POISSON Y SISTEMAS HAMILTONIANOS.

En lo que sigue (M,Ω) es una variedad simpléctica, y se denotará por

$$\Omega:\mathfrak{X}(M)\ni X\rightarrow i_X\Omega\in\mathfrak{X}^*(M), \quad \nu=\Omega^{-1}:\mathfrak{X}^*(M)\rightarrow\mathfrak{X}(M)$$

los operadores de bajada y subida de índices.

Para cada $m\in M$ ($T_mM, \Omega(m)$) es un espacio vectorial simpléctico, y la n -forma

$$\omega=\frac{(-1)^{[d/2]}}{d!}\Omega^d$$

define en M una forma de volumen que es la simpléctica canónica en cada espacio tangente. Por eso se llama a ω forma de volumen canónica en (M,Ω) .

3.2.1 Transformaciones simplécticas.

Sean $(M,\Omega), (M',\Omega')$ dos variedades simplécticas. Un difeomorfismo $f:M\rightarrow M'$ se dice simpléctico si f induce una aplicación lineal simplectica entre los espacios tangentes, es decir: $df(m):T_mM\rightarrow T_{f(m)}M'$ es simpléctica.

Nótese que esta condición equivale a $f^*\Omega'=\Omega$, y por tanto un difeomorfismo simpléctico preserva los volúmenes canónicos.

Obviamente la composición de difeomorfismos simplécticos es simpléctico, y en particular $Sp(M,\Omega)$ familia de endomorfismos simplécticos de M , es un grupo.

Denotando como es habitual por $\Omega:\mathfrak{X}(M)\rightarrow\mathfrak{X}^*(M)$ el operador bajada de índices, es fácil probar que una condición necesaria y suficiente para que el

difeomorfismo $g:M \rightarrow M$ sea simpléctico es que se verifique la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\Omega} & \mathfrak{X}^*(M) \\ g_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\Omega} & \mathfrak{X}^*(M) \end{array}$$

3.2.2 Campos hamiltonianos.

Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice hamiltoniano, si existe una función $H \in \mathcal{F}(M)$ tal que:

$$X = -V(dH) = -\text{grad}(H)$$

La función H se dice entonces que es el hamiltoniano de X y escribimos entonces $X = X_H$, es decir:

$$X = X_H \Leftrightarrow X = -V(dH) \Leftrightarrow i_X \Omega = -dH \Leftrightarrow \Omega(X) = -dH$$

El campo X se llama localmente hamiltoniano si $\Omega(X)$ es cerrada. Por el lema de Poincaré, se deduce que X es localmente Hamiltoniano si y solo si es hamiltoniano en un entorno de cada punto.

Otra caracterización de los campos localmente hamiltonianos es la siguiente:

TEOREMA

El campo X es localmente hamiltoniano si y solo si $L_X \Omega = 0$

Demostración:

$$L_X \Omega = d(\Omega(X)) + i_X(d\Omega) = 0 \text{ si y solo si } \Omega(X) \text{ es cerrada.}$$

COROLARIO

El conjunto $\mathfrak{X}_{\mathcal{LH}}$ de los campos localmente hamiltonianos constituye una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de los campos $\mathfrak{X}(M)$.

Demostración: Tengase en cuenta que $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$.

NOTA:

La condición $L_X \Omega = 0$ indica que si (F_t) es el flujo (local) de X , entonces:

$$F_t^* \Omega = \Omega$$

y por tanto las transformaciones F_t son simplécticas. En particular las F_t preservan el volumen canónico.

Por otra parte, teniendo se ve que los campos localmente hamiltonianos, constituyen una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

3.2.3 Corchete de Poisson de dos 1-formas

Los operadores V y Ω permiten "copiar" la estructura de álgebra de Lie de los campos $\mathfrak{X}(M)$ al espacio de 1-formas $\mathfrak{X}^*(M)$:

Se define el corchete de Poisson de dos 1-formas $\alpha, \beta \in \mathfrak{X}^*(M)$ como:

$$\{\alpha, \beta\} = \Omega[V(\alpha), V(\beta)]$$

y así $(\mathfrak{X}^*(M), \{, \})$ es un álgebra de Lie. El siguiente resultado es crucial:

Teorema:

El corchete de Poisson de dos 1-formas cerradas es una 1-forma exacta.

Demostración:

Sean α, β 1-formas. Denotando $A=V(\alpha)$, $B=V(\beta)$, y teniendo en cuenta que:

$$[L_A, i_B] = i_{[A,B]}, \quad L_X = d \cdot i_X + i_X \cdot d$$

$$\{\alpha, \beta\} = i_{[A,B]} \Omega = [L_A, i_B] \Omega = L_A(\beta) - i_B \cdot L_A \Omega = d(\beta(A)) + i_A(d\beta) - i_B(d(\alpha))$$

en particular si $d\alpha = d\beta = 0$, es $\{\alpha, \beta\} = d(\beta(A))$ que es exacta.

3.2.4 Corchete de Poisson de dos funciones.

Si f y g son funciones $M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, entonces df y dg son formas cerradas. La función primitiva particular encontrada para el corchete $\{df, dg\}$ en el teorema anterior se denota por $\{f, g\}$ y se denomina corchete de Poisson de ambas funciones:

$$\{f, g\} = dg(V(df)) = \Omega(V dg)(V df) = -\Omega(V df, V dg) = -\Omega(X_f, X_g) = i_{X_f} i_{X_g} \Omega$$

Nótese que en particular se tiene:

$$d\{f, g\} = \{df, dg\}$$

El resultado principal es el siguiente:

TEOREMA

$(\mathcal{F}(M), \{, \})$ es un álgebra de Lie, que verifica las identidades:

$$d\{f, g\} = \{df, dg\} \quad \{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}$$

Demostración:

Como $\{f, g\} = -\Omega(V(df), V(dg))$ se ve fácilmente que $\{, \}$ es \mathbb{R} -bilineal y verifica $\{f, g\} = -\{g, f\}$.

Para probar la identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

necesitamos algunos resultados técnicos preliminares que como veremos tienen interés por si mismos:

LEMA 1

Si $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $\{f, g\} = -L_{X_f} g$ y $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$. En Particular los campos Hamiltonianos $X_{\mathfrak{H}}$ constituyen una subálgebra de $\mathfrak{X}(M)$.

Demostración:

Por una parte: $L_{X_f} g = i_{X_f}(dg) + d(i_{X_f} g) = i_{X_f}(dg) = i_{X_f}(-i_{X_g} \Omega) = -\{f, g\}$.

Además: $d\{f, g\} = \{df, dg\} = \Omega([X_f, X_g])$ lo cual prueba la segunda afirmación.

En particular la igualdad $\{f, g\} = -L_{X_f} g$ permite probar:

$$\{f, gh\} = -L_{X_f}(gh) = -hL_{X_f}(g) - gL_{X_f}(h) = g\{f, h\} + h\{f, g\}$$

Probemos por último la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson en $\mathfrak{F}(M)$. Nótese que $\{f, \{g, h\}\} = -L_{X_f}(\{g, h\}) = L_{X_f} L_{X_g}(h)$, por tanto:

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= L_{X_f} L_{X_g} (h) - L_{X_g} L_{X_f} (h) + L_{X_h} (f, g) \\ &= \left(L_{[X_f, X_g]} + L_{-[X_f, X_g]} \right) (h) = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Se tiene finalmente:

COROLARIO:

Para $f, H \in \mathfrak{F}(M)$ la condición $\{f, H\} = 0$ equivale a decir que la función f se mantiene constante sobre las curvas integrales de X_H . Por otra parte, el conjunto $\mathfrak{F}_H = \{f \in \mathfrak{F}(M) : \{f, H\} = 0\}$ constituye una subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{F}(M)$.

Demostración:

La primera parte se sigue de $\{f, H\} = -df(V(dH)) = df(X_H) = X_H(f)$. Por otro lado:

si $f, g \in \mathfrak{F}_H$ por la identidad de Jacobi:

$$0 = \{H, \{f, g\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = \{H, \{f, g\}\} + \{f, 0\} + \{g, 0\} = \{H, \{f, g\}\}$$

3.2.5 De nuevo en el espacio de fases.

Si $H: M = T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ es el hamiltoniano de un sistema mecánico holónomo, entonces el sistema hamiltoniano $X = -\text{grad}(H)$ determina las ecuaciones de evolución. Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ la condición $\{f, H\} = 0$ significa exactamente que f se mantiene constante sobre las curvas integrales de X , es decir, f es una constante del movimiento.

En particular la propiedad $\{H, H\} = 0$ da lugar nuevamente al principio de conservación de la energía.

Si $q = (q^1, \dots, q^d)$ son coordenadas canónicas en Q y (p, q) son las coordenadas canónicas en M , para funciones f y g de M se pueden verificar las propiedades:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}, \text{ en particular } \{f, q^i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i} \text{ y } \{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}.$$

3.3 TEOREMA DE DARBOUX. COORDENADAS SIMPLECTICAS.

3.3.1 Cartas simplécticas

Sea (M, Ω) es una variedad simpléctica de dimensión $2d$. Una carta (U, φ) en M se dice simpléctica si siendo $\varphi = (p_1, \dots, p_d, q^1, \dots, q^d)$ es $\Omega = \sum dp_i \wedge dq^i$.

Se demuestra facilmente que la condición necesaria y suficiente para que φ sea simpléctica es que $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i = -\{p_j, q^i\}$, y "todos los demás" sean nulos.

3.3.2 Atlas Simpléctico

Sea Ω_d la forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2d} , es decir $\Omega_d = \sum dp_i \wedge dq^i$ siendo $(p_1, \dots, p_d, q^1, \dots, q^d)$ las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^{2d} .

Un atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de una variedad M de dimensión $2d$ se dice simpléctico si para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ es $\psi_{\alpha\beta}^*(\Omega_d) = \Omega_d$ con $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Teorema

Si una variedad M admite un atlas \mathcal{U} simpléctico, entonces M admite una única estructura simpléctica Ω de forma que todas las cartas de \mathcal{U} son simplécticas en (M, Ω) .

Demostración:

Basta tomar $\Omega = \varphi_\alpha^*(\Omega_d)$ en cada U_α , que define globalmente, sin ambigüedad una forma simpléctica Ω . ■

3.3.3 Teorema de Darboux

Se probará el recíproco del teorema anterior, es decir, toda variedad simpléctica admite un atlas simpléctico. Esto es consecuencia del siguiente:

Teorema (de Darboux).

Sea (M, Ω) una variedad simpléctica, y $m \in M$. Existe entonces una carta simpléctica por M .

La demostración se hará por inducción sobre d , siendo $2d = \dim M$. Para iniciar este proceso de inducción, se precisa del siguiente

PROPOSICION 1

Existen funciones diferenciables con valores reales, p_1, q^1 definidas en un entorno de m de forma que $\{q^1, p_1\} = 1$.

Demostración:

Elijamos $p_1: U \rightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable en un entorno de m con $p_1(m) = 0$, y $dp_1(m) \neq 0$. Sea $P_1 = -\text{grad}(p_1) = -\mathcal{V}(dp_1)$. Como $P_1(m) \neq 0$, podemos encontrar una carta $\varphi = (q^1, x^2, \dots, x^n)$ por m de forma que $P_1 = \frac{\partial}{\partial q^1}$, así:

$$1 = P_1(q^1) = L_{P_1}(q^1) = -\{p_1, q^1\} = \{q^1, p_1\}$$

■

Naturalmente las funciones p_1, q^1 construidas antes son linealmente independientes ya que $\{q^1, p_1\} = -\Omega(\mathcal{V}(dq^1), \mathcal{V}(dp_1)) = 1$ y necesariamente es: $(\mathcal{V}(dq^1), \mathcal{V}(dp_1))$ y por tanto (dq^1, dp_1) son l.i en cada punto.

Si $d=1$, (p_1, q^1) define una carta simpléctica en torno a m . Supóngase pues $d > 1$ y el teorema demostrado para variedades simplécticas de dimensión $< d$.

Sea pues (M, Ω) variedad simpléctica de dimensión $2d$. En torno a un punto $m \in M$ se construyen las funciones p_1, q^1 de la proposición anterior. Se tiene:

$$\{q^1, p_1\} = \Omega(P_1, Q^1) = 1$$

siendo P_1, Q^1 los campos con funciones de hamilton p_1, q^1 respectivamente.

Sea $\mathcal{M} = \{x \in U : p_1(x) = 0, q^1(x) = 0\}$. Como dp_1 y dq^1 son no nulos en U , se concluye que \mathcal{M} es una subvariedad de dimensión $2d-2$. Además en cada punto $x \in \mathcal{M}$, la

con

dición $\xi \in T_x \mathcal{M}$ equivale a $dp_1(\xi) = dq^1(\xi) = 0$ pero $dp_1(\xi) = -\Omega(P_1, \xi)$ y $dq^1(\xi) = -\Omega(Q^1, \xi)$ por lo que $T_x \mathcal{M}$ es el complemento ortogonal de $\{P_1(x), Q^1(x)\}$. Así la

restricción \mathcal{W} de Ω a \mathcal{M} define una forma simpléctica en \mathcal{M} , y por la hipótesis de inducción, existen $(p_2, \dots, p_d, q^2, \dots, q^d)$ coordenadas simplécticas de $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ en torno a $m \in \mathcal{M}$.

En primer lugar, es necesario extender p_i y q^i a funciones p_i, q^i definidas en un entorno de $m \in M$. Para ello nótese que en cada punto $x \in M$ los vectores $P_1(x)$ y $Q^1(x)$ son linealmente independientes y "transversales" a $T_x M$, y se tiene el siguiente:

LEMA 2

Para ε, δ positivos pequeños, llamando $[X]_t$ al flujo de un campo X se tiene que la aplicación:

$$M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \ni (x, s, t) \rightarrow [Q^1]_t \cdot [P_1]_s(x) \in U \subset M$$

define un difeomorfismo (cuya imagen hemos denominando U). ■

Denotando para cada $z \in U$ al único $x = \Phi(z) \in M$ tal que $z = [Q^1]_t \cdot [P_1]_s(\Phi(z))$ para ciertos valores de s y t , convenimos en definir:

$$p_i(z) = p_i(\Phi(z)), \quad q^i(z) = q^i(\Phi(z)) \quad \text{para } i \geq 2$$

por ser $\Phi: U \rightarrow M$ diferenciable, p_i y q^i lo también lo son, y se mantienen constantes a lo largo de cualquier curva integral de Q^1

Nótese por otra parte, que como $\{p_i, q^1\}$ es constante, $[P_1, Q^1] = 0$, y por tanto los flujos $[Q^1]_t, [P_1]_s$ conmutan y las funciones p_i y q^1 se mantienen constantes también a lo largo de cualquier curva integral de Q^1 . Esto demuestra que por ejemplo $P_1(q^2) = -\{p_1, q^2\} = 0$. Análogamente:

$$\{p_i, q^i\} = \{p_i, p_i\} = \{q^1, q^i\} = \{q^1, p_i\} = 0 \quad \text{si } i \geq 2.$$

En particular, si como es habitual P_i, Q^i denotan los campos hamiltonianos con función de Hamilton p_i, q^i respectivamente entonces:

$$[P_1, Q^i] = [P_1, P_i] = [Q^1, Q^i] = [Q^1, P_i] = 0,$$

y en consecuencia:

LEMA 3

los campos P_i, Q^i son invariantes por $[Q^1]_t, [P_1]_s$ y por su producto $\phi_{st} = [Q^1]_t \cdot [P_1]_s = \phi_{ts}$. Por otra parte, por ser P_i y Q^i hamiltonianos, ϕ_{st} es transformación simpléctica y preserva por tanto Ω . ■

Queda por último probar que para $i, j \geq 2$ es $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i = -\{p_j, q^i\}$ y nulo en los demás casos.

Denotando ahora por $\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}^i$ los campos hamiltonianos en M con funciones de hamilton p_i, q^i respectivamente, se tiene por hipótesis:

$$\{q^i, p_j\} = W(\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}^j) = \delta_j^i$$

Pero $P_i|_W = \mathcal{P}_i, Q^j|_W = \mathcal{Q}^j$, con lo que:

$$\Omega(P_i, Q^j) = \delta_j^i \quad \text{en } W$$

Por el lema 3, se concluye entonces que la igualdad anterior se "transmite" a través de ϕ_{st} a todo el entorno U de M . De idéntica forma se prueba:

$$\Omega(P_i, P_j) = \Omega(Q^i, Q^j) = 0$$

3.4 INVARIANTES INTEGRALES Y VARIETADES INVARIANTES

3.4.1 Invariantes integrales de un campo.

Sea M una variedad y X un campo de vectores en M . Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Se denomina a α k -forma invariante de X si y solo si $L_X \alpha = 0$.

Por la conexión entre flujos y derivada de Lie se obtiene que $\alpha \in \Omega^k(M)$ es k -forma invariante de X si y solo si $F_t^* \alpha$ es independiente de t , Si (F_t) es un flujo local de X .

OBSERVACIONES:

(1)

En particular, una función $f \in \mathcal{F}(M)$ es invariante de X , si y solo si $X(f) = 0$, si y solo si f es constante sobre las curvas integrales de X . Se denomina también a f **integral primera** de X .

Si pensamos en las curvas integrales de X como las de movimiento de un sistema, entonces f se interpreta como una constante del movimiento.

(2)

En un entorno de cada punto $m \in M$, en donde $X(m) \neq 0$, el campo X admite $n-1$ ($n = \dim M$) integrales primeras independientes. En efecto, puede tomarse una carta $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ en donde $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, y las funciones x^2, \dots, x^n son claramente integrales primeras.

(3)

Si ω es una forma de volumen en M invariante de X , entonces $\text{div } X = 0$ y por el teorema del cambio de variable se deduce que el volumen del recinto $F_t(U_0)$ es independiente de t siendo U_0 un abierto en el cual están definidas las F_t .

Para k -formas invariantes de X existen interpretaciones geométricas similares (véase Teorema de Poincaré-Cartan [Abraham pag 202]).

Se tiene el siguiente resultado de demostración inmediata:

Proposición

Sea X un campo de vectores en M y α, β formas invariantes de X . Entonces: $i_X \alpha$, $d\alpha$ y $\alpha \wedge \beta$ son formas invariantes de X . Además el conjunto de formas k -invariantes constituye un \mathbb{R} -espacio vectorial.

3.4.2 Invariantes integrales de un campo Hamiltoniano

Si (M, Ω) es variedad simpléctica y X es un campo localmente Hamiltoniano, entonces por 3.2.2 se concluye que Ω es una 2-forma invariante, y (usando la proposición anterior) también lo son $\Omega^2, \dots, \Omega^d$, y en particular la forma

canónica de volumen ω de M .

Por otra parte si $X=X_H$ es un campo hamiltoniano, la condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathfrak{F}(M)$ sea invariante de X es que $\{f, H\} = 0$ (ver 3.2.4).

3.4.3 Variedades invariantes.

Sea M una variedad y X un campo de vectores en M . Sea V una subvariedad de M de dimensión k . Se denomina a V **k -variedad invariante de X** si $X(v) \in T_v V \subset T_v M$ para todo $v \in V$.

Si V es variedad invariante de X , denotamos por $X|_V$ al campo $i_V^* X$ restricción de X a V . ($i_V: V \rightarrow M$ es la inclusión canónica).

OBSERVACIONES:

(1)

La condición necesaria y suficiente para que V sea variedad invariante de X es que cualquier curva integral de X que pase por un punto de V , esté contenida en V .

(2)

Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ es una integral primera de X , y $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f , (es decir $df(x) \neq 0$ si $f(x) = c$) entonces $\Sigma_\lambda = f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie invariante de X .

(3)

Más general: sea $F = (f_1, \dots, f_k): M \rightarrow \mathbb{R}^k$ de forma que cada f_i es una integral primera de X , y sea $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ un valor regular de F (es decir se tiene $df_1(x) \wedge \dots \wedge df_k(x) \neq 0$ si $F(x) = c$). Entonces $\Sigma_c = F^{-1}(c)$ es una variedad invariante de X .

(4)

Se deduce entonces que en un entorno de un punto $m \in M$ con $X(m) \neq 0$, el campo X admite a lo más $n-1$ ($n = \dim M$) integrales primeras independientes. Por la observación 3.4.1 (2) de hecho admite tal sistema (local) $F = (f_1, \dots, f_{n-1})$ de integrales primeras, y para cada valor regular $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Sigma_c = F^{-1}(c)$ es la imagen de una curva integral de X .

3.4.4 Hipersuperficies invariantes de energía constante.

Sea $X=X_H$ un campo hamiltoniano en la variedad simpléctica (M, Ω) , y sea $e \in \mathbb{R}$ un valor regular de H . Como $\{H, H\} = 0$, H es integral primera, y $\Sigma_e = H^{-1}(e)$ es una hipersuperficie invariante de X . Probaremos el siguiente:

Teorema

Existe un forma de volumen μ_e en Σ_e que es invariante por $S = X|_{\Sigma_e}$.

Demostración:

La forma de volumen canónica ω de (M, Ω) es una forma invariante por X . Trabajaremos primero localmente, en un entorno de cada punto de Σ_e :

Fijado $m \in \Sigma_e$ como $dH(m) \neq 0$, es posible encontrar una carta (U, φ) centrada en m con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, ($n=2d=\dim M$) y $H=x^1$. Así en esta carta podemos escribir:

$$\omega = dH \wedge \sigma$$

como $L_X(dH) = d(L_X H) = 0$, es $dH \wedge L_X \sigma = L_X(dH \wedge \sigma) = L_X \omega = 0$, y esto significa que en la expresión de $L_X \sigma = \sum s_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$, necesariamente es s_1 idénticamente nulo ($dx^1 = dH$!) y por tanto:

$$L_X \sigma = dH \wedge \tau$$

Si $i: \Sigma_e \rightarrow M$ denota la inclusión canónica y $S = X|_{\Sigma_e}$ definimos $\mu_e = i^* \sigma$, y se tiene:

$$L_S \mu_e = i^*(L_X \sigma) = i^*(dH \wedge \tau) = i^*(dH) \wedge i^* \tau = 0 \wedge \tau = 0$$

Por otra parte, μ_e es una forma de volumen en Σ_e , ya que en la carta (adaptada) $\varphi = (x^1 = H, x^2, \dots, x^n)$ se tiene:

$$0 \neq \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = dH \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

que coincide con $\mu_e \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$ en cada punto $x \in \Sigma_e$.

La construcción efectuada ha sido local, pero puede globalizarse usando particiones diferenciables de la unidad, de la siguiente forma:

Como $dH \neq 0$ en Σ_e , podemos tomar un entorno de Σ_e en donde $dH \neq 0$, y suponer sin pérdida de generalidad que dicho entorno es todo M . Así podemos encontrar una familia $\{(U_\alpha, \mu_\alpha, \sigma_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de forma que $\{(U_\alpha, \mu_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ sea una partición diferenciable de la unidad y $\omega = dH \wedge \sigma_\alpha$. De esta forma, tomando $\sigma = \sum \mu_\alpha \sigma_\alpha$, se concluye: $dH \wedge \sigma = dH \wedge \sum \mu_\alpha \sigma_\alpha = \sum \mu_\alpha (dH \wedge \sigma_\alpha) = (\sum \mu_\alpha) \omega = \omega$.

El resto del argumento admite el planteamiento local ya expuesto. ■

Usando una técnica parecida, puede probarse la siguiente generalización:

Teorema

Sea $X = X_H$ un campo hamiltoniano en la variedad simpléctica (M, Ω) , y sean $f_1, \dots, f_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ constantes del movimiento, es decir $\{f_i, H\} = 0$. Sea

$$F = (f_1, \dots, f_k): M \rightarrow \mathbb{R}^k$$

y sea $c \in \mathbb{R}^k$ un valor regular de f . Sea $\Sigma_c = F^{-1}(c)$ la variedad de nivel invariante de X . Existe entonces un volumen μ_c invariante por $X|_{\Sigma_c}$. ■

§4 SISTEMAS HAMILTONIANOS CON SIMETRÍAS

4.1 NOTACIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

1) si A, B, C son conjuntos y $F: A \times B \rightarrow C$, denotamos para $a \in A, b \in B$:

$$F(a) = F_a: B \ni y \rightarrow F(a, y) \in C, \quad F(b) = \hat{F}_b: A \ni x \rightarrow F(x, b) \in C$$

así podemos pensar en F como $F: A \rightarrow \text{Apl}(B, C)$ y $F: B \rightarrow \text{Apl}(A, C)$.

2) Se supone conocida la definición de actuación de un grupo sobre un conjunto, y la terminología usual de las actuaciones

$$\Phi: G \times M \ni (g, x) \rightarrow \Phi_g(x) = g \cdot x \in M$$

en adelante solo interesan las actuaciones diferenciables (G es grupo de lie y M es variedad diferenciable). Una tal actuación induce de forma natural dos actuaciones:

$$\Phi_{T*}: G \times TM \ni (g, v) \rightarrow (\Phi_g)_*(v) \in TM \quad \text{y} \quad \Phi_T^*: G \times T^*M \ni (g, \alpha) \rightarrow (\Phi_{g^{-1}})^*(\alpha) \in T^*M$$

Nótese que las actuaciones también pueden ser por "el otro lado" y toda la teoría es repetible.

3) Si G es un grupo de Lie se denota por $L: G \times G \ni (g, h) \rightarrow gh \in G$ la actuación natural por la izquierda de G en sí mismo. Así L_T actúa sobre TG por la izquierda y denotamos:

$$L_T: G \times TG \ni (g, \xi) \rightarrow dL_g(\xi) = g\xi \in TG$$

Análogamente el grupo actúa sobre sí mismo por la derecha:

$$\hat{L}: G \times G \ni (h, g) \rightarrow \hat{L}_g(h) = hg \in G$$

Suele llamarse $R = \hat{L}$ y en este caso es $R: G \times G \ni (g, h) \rightarrow hg \in G$ de acuerdo con las notaciones 1). R_T actúa entonces por la derecha sobre TG y denotamos:

$$R_T: TG \times G \ni (\xi, g) \rightarrow dR_g(\xi) = \xi g \in TG$$

4) El álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G se identifica de forma natural con $T_e G$. De hecho si $\xi \in T_e G$, se interpreta que $\xi \in \mathfrak{g}$ a través de la fórmula:

$$\xi(g) = g\xi$$

entendiendo que la ξ y $\xi(e)$ se han identificado y $g\xi = (L_g)_*(\xi(e))$.

La aplicación $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es la aplicación exponencial. viene definida por la condición de que $F(t, g) = g \exp(t\xi)$ es el flujo (global) de $\xi \in \mathfrak{g}$.

5) El grupo de Lie G actúa sobre sí mismo por conjugación:

$$C: G \times G \ni (g, h) \rightarrow ghg^{-1}$$

Para cada $g \in G$ $G_g: G \rightarrow G$ es un homomorfismo y $dC_g(e) = \text{Ad}_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un automorfismo del espacio vectorial \mathfrak{g} que viene definida por:

$$\text{Ad}_g: \mathfrak{g} \ni \xi \rightarrow g\xi g^{-1} \in \mathfrak{g}$$

y se denomina aplicación adjunta. Esta aplicación que permite definir una actuación $\text{Ad}: G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que se interpreta como una

aplicación: $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g})$

que es homomorfismo de grupos. la diferencial $d\text{Ad}(e)$ coincide con ad :

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \ni \xi \rightarrow \text{ad}_\xi \in \text{End}(\mathfrak{g}) \quad \text{siendo} \quad \text{ad}_\xi: \mathfrak{g} \ni \eta \rightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{g}$$

6) Si como es habitual denotamos $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \ni \varphi \rightarrow \varphi^* \in \mathfrak{g}$ la aplicación que hace $\varphi^*(\alpha) = \alpha \cdot \varphi$ para todo $\alpha \in \mathfrak{g}$

La acción coadjunta de G viene definida por:

$$\Phi: G \times \mathfrak{g}^* \ni (g, \alpha) \rightarrow \text{Ad}_g^* \alpha \in \mathfrak{g}^*$$

7) Si $\Phi: G \times M \ni (g, x) \rightarrow \Phi_g(x) = g \cdot x \in M$ es una actuación diferenciable de G en M , a cada campo $\xi \in \mathfrak{g}$ se le puede hacer corresponder un campo $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ definido por:

$$\xi_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x$$

y se verifican las propiedades:

$$(i) \Phi_g^*(\xi_M) = \text{Ad}_g^{-1}(\xi) \quad (ii) (\text{Ad}_g \xi)_M = \Phi_g^* \xi_M \quad (iii) [\xi, \eta]_M = -[\xi_M, \eta_M]$$

por otra parte, si Φ denota la acción coadjunta de G en $M = \mathfrak{g}^*$ entonces:

$$\xi_M = -\text{ad}_\xi \text{ para todo } \xi \in \mathfrak{g}$$

4.2 ACCION SIMPLECTICA.

Una acción diferenciable $\Phi: G \times M \rightarrow M$ del grupo de Lie G sobre la variedad simpléctica $M = (M, \Omega)$ se dice simpléctica, si $\Phi_g: M \rightarrow M$ es aplicación simpléctica para todo $g \in G$, (es decir: $\Phi_g^* \Omega = \Omega$).

Si Φ es una acción simpléctica, entonces para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ el flujo $F_t = \Phi_{\exp(t\xi)}$ de ξ_M es simpléctico y por tanto se verifica que $L_{\xi_M} \Omega = 0$, es decir ξ_M es localmente hamiltoniano.

Supóngase ahora que $M = (M, \Omega)$ es f -simpléctica (fuertemente simpléctica) en el sentido de que $\Omega = d\theta$ para cierta 1-forma θ de M , y que la acción es f -simpléctica en el sentido de que $\Phi_g^* \theta = \theta$ para todo $g \in G$. Entonces para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se tiene como antes que $L_{\xi_M} \theta = 0$, es decir $d(i_{\xi_M} \theta) = -i_{\xi_M} \Omega$, y así ξ_M es globalmente hamiltoniano para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Si definimos:

$$J: M \times \mathfrak{g} \ni (x, \xi) \rightarrow (i_{\xi_M} \theta)(x) \in \mathbb{R}$$

J verifica las condiciones de una aplicación momento dada por la siguiente

4.2.1 DEFINICION

Sea Φ una acción simpléctica del grupo G sobre la variedad simpléctica (M, Ω) . Una aplicación momento para la acción Φ es una aplicación

$$J: M \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $J(x): \mathfrak{g} \ni \xi \rightarrow J(x, \xi) \in \mathbb{R}$ es lineal para todo $x \in M$, y para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se verifica:

$$\hat{d}J(\xi) = -i_{\xi_M} \Omega \text{ siendo } \hat{J}(\xi): M \ni x \rightarrow J(x, \xi) \in \mathbb{R}$$

Por otra parte se dice que el momento J es Ad^* -equivariante si:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Phi_g} & M \\
 J \downarrow * & & \downarrow J \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g^*} & \mathfrak{g}
 \end{array}$$

es conmutativo para todo $g \in G$.

4.2.2 TEOREMA

Sea Φ una acción simpléctica del grupo G sobre la variedad simpléctica (M, Ω) y J una aplicación momento Ad^* -invariante para la acción Φ . Entonces

$$\hat{J}: \mathfrak{g} \ni \xi \longrightarrow \hat{J}(\xi) \in \mathcal{F}(M)$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir para todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ es: $[\xi, \eta] = \{\hat{J}(\xi), \hat{J}(\eta)\}$, donde $\{, \}$ denota el corchete de Poisson

La demostración constituye una buena prueba de test para el lector.

4.2.3 OBSERVACIONES

1)

En particular si existe momento, entonces ξ_M es globalmente hamiltoniano para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente, si ξ_M es globalmente hamiltoniano para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, entonces tomando (ξ^1, \dots, ξ^k) base de \mathfrak{g} y J^1, \dots, J^k funciones de M con

$$dJ^j = -i_{(\xi^j)} \Omega$$

y definiendo por extensión lineal: $\hat{J}(\lambda_j \xi^j) = \lambda_j J^j$, se vé que J es aplicación momento.

2)

Una aplicación momento J respecto a la acción simpléctica Φ viene unívocamente determinada por los valores de las $\hat{J}(\xi^j) = J^j \in \mathcal{F}(M)$ siendo (ξ^1, \dots, ξ^k) base de \mathfrak{g} . Si M es conexa, se deduce que todas las aplicaciones momento se obtienen a partir de $J: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ de la forma $J_1 = J + \mu$ donde $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

3)

Volviendo al caso (M, Ω) f -simpléctica y una acción f -simpléctica Φ de G sobre M , el momento $J: M \times \mathfrak{g} \ni (x, \xi) \rightarrow (i_{\xi_M} \theta)(x) \in \mathbb{R}$ definido antes es Ad^* -equivariante. En efecto, si $\xi \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $x \in M$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 J(\Phi_g(x))(\xi) &= \hat{J}(\xi)(\Phi_g(x)) = -(i_{\xi_M} \theta) \cdot \Phi_g(x) = -\Phi_g^*(i_{\xi_M} \theta)(x) = (i_{\Phi_g^* \xi_M} \theta)(x) = \\
 &= (-i_{Ad_g^{-1} \xi} \theta)(x) = \hat{J}(Ad_g^{-1} \xi)(x) = J(x) \cdot Ad_g^{-1} \xi = Ad_g^{-1}(J(x))(\xi)
 \end{aligned}$$

donde se ha usado la Φ -invariancia de θ y la identidad $\Phi_g^*(\xi_M) = Ad_g^{-1}(\xi)$.

El momento J se denomina canónico para la acción f -simpléctica Φ .

Considérese ahora un tipo particular de acción f -simpléctica sobre el fibrado cotangente $M = T^*Q$ con la estructura simpléctica canónica dado por $\Omega = d\theta$ siendo θ la forma de Liouville en M :

4.2.4 TEOREMA

La acción $\Phi_T^*: G \times M \rightarrow M$ inducida por una acción $\Phi: G \times Q \rightarrow Q$, es automáticamente f -simpléctica, y el momento canónico $J: M \times \mathfrak{g} \ni (x, \xi) \rightarrow (i_{\xi_M} \theta)(x) \in \mathbb{R}$, se define de forma equivalente escribiendo $\hat{J}(\xi) = \xi_Q: M = T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$

Demostración:

a) Probemos que si $\phi: Q \rightarrow Q$ es un difeomorfismo, entonces el difeomorfismo $T^*\phi = \Phi: M = T^*Q \rightarrow T^*Q = M$ definido por $\Phi(\alpha) = \alpha'$ si $\phi^*\alpha' = \alpha$, es f -simpléctico, es decir, verifica $\Phi^*\theta = \theta$. En efecto, si $q \in Q$, $\alpha \in T_q^*M$, y $u \in T_\alpha M$, sea $q' = \phi(q)$, $\alpha' = \Phi(\alpha)$, y $u' = d\Phi(\alpha)(u)$. Se tiene entonces:

$$\theta(\alpha)(u) = \alpha(d\pi(\alpha)(u)) = \alpha'[d\phi(q).d\pi(\alpha)(u)] = \alpha'[d\phi(q).d\pi(\alpha)(d\phi^{-1}(\alpha')(u'))] = \alpha'[d[\phi.\pi.\phi^{-1}](\alpha')(u')] = \alpha'(d\pi(\alpha')(u')) = \theta(\alpha')(u').$$

En consecuencia la acción Φ del teorema es f -simpléctica.

b) Veamos que para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ es $\theta(\xi_M) = \xi_Q: M \ni \alpha \rightarrow \alpha(\xi_Q) \in \mathbb{R}$. En efecto: los campos ξ_M y ξ_Q están π -relacionados, pues para todo $\alpha \in T_q^*M$ se verifica:

$$d\pi(\xi_M(\alpha)) = d\pi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(t\xi).\alpha)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\pi(\exp(t\xi).\alpha)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(t\xi).q) = \xi_Q(q) = \xi_Q(\pi(\alpha)).$$

Por tanto: $\theta(\alpha)(\xi_M(\alpha)) = \alpha(d\pi(\xi_M(\alpha))) = \alpha(\xi_Q(q)) = \alpha(\xi_Q)$ ■.

Finalmente analizamos otra situación interesante:

Supóngase que Q es una variedad semi_Riemanniana. Entonces existe un isomorfismo canónico $\mathcal{L}: TQ \rightarrow T^*Q$ (operador de Legendre) que viene definido por la bajada de índices: $\mathcal{L}(v) = \langle v, \cdot \rangle$ para todo $v \in TQ$.

Denotando $\theta_T = \mathcal{L}^*\theta$, $\Omega_T = \mathcal{L}^*\Omega = d\theta_T$, resulta ser (TQ, Ω_T) un espacio f -simpléctico. Se tiene el siguiente resultado:

4.2.5 TEOREMA

Sea Q una variedad semi_riemanniana y G un grupo de Lie que actúa en Q por isometrías $\Phi: G \times Q \rightarrow Q$. Entonces la acción elevada Φ_T de G en TQ es una acción f -simpléctica en (TQ, Ω_T) , y la aplicación momento canónica para esta acción es $\hat{J}(\xi)(v_q) = \langle v_q, \xi_Q(q) \rangle$ para $\xi \in \mathfrak{g}$, $q \in Q$, $v_q \in T_q TQ$.

Demostración:

Nótese en primer lugar que si $\phi: Q \rightarrow Q$ es una isometría entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} TQ & \xrightarrow{T\phi} & TQ \\ \mathcal{L} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\ T^*Q & \xrightarrow{T^*\phi} & T^*Q \end{array}$$

es conmutativo. Como $T^*\phi$ es f -simpléctica (ver parte a) de la demostración de 4.2.4) y \mathcal{L} y también lo es, por definición de θ_T , se concluye que $T\phi$ es también f -simpléctica.

Se concluye por tanto que la acción Φ_T es acción f_simpléctica.

Denotemos $P=TQ$, $M=T^*Q$, y sea $\xi \in \mathfrak{g}$. Entonces se prueba que $\mathcal{L}_*\xi_P = \xi_M$, es decir:

$$d\mathcal{L}(\xi_P(v)) = \xi_M(\mathcal{L}(v)) \text{ para todo } v \in P=TQ$$

En efecto: $d\mathcal{L}(\xi_P(v)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{L}(\exp(t\xi).v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(t\xi).\mathcal{L}(v)) = \xi_M(\mathcal{L}(v)).$

Nótese que $\exp(t\xi).v$ significa exactamente $T(\Phi_{\exp(t\xi)})(v)$, y se ha empleado la conmutatividad del diagrama anterior, y la definición geométrica de diferencial.

Finalmente la aplicación momento canónico viene definida según 4.2.2 (3) por:

$$\hat{J}(\xi)(v) = \theta_T(\xi_P)(v) \text{ para todo } v \in TQ$$

usando ahora 4.2.4 se tiene:

$$\theta_T(\xi_P)(v) = \theta(\xi_M)(\mathcal{L}(v)) = \mathcal{L}(v)(\xi_Q) = \langle v, \xi_Q \rangle$$

como queríamos demostrar. ■

4.3 SISTEMAS HAMILTONIANOS CON SIMETRÍA.

Un sistema Hamiltoniano con simetría (SHS) es (M, Ω, Φ, H, J) , donde:

- (M, Ω) es una variedad simpléctica.

- $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es una acción simpléctica del grupo de Lie G .

- $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable invariante por la acción Φ es decir $H(\Phi_g(x)) = H(x)$ para todo $g \in G$, y todo $x \in M$.

- $J: M \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación momento que es Ad^* equivariante.

Si (M, Ω) es fuertemente simpléctico ($\Omega = d\theta$), y la acción también lo es ($\Phi_g^*\theta = \theta$ para todo $g \in G$) entonces J es el momento canónico, y diremos que el sistema es Hamiltoniano con simetría fuerte (SHS_F).

4.3.1 TEOREMA

Sea (M, Ω, Φ, H, J) un SHS. Entonces el momento $J: M \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ induce la aplicación:

$$J: M \ni x \rightarrow J(x) \in \mathfrak{g}^* \text{ con } J(x)(\xi) = \hat{J}(\xi)(x) = J(x, \xi)$$

y resulta ser invariante por el flujo X_H , es decir:

Si $I \ni t \rightarrow c(t) \in M$ es una curva integral de X , entonces $J(c(t)) = \mu \in \mathfrak{g}^*$ es constante.

Demostración:

Como $\Phi_g^*(H(x)) = H(x)$ para todo $x \in M$, en particular se verifica para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$:

$$H(\Phi_{\exp(t\xi)}x) = H(x) \text{ luego } 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (H(\Phi_{\exp(t\xi)}x)) = dH(\xi_M(x)) = \xi_M(H)(x)$$

esto prueba que $0 = dH(\xi_M) = dH(V(d\hat{J}(\xi))) = \langle \hat{J}(\xi), H \rangle = 0$. ■

(ver 3.2.4)

OBSERVACION:

En las condiciones del teorema anterior se tiene que si (ξ^1, \dots, ξ^k) es una base de \mathfrak{g} entonces las funciones $J^k = \hat{J}(\xi^k): M \rightarrow \mathbb{R}$ determinan k integrales pri-

meras de X_H que son independientes.

De hecho si $c(t)$ es una curva integral de X_H y $J(c(t)) = \mu \in \mathfrak{g}^*$, entonces

$$\hat{J}^j(c(t)) = J(c(t))(\xi^j) = \mu(\xi^j)$$

además $dJ^j = d\hat{J}(\xi^j) = \Omega(\xi_M^j)$, y así dJ^1, \dots, dJ^k son independientes por ser el operador $\Omega: \mathfrak{X}(M) \ni V \rightarrow i_V \Omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ isomorfismo \mathbb{R} -lineal, y $(\xi_M^1, \dots, \xi_M^k)$ linealmente independientes en cada punto.

4.3.2 EJEMPLO STANDAR

Imaginemos que Q es una variedad diferenciable, espacio de posiciones de una sistema mecánico con d grados de libertad. Denotamos por $P = TQ$ el fibrado tangente de Q , que representa el espacio de estados del sistema.

La energía cinética del sistema establece una aplicación diferenciable

$$K: P = TQ \rightarrow \mathbb{R}$$

que induce una estructura Riemanniana \langle, \rangle en Q definida por la condición:

$$K(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

La energía potencial establece una aplicación diferenciable $V: Q \rightarrow \mathbb{R}$, que puede elevarse trivialmente al fibrado $P = TQ$, escribiendo:

$V(v) = V(\tau_Q(v))$ para todo $v \in P$, siendo $\tau_Q: P = TQ \rightarrow Q$ la proyección canónica.

Como es habitual, $E = K + V: P \rightarrow \mathbb{R}$ es la energía total, y $L = K - V: P \rightarrow \mathbb{R}$ es la función lagrangiana.

Finalmente, sea $M = T^*Q$, Θ la forma de Liouville canónica en M , y $\Omega = d\Theta$.

Denotando, como en 2.6, $\mathcal{L}: TQ = P \rightarrow M = T^*Q$ el operador de lagrange inducido por la métrica Riemanniana en Q , escribimos:

$$\Theta = \mathcal{L}^* \Theta, \quad \omega = \mathcal{L}^* \Omega = \mathcal{L}^* d\Theta = d \mathcal{L}^* \Theta = d\theta$$

y así (P, ω) es una variedad f -simpléctica. Nos referiremos brevemente a este modelo como un modelo simpléctico standar; diremos que (P, ω, E) es un sistema hamiltoniano standar.

4.3.3 OBSERVACION

La aplicación $\mathcal{L}: TQ = P \rightarrow M = T^*Q$ resulta ser un difeomorfismo simpléctico. En particular si $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $\mathcal{L}_* X_E = X_H$, es decir, X_E es el campo en el espacio P de estados que define las ecuaciones del movimiento.

Por otra parte, si $V=0$, entonces X_H define el Spray geodésico de la conexión de Levi-Civita asociada a (Q, \langle, \rangle) .

Se tiene además el siguiente resultado consecuencia de 4.3.1 y 4.2.5:

4.3.4 TEOREMA

Sea (P, ω, E) un sistema hamiltoniano standar, y sea $\Phi: G \times Q \rightarrow Q$ una acción del grupo de Lie G sobre Q , tal que Φ_g es una isometría de (Q, \langle, \rangle) , y $\Phi_g \cdot V = V$ para todo $g \in G$.

Sea $\Phi_T: G \times P \rightarrow P$ la elevación de acción de Φ a $P = TQ$. Entonces Φ_T es una acción

$f_{\text{simpléctica}}$ y la aplicación momento canónica para esta acción:

$$J: P \times \mathfrak{g} \ni (v_q, \xi) \rightarrow \langle v_q, \xi_Q(q) \rangle \in \mathbb{R}$$

induce una aplicación $J: P \ni x \rightarrow J(x) \in \mathfrak{g}^*$ que es invariante por el flujo de X_E .

NOTA:

Esto permite como antes obtener $k = \dim G$ integrales primeras independientes del campo X_E , que representa "las ecuaciones del movimiento del sistema".

SECCION 5

DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

La referencia general para esta sección es [1] Cap 6. Otras referencias aparecerán a lo largo del texto. Se utilizarán libremente los conceptos y notaciones establecidos en los apéndices II III y IV.

5.1 Descripción geométrica del espacio de posiciones de un sólido.

Desde un punto de vista formal, un sólido rígido puede considerarse como un par (\mathcal{E}, ρ) donde \mathcal{E} es un espacio afín euclídeo tridimensional orientado, y $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ es una función acotada, integrable y con soporte compacto \mathcal{S} , tal que $\langle \mathcal{S} \rangle$ (subespacio generado por \mathcal{S}) es igual a \mathcal{E} . Se denomina a ρ función densidad de masa, y \mathcal{E} es el espacio del sólido

En la práctica, una vez fijado un sistema de referencia cartesiano euclídeo positivo (brevemente, SR), $e = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un sólido rígido siempre puede

"representarse" en la forma (\mathcal{E}_3, ρ) siendo $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} : a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ el espacio afín euclídeo canónico de las coordenadas cartesianas.

Fijemos E un espacio afín euclídeo tridimensional orientado, que interpretaremos como el espacio en reposo. Una posición del sólido en E, es por definición una isometría directa $P: \mathcal{E}_3 \rightarrow E$. Si $a \in \mathcal{E}_3$ es un punto del sólido, entonces $P(a)$ se interpreta como la posición del punto a en E. Nótese que $a \in \mathcal{E}_3$ representa también las coordenadas de $P(a)$ respecto a P_e .

Al conjunto de todas las posibles posiciones P del sólido, lo denotamos por Q y lo llamaremos espacio de posiciones.

El espacio Q de posiciones tiene estructura canónica de variedad diferenciable. En efecto, si $\varepsilon = (e_o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es un SR en E y $x_\varepsilon: E \rightarrow \mathcal{E}_3$ son las coordenadas cartesianas inducidas, para cada posición $P \in Q$ se define $P_\varepsilon \in SE(3)$ por:

$$P_\varepsilon = x_\varepsilon \circ P: \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_3 & \xrightarrow{P} & E \\ & \searrow P_\varepsilon & \downarrow x_\varepsilon \\ & & \mathcal{E}_3 \end{array}$$

La aplicación $M_\varepsilon: Q \ni P \rightarrow P_\varepsilon \in SE(3)$ es una biyección que da estructura de variedad diferenciable a Q. Esta estructura no depende del SR en E tomado, pues si $\bar{\varepsilon} = \varepsilon Q$ ($Q \in SE(3)$) es otro SR en E, entonces: $x_{\bar{\varepsilon}} = Q \circ x_\varepsilon$ y por tanto $P_{\bar{\varepsilon}} = x_{\bar{\varepsilon}} \circ P = Q \circ x_\varepsilon \circ P = Q P_\varepsilon$. Así denotando por $L_Q: SE(3) \ni A \rightarrow QA \in SE(3)$ la traslación por la izquierda en SE(3) se verifica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{M_{\bar{\varepsilon}}} & SE(3) \\ & \searrow M_\varepsilon & \downarrow L_Q \\ & & SE(3) \end{array}$$

Otro planteamiento que no involucra a priori el SR e es el siguiente:

El grupo de movimientos directos de E , $SE(E)$ actúa de forma natural en Q como grupo de difeomorfismos de la siguiente manera:

$$\lambda: SE(E) \times Q \ni (g, P) \longrightarrow \lambda_g(P) = g \circ P \in Q:$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{P} & E \\ & \searrow g \circ P & \downarrow g \\ & & E \end{array}$$

Esta actuación es simplemente transitiva, es decir, Si $A, B \in Q$ existe un único $g \in SE(E)$ tal que $g \circ A = B$. Así, Si $O \in Q$ es una posición, el difeomorfismo:

$$\Xi_0: Q \ni A \longrightarrow O^{-1} \circ A \in SE(\mathcal{E})$$

da a Q estructura de grupo de Lie que denotamos por Q_0 .

Si $\bar{O} \in Q$ es otra posición, sea $g \in SE(E)$ con $g \circ O = \bar{O}$, entonces para cada $P \in Q$ se tiene: $\Xi_{\bar{O}}(P) = (g \circ O^{-1}) \circ P = O^{-1} \circ (g^{-1} \circ P) = \Xi_0(\lambda_{g^{-1}}(P))$ y por tanto el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\lambda_g} & Q \\ & \searrow \Xi_0 & \downarrow \Xi_{\bar{O}} \\ & & SE(\mathcal{E}) \end{array} \quad (\bar{O} = g \circ O)$$

es conmutativo, y λ_g establece un isomorfismo entre los grupos Q_0 y $Q_{\bar{O}}$.

Supuesto fijado ahora el SR e en \mathcal{E} que identifica \mathcal{E} y \mathcal{E}_3 , tomando $\varepsilon = O(e)$, se tiene entonces la identificación $\Xi_0 = \mathcal{M}_\varepsilon: Q \longrightarrow SE(3) = SE(\mathcal{E})$.

Nótese por otra parte, que Q es una variedad sumergida en el espacio afín A de las aplicaciones afines de \mathcal{E}_3 en E , que tiene por espacio vectorial asociado el espacio \vec{A} de las aplicaciones afines de \mathcal{E}_3 en \vec{E} .

5.2 Descripción geométrica del espacio de estados de un sólido rígido.

Un movimiento del sólido, viene dado por una curva diferenciable $P: I \ni t \longrightarrow P(t) \in Q$. El parámetro $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ representa el tiempo, $P(t)$ es la posición del sólido en el instante t , siendo para cada $a \in \mathcal{E}_3$, $P(t)a$ la posición del punto a del sólido en el instante t . Supuesto que $0 \in I$, se dice que P es un movimiento del sólido por $P = P(0) \in Q$, y $\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = P'(0)$ representa un vector tangente de Q en P que se denomina velocidad inicial del sólido.

Los elementos de $T_P Q$ (como $P'(0)$) son aplicaciones afines de \mathcal{E}_3 en \vec{E} , estudiaremos cuál es la propiedad geométrica que los caracteriza y cuál es su significado cinemático:

El movimiento $P(t)$ del sólido hace describir a cada punto $p \in E$ la trayectoria $p(t) = P(t) \circ P^{-1}(p)$, y en el instante $t=0$ tiene por velocidad $v(p) = P'(0) \circ P^{-1}(p)$. Como $P(t) \circ P^{-1} = \phi(t)$ es una isometría de E , se concluye que $\phi'(0) = v: E \longrightarrow \vec{E}$ es un tórsor que describe la velocidad instantánea de cada punto. Se obtiene así el siguiente:

5.2.1 TEOREMA

Fijado $P \in Q$, se verifica que los vectores $V \in T_P Q$ son aplicaciones afines $V: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{E}$ tales que $v = V \circ P^{-1}$ es un torsor de E , que representa el campo de velocidades instantáneas de un movimiento P del sólido por P con $P'(0) = V$.

En particular, usando la teoría de torsores, se deduce la existencia de un único vector $\vec{\Omega} \in \vec{E}$ de forma que para todo $p, q \in E$ se verifica:

$$v(q) = v(p) + \vec{\Omega} \times p\vec{q}$$

Se denomina a $\vec{\Omega}$ velocidad angular instantánea de giro definida por V en P .

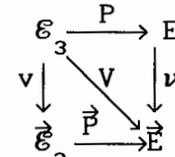
Por otra parte, el conjunto Ω de puntos $p \in E$ tales que $v(p)$ es paralelo a $\vec{\Omega}$ constituye una recta afín de E con dirección $\vec{\Omega}$. Se denomina a Ω eje instantáneo de rotación.

Finalmente, se sabe que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, de forma que $v(p) = \lambda \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$ para todo $p \in \Omega$.

Denominamos a λ módulo de desplazamiento.

El par (Ω, λ) los denominamos invariantes geométricos de V en P , y caracterizan geoméricamente (como veremos) al movimiento helicoidal del sólido que produce sobre E la distribución $v = V \circ P^{-1}$ de velocidades puntuales inducida por V .

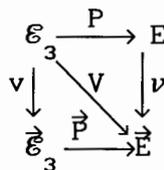
El siguiente diagrama esquematiza esta situación, y permite definir el torsor cinemático v en \mathcal{E}_3 :

$$v = \vec{P}^{-1} \circ V = \vec{P}^{-1} \circ v \circ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & \omega \end{array} \right)$$


Observese que la matriz v es la representación matricial de v en el sistema de referencia P_e , y describe analíticamente en dichas coordenadas la distribución de las velocidades de las partículas puntuales del sólido. Es decir, si $a \in \mathcal{E}_3$, $v(a)$ son las coordenadas de la velocidad de P_a respecto a P_e .

5.2.2 NOTACION:

Sea $V: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{E}$ vector tangente a Q en P . Si se considera el diagrama:



escribimos $V_P = v(P) = v(P)$, donde los torsores v y v son interpretados ahora como campos de vectores en Q . Estos dos tipos de campos tienen, como veremos ahora, un significado geométrico muy especial:

5.2.3 PROPOSICION

Las aplicaciones $TQ \ni V_P \rightarrow (P, V_0 P^{-1}) \in Q \times \mathcal{J}or(E)$ $TQ \ni V_P \rightarrow (P, \vec{P}^{-1} \circ V) \in Q \times \mathcal{J}or(\mathcal{E}_3)$ determinan trivializaciones globales de TQ , y escribimos:

$$V = V_P \cong (P, V_0 P^{-1}) \cong (P, \vec{P}^{-1} \circ V)$$

Por otra parte, si $g \in SE(E)$ es $(\lambda_g)_*(V_P) \cong (g_0 P, \vec{P}^{-1} \circ V)$. Es decir, la actuación de $(\lambda_g)_*$ en TQ puede verse sobre $Q \times \mathcal{J}or(\mathcal{E}_3)$ así:

$$(\lambda_g)_* : Q \times \mathcal{J}or(\mathcal{E}_3) \ni (P, v) \rightarrow (g_0 P, v) \in Q \times \mathcal{J}or(\mathcal{E}_3)$$

La demostración de esta última afirmación puede hacerse así:

Sea $P(t)$ un desplazamiento que define el vector V en P . Entonces $g_0 P(t)$ es un desplazamiento que define el vector $W = (\lambda_g)_*(V)$ en $Q = g_0 P$, y así $W = \vec{g}_0 P'(0) = \vec{g}_0 V$, por tanto: $W_0 \cong (Q, \vec{Q}^{-1} \circ W) = (Q, \vec{P}^{-1} \circ \vec{g}^{-1} \circ \vec{g}_0 V) = (g_0 P, \vec{P}^{-1} \circ V)$. ■

5.2.4 DEFINICION

Un campo $X \in \mathfrak{X}(Q)$ se dice invariante por traslaciones a la izquierda si

$$(\lambda_g)_*(X(P)) = X(\lambda_g(P)) \text{ para todo } P \in Q$$

La familia $\mathfrak{L}(Q)$ de tales campos, constituye una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(Q)$. en particular se tiene el siguiente resultado:

5.2.5 COROLARIO

Para cada $v: \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ torsor de \mathcal{E} , el campo $v: Q \ni P \rightarrow v(P) \in TQ$ es invariante por traslaciones a la izquierda (i.e $(\lambda_g)_*(v(P)) = v(\lambda_g(P))$ para todo $P \in Q$)

La aplicación $\mathcal{J}or(\mathcal{E}) \ni v \rightarrow v \in \mathfrak{L}(Q)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie

Existe un desplazamiento canónico que define el vector V en P . Es el denominado desplazamiento helicoidal, que viene definido de la forma que sigue: Tomando $v = \vec{P}^{-1} \circ V: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_3$, entonces para cada t la aplicación $e^{tv}: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_3$ es una isometría positiva. Se define $P(t)$ mediante:

$$P(t) = P \circ e^{tv} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_3 & \xrightarrow{P} & E \\ & \swarrow e^{tv} & \uparrow P(t) \\ & & \mathcal{E}_3 \end{array} \text{ Así } P'(0) = \vec{P} \circ v = V.$$

5.2.6 TEOREMA

En las condiciones anteriores la aplicación $H(t) = P(t) \circ P^{-1}: E \rightarrow E$ define para cada t un movimiento helicoidal de eje Ω , ángulo (orientado según el sentido de $\vec{\Omega}$) igual a $|\vec{\Omega}|t$ y módulo de desplazamiento igual a λt .

Demostración:

Sean (Ω, λ) los invariantes geométricos de $V \in T_P Q$. Fijemos un SR en E , $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tal que $e_0 \in \Omega$ y $\langle \vec{e}_1 \rangle = \vec{\Omega}$. La matriz respecto a este sistema del

torsor cinemático $v = V_0 P^{-1}$ en E será $v_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $P(e)=\varepsilon$ y por tanto $P_\varepsilon=I$,

$$\text{con lo que } v_\varepsilon=v, \text{ y } P(t)_\varepsilon=e^{tv}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_1 t & -\text{sen } \omega_1 t \\ 0 & 0 & \text{sen } \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \blacksquare$$

Se obtiene otra demostración más elegante (sin usar la referencia e) teniendo en cuenta que: $H(t)=P(t) \circ P^{-1}=P_0(e^{tv}) \circ P^{-1}=\exp(tv):E \rightarrow E$ cuya matriz asociada respecto a ε es justamente la última que hemos escrito, y representa para cada t el movimiento helicoidal anunciado.

Por otra parte, también podemos escribir $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tv} \cdot P=v \cdot P=v(P)=V_P$, y los campos $v \in \mathfrak{X}(Q)$ cuando $v \in \mathcal{T}or(E)=\text{Algebra de Lie}(SE(E))$ tienen el siguiente significado:

5.2.6 PROPOSICION

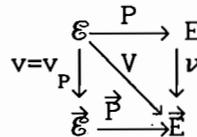
Cuando $v \in \mathcal{T}or(E)$, el campo $v \in \mathfrak{X}(Q)$, es precisamente el campo vertical $v=v_Q$ inducido por v y la actuación $\lambda:SE(E) \times Q \rightarrow Q$.

5.3 Significado geométrico de la energía cinética.

Sea (\mathcal{E}, ρ) un sólido rígido. Si \mathcal{V} es el soporte (compacto) de ρ , y dv es el volumen canónico de \mathcal{E} , se llama masa del sólido $m=\int_{\mathcal{V}} dm$, siendo $dm=\rho dv$.

Supóngase que V es un vector tangente a Q por la posición P .

Se trata de determinar la energía cinética del sólido en el estado definido por V_P . Para ello debemos recordar como se deducen los torsores cinemáticos v y $v=v$ de V_P a partir del diagrama:



La energía cinética del estado V_P tiene el valor:

$$W(V_P)=\frac{1}{2} \int_{P(\mathcal{V})} v(p) \cdot v(p) (\rho \circ P^{-1}(p)) dv_E$$

Teniendo en cuenta que (una vez fijado e SR en \mathcal{E}), v representa la matriz de v respecto a $P(e)$ y que cada $a \in \mathcal{E}$ ($=\mathcal{E}_3$) representa las coordenadas de $P(a)$ respecto a $P(e)$, el cálculo de la anterior integral, se reduce a calcular en el espacio analítico \mathcal{E}_3 la integral:

$$W(V_P)=\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} v(a) \cdot v(a) dm$$

(Se obtiene un argumento más elegante, sin usar el SR e , aplicando el teorema del cambio de variable).

5.3.1 TEOREMA

La energía cinética $W: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante por la acción del grupo $SE(E)$ sobre Q . Por otra parte, W induce una única métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en Q de forma que para todo $V_P \in T_P Q$ se verifica que:

$$W(V_P) = \frac{1}{2} \langle V_P, V_P \rangle$$

En particular λ actúa sobre $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ por isometrías.

Demostración:

La identificación $TQ \cong Q \times \mathcal{T}or(\mathcal{E})$ definida por $TQ \ni V_P \rightarrow (P, \vec{P}^{-1} \circ V) \in Q \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$ permite escribir la acción de $SE(E)$ sobre TQ en la forma: $(g \in SE(3))$

$$(\lambda_g)_* : Q \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}) \ni (P, v) \rightarrow (\lambda_g(P), v) \in Q \times \mathcal{T}or(\mathcal{E})$$

y la energía cinética $W: Q \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}) \ni (P, v) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \langle v(x), v(x) \rangle dm \in \mathbb{R}$.

Esto prueba la invariancia de W por la acción de $SE(E)$.

5.4 Cálculo de la energía cinética: Elementos dinámicos de un sólido.

Fijado $V \in T_P Q$, $v = \vec{P}^{-1} \circ V \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$, nos proponemos hacer un cálculo explícito de la energía cinética $W(V)$. Este cálculo nos permitirá introducir de forma natural los invariantes dinámicos del sólido (\mathcal{E}, ρ) de los que depende.

Sea $\vec{\omega} \in \mathcal{E}$ la velocidad instantánea de giro definida por v . Es decir:

$$v(a) = v(o) + \vec{\omega} \times \vec{o}a \text{ para todo } o, a \in \mathcal{E}$$

se tiene por tanto: $W(V) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} v(a) \cdot v(a) dm = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ con

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} v(a) \cdot v(o) dm \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} v(a) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{o}a) dm$$

Calculemos cada uno de los sumandos \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{12} \text{ con } \mathcal{E}_{11} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} v(o) \cdot v(o) dm \quad \mathcal{E}_{12} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} v(o) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{o}a) dm$$

$\mathcal{E}_{11} = \frac{1}{2} m v(o) \cdot v(o)$ representa la energía cinética de un sólido que

tuviera toda su masa concentrada en el punto o .

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (v(o) \times \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a dm) = -\frac{1}{2} m \vec{\omega} \cdot (v(o) \times \vec{o}g), \text{ siendo } g \in \mathcal{E} \text{ el punto}$$

definido por la condición: $m \vec{o}g = \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a dm$.

5.4.1 LEMA

El punto g no depende del origen o tomado. Se denomina a g centro de gravedad del sólido.

Demostración:

Fijados $o, c \in \mathcal{E}$, sean g_o y g_c tales que $m \vec{o}g_o = \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a dm$ y $m \vec{c}g_c = \int_{\mathcal{V}} \vec{c}a dm$.

Se tiene entonces: $m \vec{c}g_c = \int_{\mathcal{V}} \vec{c}a \, dm = \int_{\mathcal{V}} (\vec{c}o + \vec{o}a) \, dm = m \vec{c}o + \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \, dm = m (\vec{c}o + \vec{o}g_o) = m \vec{c}g_o$ ■

En adelante supondremos que el origen o tomado coincide con el centro de gravedad g del sólido. En particular se tiene: $\vec{o}g = \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \, dm = 0$ y el sumando \mathcal{E}_{12} es idénticamente nulo. Así:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{11} = \frac{1}{2} m v(o) \cdot v(o)$$

Por otra parte, $2\mathcal{E}_2 = \int_{\mathcal{V}} v(a) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{o}a) \, dm = \vec{\omega} \cdot m(v)$ donde $m(v) = \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \times v(a) \, dm$ es por definición el momento cinético del sólido respecto a o. Se tiene:

$$m(v) = \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \times (v(o) + \vec{\omega} \times \vec{o}a) \, dm = \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \, dm \right) \times v(o) + \tilde{\mathfrak{J}}(\vec{\omega})$$

Donde $\tilde{\mathfrak{J}}: \mathcal{E} \ni \vec{\omega} \rightarrow \int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \times (\vec{\omega} \times \vec{o}a) \, dm \in \mathcal{E}$ es el llamado tensor de inercia, que es un

tensor tipo \mathfrak{I}_1^1 , métricamente equivalente al tensor \mathfrak{J} tipo \mathfrak{I}_2^0 definido por: $\mathfrak{J}: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \rightarrow \mathfrak{J}(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \vec{\omega}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{J}}(\vec{\omega}_2) \in \mathbb{R}$, y que también llamamos tensor de inercia.

Teniendo en cuenta que $\int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \, dm = 0$ por ser o el centro de gravedad, queda:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{J}(\vec{\omega}, \vec{\omega})$$

Se denomina a $I(\omega_o) = \frac{\mathfrak{J}(\vec{\omega}, \vec{\omega})}{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}$, momento de inercia del sólido respecto del eje ω_o , que pasa por o y es paralelo a $\vec{\omega}$. Tenemos así finalmente:

$$W(V) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} m |v(o)|^2 + \frac{1}{2} I(\omega_o) |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2} m |v(o)|^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{J}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \quad (5.4.1)$$

El primer sumando \mathcal{E}_1 representa la energía cinética de traslación, y es la energía cinética que tendría un sólido que tuviera su masa m concentrada en (el centro de gravedad) o y se moviera con velocidad v(o).

El segundo sumando \mathcal{E}_2 se interpreta como la energía cinética de rotación con velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ alrededor del eje ω_o .

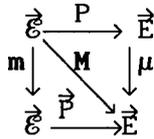
5.4.2 OBSERVACIONES

Fijada una posición $P \in Q$ del sólido, la aplicación $M = \vec{P} \circ m$ es el momento cinético (respecto al centro de gravedad) en el espacio en reposo E.

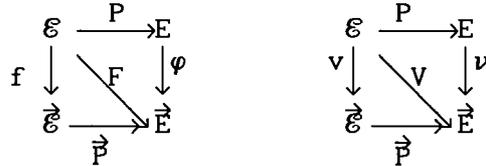
De hecho, si $Po = e_o$, y V es un vector de $T_p Q$ y $v = \vec{P}^{-1} \circ v \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$ se verifica:

$$M(v) = \vec{P}(m(v)) = \vec{P} \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{o}a \times v(a) \rho \, dvol_{\mathcal{E}} \right) = \int_{P(\mathcal{V})} \vec{e}_o \times v(p) (\rho \circ P^{-1}) \, dvol_E$$

El momento cinético m(v) respecto al centro de gravedad o solo depende de el vector $\vec{\omega}$ asociado al torsor y tiene por valor $\tilde{\mathfrak{J}}(\vec{\omega})$, escribiremos por abuso de notación $m(v) = m(\vec{\omega})$, e identificaremos por tanto $\tilde{\mathfrak{J}}$ con m. Análogamente escribiremos $M(v) = M(\vec{\omega})$. Se tiene así el siguiente diagrama:



Finalmente estableceremos una fórmula útil para el cálculo $\langle V, F \rangle$ siendo $V, F \in T_p Q$. Considerense los diagramas:



Si $\vec{\omega}$ y $\vec{\Omega}$ son los vectores de rotación de v y φ respectivamente, usando (5.4.1) queda: $2 W(V) = -\langle V, V \rangle = \langle v, v \rangle = m v(o) \cdot v(o) + m(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}$.

Como el vector asociado a el taylor f es $\vec{P}^{-1}(\vec{\Omega})$ (véase proposición 7 del Apéndice), se obtiene la fórmula:

$$\langle V, F \rangle = \langle v, f \rangle = m v(o) \cdot f(o) + m(\vec{\omega}) \cdot \vec{P}^{-1}(\vec{\Omega})$$

Aplicando \vec{P} a cada sumando y teniendo en cuenta que \vec{P} es isometría queda:

$$m v(o) \cdot f(o) = m V(o) \cdot F(o) \qquad m(\vec{\omega}) \cdot \vec{P}^{-1}(\vec{\Omega}) = (\vec{P} \circ m)(\vec{\omega}) \cdot \vec{\Omega} = M(\vec{\omega}) \cdot \vec{\Omega}$$

y por tanto se tiene:

$$\langle V, F \rangle = m V(o) \cdot F(o) + M(\vec{\omega}) \cdot \vec{\Omega} \quad (5.4.2)$$

5.5 Análisis geométrico del Tensor de Inercia.

El tensor de inercia \mathfrak{I} junto con el valor m de la masa y el centro de gravedad $o \in \mathcal{E}$, proporcionan toda la información necesaria y suficiente para la descripción del movimiento inercial del sólido.

Es de esperar pues, que las propiedades geométricas del tensor \mathfrak{I} se traduzcan en propiedades dinámicas del sólido.

5.5.1 TEOREMA

El tensor de inercia \mathfrak{I} es simétrico. Es decir:

$$\mathfrak{I}(\vec{\omega}_1) \cdot \vec{\omega}_2 = \mathfrak{I}(\vec{\omega}_2) \cdot \vec{\omega}_1 \text{ para todo } \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \vec{\mathcal{E}}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la identidad $a \times (b \times c) = (c \cdot a)b - (b \cdot a)c$ para $a, b, c \in \vec{\mathcal{E}}$ se tiene:

$$(\vec{o}a \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{o}a)) \cdot \vec{\omega}_2 = [(\vec{o}a \cdot \vec{o}a)\vec{\omega}_1 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{o}a)\vec{o}a] \cdot \vec{\omega}_2 = (\vec{o}a \cdot \vec{o}a)(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{o}a)(\vec{o}a \cdot \vec{\omega}_2)$$

y la última expresión es simétrica. ■

Usando un resultado clásico de álgebra lineal se tiene:

5.5.2 COROLARIO

Existe una base ortonormal positiva $\vec{e} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en $\vec{\mathcal{E}}_3$, formada por autovectores de \mathfrak{I} . Es decir, si $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$ entonces:

$$\mathfrak{I}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$$

Donde $I_1 = \mathfrak{I}(\vec{i}, \vec{i})$, $I_2 = \mathfrak{I}(\vec{j}, \vec{j})$, $I_3 = \mathfrak{I}(\vec{k}, \vec{k})$ son las momentos de inercia de los ejes

que pasando por o tienen direcciones $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. A estos ejes se les denomina ejes principales de inercia, siendo I_1, I_2, I_3 los momentos principales de inercia.

Llamaremos a $e=(o, \vec{e})$ SR principal del sólido (brevemente SRP) y denotaremos por x, y, z a las coordenadas respecto a este sistema.

5.5.3 DEFINICION

Se denomina elipsoide de inercia Θ al conjunto de puntos $a \in \mathcal{E}$ tales que $\mathfrak{J}(\vec{o}\vec{a}, \vec{o}\vec{a})=1$. Respecto a las coordenadas principales tiene por ecuación:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$

Si $a \in \Theta$ entonces el momento de inercia respecto al eje oa definido por o y a se escribe $I(oa) = \frac{\mathfrak{J}(\vec{o}\vec{a}, \vec{o}\vec{a})}{\langle \vec{o}\vec{a}, \vec{o}\vec{a} \rangle}$. Así $|\vec{o}\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{I(oa)}}$.

El elipsoide de inercia, junto con la masa total caracterizan totalmente las propiedades dinámicas del sólido.

5.5.4 NOTA

En la práctica, el cálculo del momento de inercia del sólido respecto de un eje ω se obtiene mediante la integral: $\int_{\mathcal{E}} r^2 dm$, donde $r: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ denota la función distancia a ω .

5.5.5 COROLARIO

Sea $V \in T_P \mathcal{Q}$, y $v = \vec{P}^{-1} \circ V \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$. Entonces si la matriz de v respecto al SR e

$$\text{es } v_e = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & \omega \end{array} \right) \text{ se tiene: } \begin{cases} v(o) = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \\ \vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \end{cases} \text{ y}$$

$$W(V) = \frac{1}{2} \left(m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right)$$

■

En particular si el sólido es dinámicamente simétrico, es decir:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \mathbb{I}$$

entonces la expresión de la energía cinética es:

$$W(V) = \frac{1}{2} \left(m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \mathbb{I} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \right)$$

5.6 Teoremas de conservación.

Sea $(\mathcal{Q}, \langle, \rangle)$ la variedad Riemanniana obtenida a partir del sólido rígido (\mathcal{E}, ρ) . Nuestro problema es el siguiente:

Supuesto que sobre el sólido no actúan fuerzas exteriores, y dado $V_P \in T_P \mathcal{Q}$, determinar el movimiento $P(t)$ del sólido (compatible con las leyes de la dinámica de Newton) tal que $P'(0) = V_P$. Se denomina a $P(t)$ movimiento inercial del

sólido. Por la observación 4.3.3 se concluye:

5.6.1 TEOREMA

$P(t)$ es un movimiento inercial del sólido, si y solo si P es una geodésica de la conexión de Levi-Civita de la variedad Riemanniana (Q, \langle, \rangle) .

A partir de un estado $V_p \in T_p Q$ del sólido, se pueden definir ciertas magnitudes físicas tales como energía cinética, momento cinético...etc. Se dice que una magnitud es conservativa, si para todo movimiento inercial $P(t)$ del sólido, el valor de la magnitud en $P'(t)$ permanece constante respecto al tiempo. Por ejemplo, como consecuencia del teorema anterior se tiene:

5.6.2 TEOREMA

La energía cinética es una magnitud conservativa.

Demostración:

Nótese si $P(t)$ es una geodésica de Q , entonces $W(P'(t)) = \frac{1}{2} \langle P'(t), P'(t) \rangle$ es constante.

Todos los demás teoremas de conservación pueden obtenerse a partir del teorema 4.3.4 aplicado a la acción (por isometrías) λ de $SE(E)$ sobre (Q, \langle, \rangle)

Recuérdese que $v(P) = v.P$ representa el generador infinitesimal de la acción λ correspondiente a $v \in \mathcal{T}or(E)$:

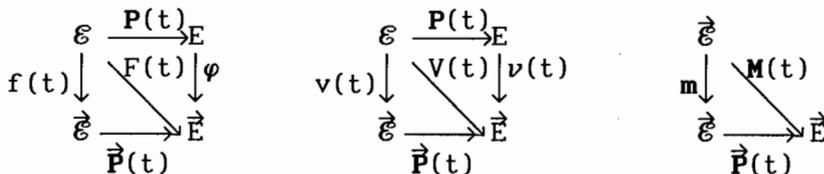
5.6.3 TEOREMA (de Noheter)

Sea $v \in \mathcal{T}or(E)$. Si $P(t)$ es una geodésica, la función:

$$t \rightarrow \langle P'(t), v.P(t) \rangle$$

permanece constante. ■

Expresaremos ahora el teorema de Noheter de forma más explícita con ayuda de los siguientes diagramas: ($P(t)$ es un movimiento inercial del sólido)



donde $\varphi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (g_s) \in \mathcal{T}or(E)$, y $F(t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g_s \circ P(t) = \varphi \circ P(t) \in T_p Q$.

En el segundo diagrama $V(t) = P'(t)$, y en el tercero, $M(t) = \vec{P}(t) \circ m$ es la aplicación momento cinético en el espacio en reposo para el instante t .

El teorema de Noheter afirma entonces que $\langle V(t), F(t) \rangle$ es constante.

Si $\vec{\Omega} \in \vec{E}$ es el vector rotación asociado a φ , y $\vec{\omega}(t)$ es el vector rotación asociado a $v(t)$, usando la fórmula (5.4.2) se verifica:

$$\langle V(t), F(t) \rangle = m V(t)(o) \cdot F(t)(o) + M(t)(\vec{\omega}(t)) \cdot \vec{\Omega} = \text{cte} \quad (5.6.3)$$

5.6.4 COROLARIO: Ley de conservación de la velocidad del centro de gravedad.

Supuesto $P(t)$ un movimiento inercial del sólido, entonces la velocidad $P'(t)(o)$ del centro de gravedad permanece constante.

Demostración:

Manteniendo las notaciones anteriores, tomemos $u \in \vec{E}$ un vector arbitrario, y considerese el tursor constante $\varphi: E \ni x \rightarrow u \in \vec{E}$, cuyo vector rotación asociado es $\vec{\Omega} = 0$. Por (5.6.3) queda:

$$m V(t)(o).F(t)(o) = m V(t)(o).\varphi(P(t)(o)) = m V(t)(o).u = \text{cte}$$

Como $u \in E$ es arbitrario se concluye que $P'(t)(o) = V(t)(o)$ es constante. ■

5.6.5 COROLARIO: Ley de conservación del momento cinético.

En un movimiento inercial $P(t)$ el momento cinético respecto al centro de gravedad en el espacio de reposo, permanece constante.

Demostración:

Por el resultado anterior, $V(t)(o) = u \in \vec{E}$ es constante. En consecuencia el centro de gravedad describe una trayectoria en E de la forma:

$$P(t)(o) = e_0 + tu, \text{ con } e_0 = P(0)o \in E \quad (5.6.5)$$

Fijemos un vector $\vec{\Omega} \neq 0$ arbitrario de \vec{E} y sea φ el tursor de E que con vector de rotación asociado $\vec{\Omega}$, y tal que $\varphi(e_0) = 0$.

Manteniendo las notaciones previas por 5.6.3 se tiene:

$$m u.F(t)(o) + M(t)(\vec{\omega}(t)).\vec{\Omega} = \text{cte}$$

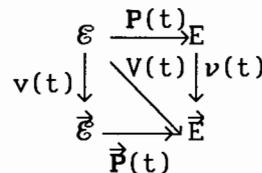
Usando ahora (5.6.5) analicemos el primer sumando:

$$u.F(t)(o) = u.\varphi(P(t)o) = u.\varphi(e_0 + tu) = u.(\varphi(e_0) + t\vec{\Omega} \times u) = t[u.(\vec{\Omega} \times u)] = 0$$

Queda entonces $M(t)(\vec{\omega}(t)).\vec{\Omega} = \text{cte}$, y como $\vec{\Omega}$ es un vector arbitrario, necesariamente $M(t)(\vec{\omega}(t))$ es constante. ■

5.7 Ecuaciones de Euler.

Sea $P(t)$ un movimiento inercial del sólido. Considerese el diagrama:



sea $\vec{\omega}(t)$ el vector rotación asociado a $v(t)$, $m(t) = m(\vec{\omega}(t))$ y $M(t) = \vec{P}(t)(m(t))$.

Por la ley de conservación del momento cinético se tiene: $M'(t) = 0$. Así:

$$0 = (\vec{P}(t)m(t))' = \vec{P}'(t)m(t) + \vec{P}(t)m'(t) = \vec{V}(t)(m(t)) + \vec{P}(t)m'(t)$$

Aplicando a los dos miembros la isometría $\vec{P}^{-1}(t)$ queda:

$$0 = \vec{V}(t)(m(t)) + m'(t) = \vec{\omega}(t) \times m(t) + m'(t)$$

y se tiene así el siguiente resultado:

5.7.1 TEOREMA

Si $P(t)$ es movimiento inercial, y $\vec{\omega}(t)$ es el vector de rotación de $v(t) = P'(t) \circ P(t)^{-1}$, entonces se verifica la identidad:

$$\frac{dm(\vec{\omega}(t))}{dt} = m(\vec{\omega}(t)) \times \vec{\omega}(t) \text{ o más brevemente: } m' = m \times \vec{\omega}$$

5.7.2 COROLARIO: **Ecuaciones de Euler.**

En las hipótesis anteriores, fijado en \mathcal{E} un SR principal $e=(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, y siendo $v(t)=\vec{P}^{-1}(t) \circ P'(t)$, entonces para $\omega_1=\omega_1(t) \dots$ etc la matriz:

$$v(t)_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{u}_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & \omega \end{pmatrix} \begin{cases} v(t)(o) = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \\ \vec{\omega}(t) = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \end{cases}$$

satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \quad (5.7.2)$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 \omega_3 - u_3 \omega_2 \quad \frac{du_2}{dt} = u_3 \omega_1 - u_1 \omega_3 \quad \frac{du_3}{dt} = u_1 \omega_2 - u_2 \omega_1 \quad (5.7.2)'$$

Demostración:

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es una base de autovectores de $m=\tilde{J}$ con autovalores respectivos los momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 . Así:

$$m(\vec{\omega}) = (I_1 \omega_1) \vec{i} + (I_2 \omega_2) \vec{j} + (I_3 \omega_3) \vec{k}$$

El primer grupo de ecuaciones se obtiene como consecuencia de la igualdad $m' = m \times \vec{\omega}$.

El segundo grupo de ecuaciones se obtiene derivando los dos miembros de:

$$\vec{P}(t)u(t) = V(t)(o)$$

Por el teorema de conservación de la velocidad del centro de masas, la derivada del segundo miembro es idénticamente nula, y la del primero:

$$0 = (\vec{P}u)' = \vec{V}(u) + \vec{P}u'. \text{ Aplicando a los dos miembros } \vec{P}^{-1} \text{ queda:}$$

$$0 = \vec{V}(u) + u' = \vec{\omega} \times u + u'. \text{ Por tanto:}$$

$$u' = u \times \vec{\omega}$$

que equivale a las ecuaciones referidas. ■

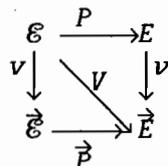
OBSERVACIONES:

a)

Nótese que pueden resolverse primero las ecuaciones (5.7.2) y con los valores $\omega_1(t)$ obtenidos, se resuelven las (5.7.2)'.

En particular si $I_1=I_2=I_3=I$, entonces las ω_1 son funciones constantes, y las ecuaciones (5.7.2)' son lineales.

Si $(P, V) P \in Q, V \in T_P Q$ es un estado del sólido, con $v = V \circ P^{-1}, v = \vec{P}^{-1} \circ V$ es decir:



Sea $e_o = P(o) \in E, \vec{u} = V(o) = v(e_o) \in \vec{E}, \vec{e} = \vec{P}(\vec{i})$ y sean $\vec{\omega}$ y $\vec{\Omega}$ tales que:

$$v(a) = \vec{P}^{-1}(\vec{u}) + \vec{\omega} \times o\vec{a}, \quad v(p) = \vec{u} + \vec{\Omega} \times e_o \vec{p}.$$

Finalmente sea $\mathbf{m}=\mathbf{m}(\vec{\omega})$ y $\mathbf{M}=\vec{P}(\mathbf{m})$ los momentos cinéticos en \mathcal{E} y E respectivamente que corresponden al estado V . Entonces necesariamente es $\vec{\Omega}=\vec{P}(\vec{\omega})$ proporcional a \mathbf{M} , y se tiene:

$$\mathbf{P}(t)=\Phi(t).\mathbf{R}(t) \text{ con } \mathbf{R}(t)=\mathbf{P}_0 \exp(t\vec{\Omega}), \quad \Phi(t):E \ni p \longrightarrow p+tV(o)$$

en donde $\vec{\Omega}$ se ha identificado con el torsor $\vec{\Omega}(p)=\vec{e}_0 \vec{p} \times \vec{\Omega}$ para todo $p \in E$.

b)

Supuesto obtenidas las funciones $\omega_1(t)$ y $u_1(t)$ que satisfacen (5.2.7) y (5.2.7)' bajo condiciones iniciales dadas $\omega_1(0)=\omega_1^0$, $u_1(0)=u_1^0$, la determinación del movimiento $t \longrightarrow \mathbf{P}(t) \in \mathcal{Q}$ se puede hacer ya por integración directa y es necesario conocer aún la posición $\mathbf{P}(0)=\mathbf{P}:\mathcal{E} \longrightarrow E$, que hace el papel de constante de integración. En el apéndice IV damos otro ejemplo de solución explícita de las ecuaciones del movimiento para sólidos con dos momentos principales de inercia coincidentes

c)

Si pensamos que nuestro sólido es una nave espacial tripulada abandonada en el espacio interestelar, las funciones $u_1(t)$ y $\omega_1(t)$ representan respectivamente las coordenadas **medidas en el sistema de referencia de la nave** de los vectores velocidad de traslación (absoluta, es decir, respecto al espacio "inmovil" exterior E) del centro de gravedad, y la velocidad angular (absoluta) de giro instantáneo de la nave a través de un eje que pasa por el centro de gravedad. Con estos datos, y su posición en el instante inicial, nuestro astronauta podría reconstruir su evolución cinemática en el espacio (en reposo absoluto) desde el instante de partida.

APENDICE 0

UNA REFLEXION SOBRE EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT-LAGRANGE

1. INTRODUCCION.

Supongamos que sobre nuestro sistema de partículas se aplica una fuerza $A: TM \rightarrow TR^N$. La fuerza total "real" $R: TM \rightarrow TR^N$ que actúa sobre el sistema, debe ser el resultado de la suma de la fuerza aplicada A , y de cierta fuerza C (denominada *de ligadura*) que "obliga" a que la posición del sistema permanezca en cada instante dentro del espacio de posiciones M , es decir:

$$R=A+C$$

Hay distintas versiones del "principio" de *D'Alambert-Lagrange*, también denominado de *los trabajos virtuales*. Este principio constituye de hecho una definición de lo que en física se entiende por sistemas ideales de partículas, que pueden ser tratados usando el formalismo Lagrangiano.

Es fácil ver que los enunciados de este principio que usualmente aparecen en la literatura son equivalentes al siguiente:

ENUNCIADO 0.

La fuerza de ligadura C es una fuerza de tipo ligadura, es decir:

$$\iota^* C=0$$

De esta forma, se concluye que la fuerza generalizada Q asociada a F coincide con la asociada a la fuerza aplicada A :

$$\iota^* R = \iota^* A = Q: TM \rightarrow T^*M$$

Sin embargo, desde el punto de vista estrictamente matemático, este enunciado adolece de ciertas imprecisiones:

El concepto de "Fuerza total Real" que actúa sobre el sistema, aunque tiene un claro significado físico, no ha sido aun matemáticamente definido.

En consecuencia tampoco queda claro qué es exactamente la "Fuerza de ligadura" que aparece en el Enunciado 0.

La idea que en mi opinión *subyace* detrás del *Principio de D'Alambert* es que las fuerzas F tales que $\iota^* F=0$, no deben tener influencia físicamente apreciable sobre el sistema, y en consecuencia, toda la información sobre su comportamiento "dinámico" puede obtenerse a partir de la fuerza generalizada Q (y naturalmente de su función energía cinética K). Es decir:

ENUNCIADO 1:

Dos sistemas de fuerzas aplicadas A y \bar{A} tales que $\iota^ A = \iota^* \bar{A}$ producen los mismos efectos dinámicos sobre el sistema.*

Entendiendo por tal cosa, que abandonado el sistema en cualquier estado

inicial dado, evoluciona de la misma forma cuando actua A, que cuando actua \bar{A} . Es decir A y \bar{A} inducen las mismas ecuaciones del movimiento.

El Enunciado 1, todavía resulta insatisfactorio, pues estamos "presuponiendo" implícitamente que cada sistema A de fuerzas aplicadas induce una Ley del movimiento definida por un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en el espacio de posiciones M.

Sin embargo nuestro planteamiento pretende ser más básico, en el sentido de que deseamos *deducir* esta "presunción" por aplicación directa de la segunda ley de la dinámica de Newton (particula a particula). Usando **solo** esta idea, podemos establecer el siguiente:

TEOREMA:

Fijado un sistema de fuerzas aplicadas $A:TM \rightarrow T^*\mathbb{R}^N$, existe una única fuerza $C:TM \rightarrow T^*\mathbb{R}^N$ tipo ligadura (es decir $\iota^*C=0$) de forma que la fuerza:

$$F=A+C$$

verifica la siguiente propiedad:

Para cada $(x_0, \dot{x}_0) \in T_{x_0}M$ existe una única curva $x(t)$, con $x(t) \in M$ para $|t| < \epsilon$ que es un F-movimiento con condiciones iniciales (x_0, \dot{x}_0) , es decir:

$$x(0)=x_0, \quad \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = \dot{x}_0^i, \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{F_i}{M_i} \quad i=1, \dots, N$$

NOTA: Denominamos a C fuerza de ligadura teórica asociada a A.

Demostración:

Supuesta la existencia de la fuerza $F=A+C$, uno puede argumentar como en 1.5.1 y 1.5.2 para deducir que si $Q=\iota^*A$, entonces los F-movimientos del sistema satisfacen en coordenadas generalizadas la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \frac{dq^\mu}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = Q^\beta$$

siendo $\Gamma_{\mu\gamma}^\beta$ los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi_Civita de la métrica g en M inducida por la energía cinética K.

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{dq^\alpha}{dt}; \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \frac{d^2q^\beta}{dt^2} = \frac{F_i}{M_i}$$

y sustituyendo queda:

$$\frac{F_i}{M_i} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \left[Q^\beta - \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \frac{dq^\mu}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} \right]$$

que particularizada en $t=0$ con condiciones iniciales (q, \dot{q}) queda

$$F_i = M_i \left\{ \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \left[Q^\beta(q, \dot{q}) - \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \dot{q}^\mu \dot{q}^\gamma \right] \right\} \quad \text{y} \quad F = \Sigma F_i(q, \dot{q}) dx^i$$

Se puede ahora comprobar "a posteriori" recomponiendo los mismos cálculos, que la anterior expresión, proporciona la existencia de F y por tanto de $C=F-A$, verificando las condiciones del teorema.

En vista de este resultado, parece natural establecer la siguiente versión "rigurosa" del *Principio de D'Alambert*:

Enunciado 2:

La fuerza de ligadura teórica C asociada a cada sistema A de fuerzas aplicadas es la fuerza de ligadura real.

En particular la fuerza total real del sistema es $R=A+C$.

Creemos que este es esencialmente el único enunciado *posible* que recoge el espíritu del *Principio de D'Alambert*, y establece el puente que necesitamos para *deducir* de forma *rigurosa* las ecuaciones de Lagrange a partir de las leyes de la dinámica de Newton.

He de decir, que este tipo de reflexiones no es fácil encontrarlas en la literatura. Posiblemente esto es así, porque la gente no siente una gran inquietud por aclarar esta clase de sutilezas (que por otra parte reconozco que no valen para gran cosa).

APENDICE I

PRINCIPIO VARIACIONAL DE HAMILTON.

0. INTRODUCCIÓN.

La función de Lagrange $L=K-V:TM \rightarrow \mathbb{R}$ asociada al sistema holónomo conservativo (M,K,V) determina completamente el movimiento del sistema, por medio de las ecuaciones (locales) de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

y estas ecuaciones no dependen del sistema de coordenadas generalizadas (q^α) que se elija, pues entre otras razones estas ecuaciones locales son equivalentes a las ecuación intrínseca global:

$$\frac{\nabla^2 c}{dt^2} = -\text{grad } V$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a la única métrica riemanniana g en M tal que:

$$g(v,v) = 2K(v) \text{ para todo } v \in TM$$

Sean $p, q \in M$ dos posiciones del sistema y $c: I=[a,b] \ni t \rightarrow c(t) \in M$ es una curva de evolución del sistema, que une p y q , es decir $c(a)=p$, $c(b)=q$.

Se denomina acción de c entre los instantes $t_1=a$, y $t_2=b$ a la magnitud:

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b L(c'(t)) dt$$

Pensemos ahora en el "espacio" Ω de todas las curvas de evolución del sistema que parten de p en $t=a$, y llegan a q en $t=b$. La acción resulta ser ahora una aplicación:

$$\mathcal{L}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

El espacio Ω resulta ser una variedad diferenciable de dimensión infinita, y tiene sentido hablar de los "puntos" $c \in \Omega$ estacionarios de \mathcal{L} (es decir puntos $c \in \Omega$ con $d\mathcal{L}(c)=0$).

El principio variacional de Hamilton establece que los movimientos $\sigma \in \Omega$ del sistema son exactamente los puntos σ de Ω estacionarios para \mathcal{L} .

En la modelización geométrica de la mecánica, a veces se adopta otro punto de vista y se toma la función de Lagrange y este principio de Hamilton como axiomas, para derivar a partir de ellos las ecuaciones de Lagrange.

Podemos establecer el principio variacional de Hamilton a partir de nuestro esquema, con algunos preparativos mínimos que no requieren del uso de la estructura de variedad diferenciable de Ω , aunque sí de la descripción explícita de algunos elementos geométricos derivados de tal estructura.

1.- VARIACIONES DE UNA CURVA: ESPACIO TANGENTE A Ω EN UN PUNTO.

Sea M variedad diferenciable, p, q dos puntos de M , y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Se denota por Ω al conjunto de curvas diferenciables de M parametrizadas en el intervalo $I=[a, b]$. Una variación de una curva $\omega \in \Omega$, en Ω es una aplicación diferenciable:

$$x: I_{\delta} \times I \ni (s, t) \longrightarrow x(s, t) = \lambda_s(t) = \tau_t(s) \in M$$

de forma que $\lambda_0 = \omega$, y $\lambda_s \in \Omega$. Los campos $x_s(s, t) = \tau'_t(s)$ y $x_t(s, t) = \lambda'_s(t)$ son los campos tangentes a lo largo de la aplicación x . La variación x puede interpretarse como una aplicación "diferenciable"

$$\bar{x}: I_{\delta} \ni s \longrightarrow \bar{x}(s) = \lambda_s \in \Omega.$$

El campo $X(t) = \left. \frac{d\bar{x}}{ds} \right|_{s=0}(t) = x_s(0, t)$, $t \in I$ define un campo a lo largo de ω que se denomina campo velocidad inicial de la variación.

Nótese que el campo X es un campo a lo largo de ω que verifica:

$$X(a) = 0, X(b) = 0$$

y representa un "vector tangente" a Ω en ω . El conjunto de tales campos X constituye un espacio vectorial sobre \mathbb{R} que denotamos por $T_{\alpha} \Omega$ y se denomina espacio tangente a Ω en ω .

Siguiendo con la analogía, parece natural la siguiente:

Definición:

Una función $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en ω , si existe una aplicación \mathbb{R} -lineal $dF(\omega): T_{\alpha} \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que:

$$dF(\omega)(X) = \left. \frac{dF(\bar{x}(s))}{ds} \right|_{s=0}$$

siendo $\bar{x}: I_{\delta} \ni s \longrightarrow \bar{x}(s) = \lambda_s \in \Omega$ una variación cualquiera de ω con vector inicial X .

La curva ω se dice estacionaria para F , si F es diferenciable en ω y

$$dF(\omega) = 0$$

El principio variacional de Hamilton enunciado más arriba, cobra ahora un significado preciso. Estableceremos ahora una versión local del mismo:

2.- VERSION LOCAL DEL PRINCIPIO DE HAMILTON.

Sea M variedad diferenciable (espacio de posiciones del sistema) y L función diferenciable $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiana del sistema). Fijemos una carta (U, q) en M , $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$, $p, q \in M$, y sea Ω la familia de curvas diferenciables $\omega: [a, b] \rightarrow U \subseteq M$ que unen p a q . si denotamos como antes

$$\mathcal{L}: \Omega \ni \omega \longrightarrow \int_a^b L(\omega'(t)) dt \in \mathbb{R} \quad (\text{Acción})$$

entonces ω es diferenciable en cada punto $\omega \in \Omega$, además si:

$$q^i(t) = q^i \cdot \omega(t) \quad \text{y} \quad \dot{q}^i(t) = \dot{q}^i \cdot \omega'(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}$$

se verifica: ω es punto estacionario para \mathcal{L} si y solo si se tiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

En particular si L es la lagrangiana $L=K-V$ de un sistema mecánico holónomo conservativo (M,K,V) entonces $\omega \in \Omega$ es estacionario para \mathcal{L} si y solo si ω es un movimiento del sistema.

Demostación:

Fijemos (con las notaciones anteriores) una variación $\bar{x}: I_\delta \rightarrow \Omega$ de una curva $\omega \in \Omega$, y denotemos:

$$q^i(s,t) = q^i \cdot x(s,t) \quad \dot{q}^i(s,t) = \frac{\partial q^i}{\partial t}(s,t) = \dot{q}^i \cdot x_t(s,t), \quad q^i(t) = q^i(0,t) = q^i \cdot \omega(t) \dots \text{etc.}$$

Entonces:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\bar{x}(s)) = \frac{d}{ds} \int_a^b L(x_t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} L(x_t) dt = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \right\} dt$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q^i}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right\} \frac{\partial q^i}{\partial s}, \text{ queda:}$$

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\bar{x}(s)) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \frac{\partial q^i}{\partial s} dt$$

Particularizando ahora en $s=0$, y teniendo en cuenta que si X es el campo inicial de la variación se verifica:

$$X(t) = x_s(0,t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad \text{con } X^i(t) = \frac{\partial q^i}{\partial s}(0,t)$$

tenemos:

$$d\mathcal{L}(\omega)(X) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(x(s)) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] X^i dt$$

Así, si las funciones $q^i(t) = q^i(0,t) = q^i \cdot \omega(t)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

ω es punto estacionario para \mathcal{L} . El recíproco se deduce fácilmente de la arbitrariedad del campo X . ■

3.- VERSION GLOBAL DEL PRINCIPIO DE HAMILTON

Sea (M,K,V) un sistema holónomo conservativo, y Ω el espacio de las curvas de ω evolución del sistema tales que parten de la posición $p \in M$ para $t=a$ y llegan a la posición $q \in M$ en el instante $t=b$.

El principio (GLOBAL) de acción estacionaria de Hamilton establece que los movimientos del sistema en Ω son exactamente los puntos estacionarios de la acción $\mathcal{L}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Para establecer este "Principio" se requieren algunos preparativos:

3.1 Derivadas parciales covariantes a lo largo de una variación.

Un campo A a lo largo de la variación x de $\omega \in \Omega$ es una aplicación diferenciable $A: I_{\delta} \times I \ni (s, t) \rightarrow A(s, t) \in TM$ tal que $A(s, t) \in T_{x(s, t)}M$ para todo s, t .

Denotamos por $\mathcal{X}(x)$ el espacio de dichos campos. Nótese que $x_s, x_t \in \mathcal{X}(x)$.

Supongamos ahora nuestra variedad M investida de una conexión lineal ∇ . Las derivadas parciales covariantes inducidas a lo largo de x son los operadores:

$$\frac{\nabla}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t}: \mathcal{X}(x) \rightarrow \mathcal{X}(x)$$

definidos de forma natural. Así, si $A \in \mathcal{X}(x)$, $\frac{\nabla A}{\partial t}(s, t)$ se interpreta como el valor en t de la derivada covariante (a lo largo de λ_s) de $A|_{\lambda_s} \dots$ etc.

En particular, tiene sentido hablar de:

$$x_{st} = \frac{\nabla x_s}{\partial t}, \quad x_{ts} = \frac{\nabla x_t}{\partial s}$$

Las propiedades que ahora nos interesan vienen resumidas en el siguiente

3.2 Propiedades.

Si la conexión ∇ es simétrica, para toda variación x se verifica:

$$x_{st} = x_{ts}$$

Por otra parte, si ∇ es la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ en M se verifica para $A, B \in \mathcal{X}(M)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A, B \rangle = \langle \frac{\nabla A}{\partial t}, B \rangle + \langle A, \frac{\nabla B}{\partial t} \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial s} \langle A, B \rangle = \langle \frac{\nabla A}{\partial s}, B \rangle + \langle A, \frac{\nabla B}{\partial s} \rangle$$

3.3. Demostración.

En efecto, sea $\omega \in \Omega$, y sea $x: I_{\delta} \times I \rightarrow M$ una variación de ω en Ω . Denotando como antes por $\bar{x}(s) = \lambda_s$ las curvas longitudinales de la variación, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\bar{x}(s)) &= \frac{d}{ds} \int_a^b \frac{1}{2} \langle x_t, x_t \rangle dt - \frac{d}{ds} \int_a^b V(x(s, t)) dt = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \langle x_t, x_t \rangle \right\} dt - \\ &\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} V(x(s, t)) dt = \int_a^b \langle x_t, x_{ts} \rangle dt - \int_a^b dV(x_s(s, t)) dt. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta, por el lema que $x_{ts} = x_{st}$, y particularizando en $s=0$, se deduce que la acción \mathcal{L} es diferenciable en ω , y para X campo inicial de la variación se tiene:

$$d\mathcal{L}(\omega)(X) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(\bar{x}(s)) = \int_a^b \langle \omega', X' \rangle dt - \int_a^b \langle \text{grad } V, X \rangle dt$$

Donde X' denota la derivada covariante de X a lo largo de ω .

Finalmente, como $\langle \omega', X' \rangle = \langle \omega', X \rangle' - \langle \omega'', X \rangle$, queda:

$$d\mathcal{L}(\omega) = - \int_a^b \langle \omega'', X \rangle dt + \int_a^b \langle \text{grad } V, X \rangle dt$$

ya que $\langle \omega'(b), X(b) \rangle - \langle \omega'(a), X(a) \rangle = 0$, pues $X(a) = 0, X(b) = 0$.

De esta forma, si ω es un movimiento del sistema, entonces $\omega'' + \text{grad } V$ es idénticamente nulo, y ω es un punto estacionario para la acción \mathcal{L} .

Recíprocamente, si para cada campo $X \in T_\alpha \Omega$ es $d\mathcal{L}(\omega)(X) = 0$, tomaríamos: $X(t) = f(t)\{\omega'' + \text{grad } V\}$ siendo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva en el intervalo abierto (a, b) , con $f(a) = f(b) = 0$. Como por hipótesis es

$$\int_a^b \langle \omega'' + \text{grad } V, X \rangle dt = \int_a^b f \langle \omega'' + \text{grad } V, \omega'' + \text{grad } V \rangle dt$$

se concluye que $\omega'' + \text{grad } V$ es idénticamente nulo en (a, b) y por tanto en I . ■

La referencia general para esta sección es [4] Cap XIII y XIV

Preliminar: Espacios Euclideos orientados.

P1. Espacios vectoriales euclideos orientados.

Un espacio vectorial euclideo es un espacio vectorial E dotado de una forma cuadrática definida positiva. El producto escalar inducido se denota por $E \times E \ni (u, v) \rightarrow u \cdot v \in \mathbb{R}$, y por $E \ni u \rightarrow |u| = +\sqrt{u \cdot u} \in \mathbb{R}$ la norma inducida.

Si $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n), \varepsilon' = (e'_1, \dots, e'_n)$ son bases ortonormales de E , la matriz de cambio de base P que verifica: $\varepsilon' = \varepsilon P$, satisface la condición:

$$P^t P = I$$

El conjunto de éstas matrices se denota por $O(n)$ y tiene estructura de grupo. $SO(n) = \{P \in O(n) : \det P = 1\}$ constituye un subgrupo.

Las bases ortonormales ε y ε' se dicen que definen la misma orientación si la matriz P de cambio de base pertenece a $SO(n)$. Esta relación es de equivalencia sobre el conjunto \mathcal{B} de las bases ortonormales, y lo descompone en dos clases $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$.

Una orientación en E consiste en elegir como "positiva" una de las componentes anteriores. Se dice entonces que E está orientado.

Cuando $\dim E = 3$, fijada una base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E , se define para $u = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$, $v = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

y se prueba que el resultado no depende de la base ortonormal positiva tomada.

Se suponen conocidas las propiedades clásicas del producto vectorial.

P2 Espacios afines euclideos orientados.

Un espacio afín euclideo orientado es un espacio afín E , cuya dirección \vec{E} es un espacio vectorial euclideo orientado.

Si $a, b \in E$, denotaremos por $\vec{ab} \in \vec{E}$ al vector "libre" definido por a y b , y llamaremos $d(a, b) = |\vec{ab}|$.

Llamaremos sistema de referencia euclideo (SR) a $\varepsilon = (e_0, \vec{\varepsilon})$ donde $e_0 \in E$, y $\vec{\varepsilon} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ es una base ortonormal positiva de \vec{E} .

Si ε y ε' son SR en E existe una matriz P con $\varepsilon' = \varepsilon P$ de la forma:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \vec{p} & \vec{p} \end{array} \right) \text{ con } \vec{p} \in SO(n), \text{ y se denomina matriz de cambio de referencia.}$$

El conjunto de matrices P verificando la propiedad anterior, tiene estructura de grupo, que se denota por $SE(n)$.

P3. Modelos analíticos.

El modelo analítico con dimensión n de espacio afín euclideo orientado

que usaremos en estas notas es el siguiente:

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} : a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_n \right\} \quad \vec{\mathcal{E}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_n \right\} \quad \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \end{pmatrix}$$

El producto escalar y la orientación en $\vec{\mathcal{E}}_n$ se obtienen al identificarlo con el modelo analítico habitual de espacio vectorial euclideo orientado

$$\mathbb{E}_n = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n.$$

1.1 Transformaciones ortogonales.

El lo que sigue \mathbb{E} y \mathbb{E}' \mathbb{E}'' ... etc. son espacios vectoriales euclideos orientados con dimensión igual a $n \geq 1$.

Una biyección $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se dice isometría si preserva el producto escalar. Se prueba entonces que f es isomorfismo lineal. De hecho, si ε y ε' son BO en \mathbb{E} y \mathbb{E}' , entonces la matriz A tal que $f(\varepsilon) = \varepsilon' A$ verifica $A^t A = I$ y $A \in O(n)$. Se denomina a A representación matricial de f y escribimos $A = M_{\varepsilon \varepsilon'}(f)$

Se dice que la isometría $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ preserva la orientación (o es isometría directa), si transforma una (toda) base ortonormal positiva de \mathbb{E} en una base ortonormal positiva de \mathbb{E}' . Esto equivale a decir que $M_{\varepsilon \varepsilon'}(f) \in SO(n)$ para ε , y ε' bases ortonormales positivas.

Una isometría f de \mathbb{E} (en sí mismo) se denomina transformación ortogonal.

Denotamos por $O(\mathbb{E})$ al grupo de transformaciones ortogonales de \mathbb{E} , y por $SO(\mathbb{E})$ al subgrupo de transformaciones ortogonales directas.

Fijada una BO+ ε en \mathbb{E} , la aplicación $M_{\varepsilon \varepsilon} = M_{\varepsilon \varepsilon}$ establece isomorfismos:

$$M_{\varepsilon} : O(\mathbb{E}) \ni f \rightarrow f_{\varepsilon} \in O(n) \quad \text{y} \quad M_{\varepsilon} : SO(\mathbb{E}) \rightarrow SO(n)$$

Existe una identificación natural entre $O(\mathbb{E}_n)$ y $O(n)$.

PROPOSICION:

Sean ε y ε' bases ortonormales positivas de \mathbb{E} . Así $\varepsilon' = \varepsilon P$ con $P \in SO(n)$. Si $f \in O(\mathbb{E})$ y $M_{\varepsilon}(f) = A$, entonces $M_{\varepsilon'}(f) = P^{-1} A P$. ■

1.2 Isometrías y Movimientos euclideos directos. Clasificación.

En lo sucesivo \mathbb{E} , \mathbb{E}' ...etc serán espacios afines euclideos orientados de dimensión n con direcciones los espacios vectoriales euclideos orientados $\vec{\mathbb{E}}$, $\vec{\mathbb{E}}'$...etc.

Si $o \in \mathbb{E}$ denotamos $\nabla_o : \mathbb{E} \ni a \rightarrow \vec{oa} \in \vec{\mathbb{E}}$ que es biyectiva.

A partir de una aplicación $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ y un punto $o \in \mathbb{E}$ puede construirse la aplicación $f_o : \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}'$ que hace conmutativo el diagrama ($o' = f(o)$).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \nabla_o \downarrow & & \downarrow \nabla_{o'} \\ \vec{E} & \xrightarrow{f_o} & \vec{E}' \end{array}$$

La aplicación f es afín cuando f_o es lineal, y en este caso $f_o = f_o$ para todo $o, \bar{o} \in E$. Se denota $\vec{f} = f_o$ y se denomina a \vec{f} aplicación lineal asociada a f .

Nótese que \vec{f} viene definida sin ambigüedad por:

$$\vec{f}: E \ni \vec{a} \vec{b} \rightarrow \vec{f}(\vec{a}) \vec{f}(\vec{b}) \in \vec{E}'$$

DEFINICION:

Una aplicación afín $f: E \rightarrow E'$ se llama isometría (directa), si $\vec{f}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ es isometría directa.

Si $\varepsilon = (e_o, \vec{\varepsilon})$ y $\varepsilon' = (e'_o, \vec{\varepsilon}')$ son SR+ en E y E' respectivamente, denotando $f(\varepsilon) = (f(e_o), \vec{f}(\vec{\varepsilon}))$ se tendrá $f(\varepsilon) = \varepsilon' A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \text{ con } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ y } \vec{A} = (a_{ij}) = M_{\vec{\varepsilon}}^{\vec{\varepsilon}'}, (\vec{f}) \in O(n)$$

Se denomina a A representación matricial de f y escribimos $A = M_{\varepsilon \varepsilon'}(f)$.

Las matrices A ($\det \vec{A} = 1$) del tipo anterior se denominan matrices afines euclídeas, y constituyen un grupo denotado por $E(n)$.

Una isometría f de E (en sí mismo) se denomina movimiento. Denotamos por $E(E)$ al grupo de movimientos de E , y por $SE(E)$ al subgrupo de movimientos directos.

Fijado ε SR en E , la aplicación $M_{\varepsilon} = M_{\varepsilon \varepsilon}$ establece isomorfismos:

$$M_{\varepsilon}: E(E) \ni f \rightarrow f_{\varepsilon} \in E(n) \text{ y } M_{\varepsilon}: SE(E) \rightarrow SE(n)$$

Existe una identificación natural entre $E(E)$ y $E(n)$.

PROPOSICION:

Sean ε y ε' SR de E . Así $\varepsilon' = \varepsilon P$ con $P \in SE(n)$. Si $f \in E(E)$ y $M_{\varepsilon'}(f) = A$, entonces $M_{\varepsilon}(f) = P^{-1} A P$. ■

DEFINICION:

Si $f, f' \in E(E)$, se dicen equivalentes, ($f \approx f'$) si existen $\varepsilon, \varepsilon'$ SR+ en E tales que $M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$.

La condición $f \approx f'$ equivale a la existencia de $g \in SE(E)$ tal que $f' = g \circ f \circ g^{-1}$.

TEOREMA:

Sea f un movimiento de E :

Existen entonces $\mu \geq 0$, r, s enteros no negativos, y $-\pi < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p < \pi$ (unívocamente determinados por f) y un SR+ ε de E tal que la matriz $J = M_{\varepsilon}(f)$ es de la forma:

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \mu & 1 & \\ \hline & & J_1 \end{array} \right) \text{ con } J_1 = \text{DIAG}(I_r, -I_s, G(\vartheta_1), \dots, G(\vartheta_p)) \text{ si } \mu > 0$$

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \vec{J} \end{array} \right) \text{ con } \vec{J} = \text{DIAG}(I_r, -I_s, G(\vartheta_1), \dots, G(\vartheta_p)) \text{ si } \mu = 0$$

Se denomina a $\mu = \mu(f)$ módulo de desplazamiento de f .

Por otra parte, r , s , μ y la sucesión $\vartheta_1 \leq \dots \leq \vartheta_p$ determinan un sistema completo de invariantes.

En particular si $f, f' \in E(E)$, es $f \approx f'$ si y solo si $\mu(f) = \mu(f')$ y \vec{f} y \vec{f}' tienen el mismo polinomio característico. ■

NOTA:

Desde el punto de vista geométrico, el módulo de deslizamiento $\mu = \mu(f)$ de un movimiento $f \in E(E)$ viene definido por:

$$\mu(f) = \text{MIN}\{|\overline{af(a)}| : a \in E\}$$

así $\mu(f) = 0$ equivale a que f tiene puntos fijos.

En la práctica, si f no tiene puntos fijos, entonces $\mu(f) = |v|$ siendo $v \in \vec{E}$ el único vector que verifica la propiedad (para τ_v traslación de vector v):

$$f \circ \tau_v = \tau_v \circ f \text{ es un movimiento con puntos fijos.}$$

dicho vector hay que buscarlo en $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id})$.

1.3 Especialización en dimensión tres.

Supondremos en lo que sigue que E es un espacio afín euclídeo tridimensional orientado.

El anterior teorema de clasificación aplicado a este caso, nos proporciona la siguiente representación matricial reducida para $f \in SE(E)$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ 0 & 0 & \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad -\pi < \vartheta \leq \pi, \mu \geq 0$$

respecto a cierto SR $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Si $\mu = 0$ denomina a f giro de eje $\Omega = e_0 + \langle \vec{e}_1 \rangle$ (orientado por \vec{e}_1) y ángulo ϑ . Lo denotamos $G(\Omega, \vartheta)$.

Si $\mu > 0$ y $\vartheta \neq 0$, se denomina a f movimiento helicoidal. Tomando $v = \mu \vec{e}_1$ se ve que:

$$f = \tau_v \circ G(\Omega, \vartheta) = G(\Omega, \vartheta) \circ \tau_v$$

v es el vector de deslizamiento.

Si $\vartheta = 0$, entonces f es una traslación.

APENDICE III
TEORIA DE TORSORES

En lo que sigue, E es un espacio afín tridimensional euclídeo orientado con dirección \vec{E} . El producto $u.v$, representará el producto escalar de los vectores $u, v \in \vec{E}$

DEFINICION 1: Torsores

Un torsor en E, es una aplicación afín $V: E \rightarrow \vec{E}$ tal que su aplicación lineal asociada $\vec{V}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ es hemisimétrica, es decir:

$$\vec{V}(u).v + u.\vec{V}(v) = 0$$

PROPOSICION 2: Algebra de Lie de los torsores.

El conjunto $\mathcal{T}(E)$ de todos los torsores de E tiene estructura natural de álgebra de Lie.

Demostración:

La suma de torsores, y el producto de un escalar por un torsor, se definen de forma natural.

Si V, W son torsores, entonces se prueba que:

$$[V, W] = \vec{V} \circ W - \vec{W} \circ V$$

es un torsor, y define un corchete de Lie. ■

PROPOSICION 3: Vector $\vec{\omega}$ asociado a un torsor.

Si $V \in \mathcal{T}(E)$, existe un único vector $\vec{\omega} \in \vec{E}$ tal que se verifica:

$$V(p) = V(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}$$

para todo $o, p \in E$.

Demostración:

Fijamos $\vec{e} = (e_1^{\rightarrow}, e_2^{\rightarrow}, e_3^{\rightarrow})$ un SR en \vec{E} . Se tiene:

$$\vec{V}(e_i^{\rightarrow}) = (\vec{V}(e_1^{\rightarrow}).e_1^{\rightarrow})e_1^{\rightarrow} + (\vec{V}(e_1^{\rightarrow}).e_2^{\rightarrow})e_2^{\rightarrow} + (\vec{V}(e_1^{\rightarrow}).e_3^{\rightarrow})e_3^{\rightarrow}$$

Por tanto, la matriz de \vec{V} respecto a \vec{e} será de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando $\vec{\omega} = \omega_1 e_1^{\rightarrow} + \omega_2 e_2^{\rightarrow} + \omega_3 e_3^{\rightarrow}$ se comprueba mediante un simple cálculo que si $u = u_1 e_1^{\rightarrow} + u_2 e_2^{\rightarrow} + u_3 e_3^{\rightarrow}$ se tiene la identidad:

$$\vec{V}(u) = (e_1^{\rightarrow}, e_2^{\rightarrow}, e_3^{\rightarrow}) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1^{\rightarrow} & e_2^{\rightarrow} & e_3^{\rightarrow} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times u$$

Evidentemente el vector $\vec{\omega}$ es único verificando tal propiedad, y se tiene para $o, p \in E$: $V(p) = V(o) + \vec{V}(\vec{op}) = V(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}$. ■

PROPOSICION 5: Eje central Ω y módulo de deslizamiento λ .

Dado un torsor $V \in \mathcal{T}or(E)$ con vector $\vec{\omega} \neq 0$, entonces el conjunto Ω de puntos $a \in E$ tales que $V(a)$ es proporcional a $\vec{\omega}$ constituye una recta afín de E con dirección $\langle \vec{\omega} \rangle$ que se denomina eje central del torsor.

Por otra parte, existe un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \Omega$ se tiene:

$$V(a) = \alpha \vec{\omega}$$

y la expresión de V , cuando se toma $a \in \Omega$ como punto de referencia es:

$$V(p) = \alpha \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{ap}$$

Se denomina a $\lambda = \alpha |\vec{\omega}|$ módulo de deslizamiento.

Demostración:

Si $\Omega \neq \emptyset$, veamos que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $V(a) = \alpha \vec{\omega}$ para todo $a \in \Omega$. En efecto, si $a, b \in \Omega$ y $V(a) = \alpha \vec{\omega}$, $V(b) = \beta \vec{\omega}$, entonces $\vec{V}(\vec{ab}) = (\beta - \alpha) \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{ab}$. Así $\alpha = \beta$.

Por otra parte, (si $\Omega \neq \emptyset$) esto prueba que Ω es necesariamente una recta afín con dirección $\langle \vec{\omega} \rangle$, ya que si $a, b \in \Omega$:

$$\vec{V}(\vec{ab}) = V(b) - V(a) = \alpha \vec{\omega} - \alpha \vec{\omega} = 0 = \vec{\omega} \times \vec{ab}$$

Luego \vec{ab} es proporcional a $\vec{\omega}$. Recíprocamente, si $a \in \Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$ entonces $a + \mu \vec{\omega} \in \Omega$.

Probemos finalmente que $\Omega \neq \emptyset$:

Fijado un punto $o \in E$ de referencia, buscamos un punto $a \in E$ tal que $V(a) = V(o) + \vec{\omega} \times \vec{oa} = \alpha \vec{\omega}$ para algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\vec{oa} \times \vec{\omega} = V(o) - \alpha \vec{\omega}$$

Usando la fórmula $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$ queda:

$$(\vec{\omega} \times V(o)) \times \vec{\omega} = |\vec{\omega}|^2 V(o) - (\vec{\omega} \cdot V(o)) \vec{\omega}$$

que puede escribirse en la forma:

$$\left(\frac{1}{|\omega|^2} (\vec{\omega} \times V(o)) \right) \times \vec{\omega} = V(o) - \left(\frac{\vec{\omega} \cdot V(o)}{|\omega|^2} \right) \vec{\omega}$$

De donde se deduce: $\vec{oa} = \frac{1}{|\omega|^2} (\vec{\omega} \times V(o))$ y $\alpha = \frac{\vec{\omega} \cdot V(o)}{|\omega|^2}$. ■

Dado un torsor $V \in \mathcal{T}or(E)$ y $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un SR en E , llamamos representación matricial de V respecto a ε a la matriz:

$$V_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} V(e_0) = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \\ \vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \end{array}$$

Las ecuaciones de V en las coordenadas (x_i) inducidas por ε serán:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

COROLARIO 6: Expresión matricial reducida.

Dado un torsor $V \in \mathcal{T}or(E)$, existe un SR $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en E de forma que la representación matricial V_ε de V respecto a ε es:

$$V_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \end{array} \right)$$

Demostración:

Tómese $e_0 \in \Omega$ eje central \vec{e}_1 unitario en la dirección de $\vec{\omega}$. ■

PROPOSICION 7:

Supongase \mathcal{E} otro espacio afin euclideo orientado, y $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow E$ una isometría. Si V es un torsor de E con vector $\vec{\omega}$, parámetro λ , y eje central Ω , entonces $\Phi^{-1} \circ V \circ \Phi$ es un torsor en \mathcal{E} con vector $\Phi^{-1}(\vec{\omega})$ eje $\Phi^{-1}(\Omega)$ y parámetro λ .

APENDICE IV

EL GRUPO DE LIE DE LOS MOVIMIENTOS DIRECTOS

Parametrización exponencial:

Si $V \in \mathcal{T}or(E)$, entonces $V: E \rightarrow \vec{E}$. Se define $V^0 = id_E$, $V^1 = V$, y por inducción para $k > 1$ $V^k = \vec{V}^{k-1} \circ V$. Nótese que $V^k: E \rightarrow \vec{E}$ es una aplicación afín que no tiene porqué ser torsor. Considérese la serie:

$$T = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} V^k \quad (3.1.1)$$

y nótese que de ser convergente, definiría un endomorfismo afín de E.

PROPOSICION 1:

La serie anterior define un elemento T de SE(E) que denotamos por exp(V).

Demostración:

Fijado $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ SR en E, V admite una representación matricial de la forma: $V_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & S \end{pmatrix}$, donde S es una matriz cuadrada de orden tres hemisimétrica. Es decir $S+S^t=0$. Es claro que la convergencia de (3.1.1) depende de la

convergencia de la serie: $\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} (V_\varepsilon)^k$ pero:

$$(V_\varepsilon)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (V_\varepsilon)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & S \end{pmatrix}, \quad (V_\varepsilon)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & u & S^2 \end{pmatrix}, \dots, \quad (V_\varepsilon)^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^k & u & S^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Denotando por $e^S = \exp(S) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} S^k$, se tiene entonces que la matriz T_ε es de la forma $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & e^S \end{pmatrix}$, y para ver que T es movimiento, es suficiente ver que e^S es matriz ortogonal. Como las matrices S y S^t conmutan, se tiene: $e^S (e^S)^t = e^S e^{(S^t)} = e^{S+S^t} = e^0 = I$.

Por otra parte, $\det(e^S) = e^{\text{tr}(S)} = e^0 = 1$, por lo que T es movimiento directo. ■

Analícemos ahora el significado geométrico de la aplicación exponencial:

PROPOSICION 2

Si $V \in \mathcal{T}or(E)$ es un torsor de vector $\vec{\omega}$, eje central Ω , y módulo de deslizamiento λ , entonces $T = \exp(V)$, es un movimiento helicoidal de eje Ω (orientado por $\vec{\omega}$), ángulo $|\vec{\omega}|$, y vector de deslizamiento $\lambda \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$.

Demostración:

Tómese un SR ε en E, de forma que la matriz V_ε sea de la forma:

$$V_{\varepsilon} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \end{array} \right), \text{ así se tiene: } \exp(V_{\varepsilon}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos \omega_1 & -\text{sen } \omega_1 \\ 0 & 0 & \text{sen } \omega_1 & \cos \omega_1 \end{array} \right)$$

Denotando por $\mathcal{C}(\pi)$ al conjunto de torsores de E cuyo vector asociado $\vec{\omega}$, verifica $|\vec{\omega}| < \pi$, se demuestra el siguiente

TEOREMA:

La aplicación $\exp: \mathcal{T}or(E) \rightarrow SE(E)$ es suprayectiva, e induce un difeomorfismo de $\mathcal{C}(\pi)$ sobre el complementario de las simetrías respecto a rectas.

3.2 Una nota sobre el espacio tangente.

Sea A un espacio afín de dimensión m , con dirección \vec{A} . Si $\gamma: (a, b) \rightarrow A$ es una curva diferenciable, entonces para $\tau \in (a, b)$, $\overline{\gamma(t)\gamma(\tau)} \in \vec{A}$, y se define:

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=\tau} = \gamma'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\overline{\gamma(t)\gamma(\tau)}}{t-\tau} \in \vec{A}$$

se denomina a $\gamma'(\tau)$ vector tangente a la curva γ en $t=\tau$. Cuando $\tau=0$, se dice que γ es una curva por $p=\gamma(0) \in A$ que define el vector tangente $\gamma'(0)$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , regularmente inmersa en A . Fijado $p \in M$, el espacio $T_p M$ tangente a M en p , se puede interpretar como el conjunto de todos los vectores $\gamma'(0)$, cuando γ es una curva por p contenida en M . Así $T_p M$ puede considerarse un subespacio vectorial de \vec{A} con dimensión n . Si M y N son dos variedades, y $f: M \rightarrow N$ es aplicación diferenciable, entonces para cada $p \in M$, la aplicación $df(p)$, diferencial de f en p , es una aplicación lineal de $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, que puede definirse de la siguiente forma:

$$df(p)(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0)$$

para toda curva γ por p .

3.3 Algebra de Lie del grupo de movimientos directos.

Sea E espacio afín euclideo orientado. Estamos interesados en conocer cual es el carácter geométrico de los elementos del espacio tangente $T_1 G$ en la identidad 1 del grupo de Lie $G=SE(E)$ de los movimientos directos de E .

El conjunto A de endomorfismos afines de E , tiene estructura de espacio afín sobre el espacio vectorial \vec{A} de las aplicaciones afines de E en \vec{E} . Esta estructura viene definida por la igualdad:

$$\overline{f\vec{g}(p)} = \overline{f(p)g(p)} \quad \text{para todo } f, g \in A, \text{ y todo } p \in E$$

Como $G=SE(E)$ es una subvariedad de A , es de esperar que los elementos de $T_1 G$ se puedan representar como aplicaciones afines de E en \vec{E} :

TEOREMA: $T_1 G = \mathcal{T}or(E)$.

Demostración:

Si $V \in \mathcal{T}or(E)$, entonces la curva $\gamma: \mathbb{R} \ni t \rightarrow e^{tV} \in G$ es diferenciable, y $\gamma(0)=1$.

Además, $\gamma'(\tau) = V_0 e^{\tau V}$ y en particular $\gamma'(0) = V_0 e^0 = V_0 \mathbf{1} = V \in T_1 G$. Así $\mathcal{T}or(E) \subseteq T_1 G$.

Recíprocamente, sea $g: (-\delta, \delta) \ni t \rightarrow g_t \in G$ curva diferenciable con $g_0 = \mathbf{1}$, y sea $V = \left. \frac{dg_t}{dt} \right|_{t=0} = g'(0): E \rightarrow \vec{E}$. Si $\vec{g}_t: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ es la lineal asociada a g_t , se tiene: $\vec{V} = \left. \frac{d\vec{g}_t}{dt} \right|_{t=0}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$. Veamos que \vec{V} es hemisimétrica. En efecto: si $u, v \in \vec{E}$, la aplicación $(-\delta, \delta) \ni t \rightarrow (\vec{g}_t u) \cdot (\vec{g}_t v) \in \mathbb{R}$ es constante. Calculando su derivada en $t=0$ queda:

$$0 = \left(\left. \frac{d(g_t u)}{dt} \right|_{t=0} \right) \cdot (\vec{g}_0 v) + (\vec{g}_0 u) \cdot \left(\left. \frac{d(g_t v)}{dt} \right|_{t=0} \right) = \vec{V}(u) \cdot v + u \cdot \vec{V}(v) \quad \blacksquare$$

TEOREMA:

Si $V, W \in \mathcal{T}or(E)$, entonces $\vec{V}_0 W - W_0 \vec{V} \in \mathcal{T}or(E)$, y la aplicación:

$$\mathcal{T}or(E) \times \mathcal{T}or(E) \ni (V, W) \rightarrow \vec{V}_0 W - W_0 \vec{V} \in \mathcal{T}or(E)$$

define en $\mathcal{T}or(E)$ una estructura de álgebra de Lie.

Por otra parte, esta estructura coincide con la definida por G , cuando se considera a $\mathcal{T}or(E)$ espacio tangente a G en $\mathbf{1}$, y $\exp(V) = e^V$ para toda $V \in \mathcal{T}or(E)$.

Daremos una descripción explícita de este álgebra de Lie $\mathcal{T}or(E)$ usando un sistema estandar de generadores:

Si $e = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es un SR de E , construimos (I, J, K, i, j, k) base de $\mathcal{T}or(E)$, de la siguiente forma: (se identifica $V \in \mathcal{T}or(E)$ con su matriz respecto a e)

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obteniéndose la siguiente tabla para el corchete: (el primer factor, es el horizontal)

	i	j	k	I	J	K
i	0	2k	-2j	0	2K	-2J
j	-2k	0	2i	-2K	0	2I
k	2j	-2i	0	2J	-2I	0
I	0	2K	-2J	0	0	0
J	-2K	0	2I	0	0	0
K	2J	-2I	0	0	0	0

A partir de aquí se pueden obtener todas las subálgebras de \mathfrak{g} salvo isomorfismos:

$$\{0\}, \langle i \rangle, \langle I \rangle, \langle i, I \rangle, \langle I, J \rangle, \langle i, j, k \rangle, \langle i, J, K \rangle, \langle i, I, J, K \rangle, \mathfrak{g}$$

que se corresponden con los subgrupos continuos de $SE(E)$.

APENDICE V
DESCRIPCION DE POISSON DEL MOVIMIENTO INERCIAL
DE UN SOLIDO RIGIDO

INTRODUCCION

Sea (\mathcal{E}, ρ) un sólido rígido y sea \mathfrak{J} el tensor de inercia.

Se denomina elipsoide de inercia θ al conjunto de puntos $a \in \mathcal{E}$ tales que $\mathfrak{J}(\vec{oa}, \vec{oa}) = 1$. Respecto a las coordenadas principales tiene por ecuación:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$

Si $a \in \theta$ entonces el momento de inercia respecto al eje oa definido por o y a se escribe $I(oa) = \frac{\mathfrak{J}(\vec{oa}, \vec{oa})}{\langle \vec{oa}, \vec{oa} \rangle}$. Así $|\vec{oa}| = \frac{1}{\sqrt{I(oa)}}$.

El elipsoide de inercia, junto con la masa total caracterizan, como hemos visto, las ecuaciones del movimiento, y por tanto las propiedades dinámicas del sólido. Nos proponemos en este epígrafe dar una descripción geométrica cualitativa, siguiendo a Poisson, del movimiento inercial del sólido, a través del movimiento de su elipsoide de inercia. Los resultados de geometría lineal necesarios para este estudio, pueden esquematizarse en dos lemas. El primero de ellos describe el significado geométrico de la aplicación momento $m: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ en función del elipsoide de inercia, el segundo describe una propiedad geométrica de los elipsoides de revolución.

LEMA 1

Sea \mathcal{E} un espacio afin euclídeo y $m: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una transformación lineal simétrica, es decir: $\mathfrak{J}(\vec{v}, \vec{w}) = \langle m(\vec{v}), \vec{w} \rangle$ es una forma bilineal simétrica. Supóngase que \mathfrak{J} es definida positiva, sea $o \in \mathcal{E}$ y sea θ el elipsoide:

$$\theta = \{a \in \mathcal{E} : \langle m(\vec{oa}), \vec{oa} \rangle = 1\}$$

Entonces, el plano $\pi(a)$ tangente a θ en el punto $a \in \theta$, tiene a $m(\vec{oa})$ por vector normal, y su distancia al origen es exactamente: $d(o, \pi(a)) = \frac{1}{|m(\vec{oa})|}$. ■

LEMA 2

En las mismas condiciones del lema denotamos por $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base ortonormal positiva respecto a la cual se tiene:

$$m(\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}) = (\omega_1 I_1) \vec{i} + (\omega_2 I_2) \vec{j} + (\omega_3 I_3) \vec{k}$$

Supóngase que θ es elipsoide de revolución pero no esférico es decir:

$$I_1 \neq I_2 = I_3 = I$$

Entonces:

1) Para todo $\vec{\omega} \in \mathcal{E}$ los vectores $(\vec{\omega}, m(\vec{\omega}), \vec{i})$ son coplanarios. es decir: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{pm} + \vec{\omega}_{pi}$, para ciertos vectores $\vec{\omega}_{pm}$ y $\vec{\omega}_{pi}$ proporcionales a $m(\vec{\omega})$ y \vec{i} respec-

tivamente. Además $|\vec{\omega}_{pm}| = \frac{|m(\vec{\omega})|}{I}$

2) Si $\delta > 0$, denotamos por $C(\delta)$ a una componente conexa del conjunto:

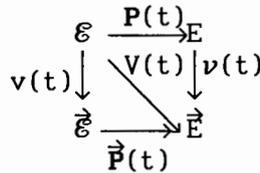
$$\{x \in \theta: d(o, \pi(x)) = \delta\}$$

supóngase que $a \in C(\delta)$. Entonces $C(\delta)$ es la intersección del plano $\sigma(a)$ que pasa por el punto a y es ortogonal al vector \vec{i} , con θ . En particular se verifica:

$$|(\vec{o}\vec{x})_{pm}| = |(\vec{o}\vec{a})_{pm}|, |(\vec{o}\vec{x})_{pi}| = |(\vec{o}\vec{a})_{pi}|, |\vec{o}\vec{x}| = |\vec{o}\vec{a}| \text{ para todo } x \in C(\delta)$$

■

Sea $P(t)$ un movimiento inercial del sólido. Considerese el diagrama:



sea $\vec{\omega}(t)$ el vector rotación asociado a $v(t)$, $m(t) = m(\vec{\omega}(t))$ y $M(t) = \vec{P}(t)(m(t))$.

Por 5.6.5, es $M(t) = M \in E$ un vector constante que supondremos no nulo. Como $\vec{P}(t)$ es un isometría lineal se concluye que $|m(t)| = |M| = \text{cte} > 0$.

Si $u(t) = V(o)(t)$ es la velocidad del centro de gravedad, por 5.6.4 es $u(t) = u \in \vec{E}$ un vector constante.

Finalmente por 5.6.1 la energía $2W(V(t)) = m|u|^2 + \langle m(\vec{\omega}(t)), \vec{\omega}(t) \rangle$ también permanece constante.

En consecuencia la magnitud $\rho > 0$ con $\rho^2 = \langle m(\vec{\omega}(t)), \vec{\omega}(t) \rangle$ es otra constante del movimiento.

Sea a_t el punto de θ obtenido de la forma $\vec{o}a_t = \lambda \vec{\omega}$ para cierto $\lambda > 0$. Explícitamente el valor de λ viene dado por la condición:

$$\lambda^2 = \langle m(\vec{\omega}(t)), \vec{\omega}(t) \rangle^{-1} = \frac{1}{\rho^2} \text{ es decir, } \lambda = \frac{1}{\rho}$$

Sea $\pi_t = \pi(a_t)$ el plano tangente a θ en a_t . Por el lema 1 se sabe que:

$$d(o, \pi_t) = \frac{1}{|m(\vec{o}\vec{a})|} = \frac{1}{|m(\lambda \vec{\omega})|} = \frac{1}{\lambda |m(\vec{\omega})|} = \frac{1}{\lambda |M|} = \frac{\rho}{|M|}$$

que es otra constante del movimiento geoméricamente significativa.

Denotando por:

$$O(t) = P(t)(o) = e_0 + tu, A(t) = P(t)(a_t), \Pi_t = P(t)(\pi_t), \Theta_t = P(t)(\theta), \vec{\Omega}(t) = \vec{P}(t)(\vec{\omega}(t))$$

y teniendo en cuenta que $P(t): E \rightarrow E$ es una isometría lineal, se concluye que todos los planos Π_t son paralelos y ortogonales a la dirección constante $M \in \vec{E}$. Además la distancia de Π_t a $O(t)$ permanece constante de esta forma el plano $\Pi(t)$ se desplaza paralelamente con velocidad constante u es decir:

$$\Pi(t) = \Pi(0) + tu$$

y se tiene así el siguiente resultado:

TEOREMA 3

Si $P(t)$ es un movimiento inercial del sólido, conservando notaciones anteriores, y supuesto $M \neq 0$, existe una constante $\rho > 0$ y un plano afín Π_0 (ortogo-

nal a \mathbf{M}) en E de forma que la familia de planos

$$\Pi(t) = \Pi_0 + tu$$

verifican las siguientes propiedades para cada t :

1) $\Pi(t)$ es tangente al elipsoide Θ_t en un punto $A(t)$ que determina con $O(t)$ el eje instantaneo de giro $\Omega(t)$.

2) $\vec{\Omega}(t) = \rho^{-1} \overrightarrow{O(t)A(t)}$ es el vector velocidad angular instantánea.

Explícitamente, ρ es la raíz cuadrada positiva del duplo de la energía cinética de rotación, y Π_0 es un plano ortogonal a \mathbf{M} que dista de $O(0)$, $\frac{\rho}{|\mathbf{M}|}$ ■

Imaginemos ahora que el elipsoide de inercia es de revolución. Esto significa que si $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es un sistema de referencia principal se tiene:

$$m(\vec{i}) = I_1 \vec{i}, \quad m(\vec{j}) = I_2 \vec{j}, \quad m(\vec{k}) = I_3 \vec{k}, \quad \text{y se supone } I_2 = I_3$$

$d(o, \pi(a_t)) = \frac{\rho}{|\mathbf{M}|} = \delta$ es constante, entonces usando el lema 2 el punto a_t se encuentra en $C(\delta)$ y los valores

$$|\vec{o}a_t| \quad |(\vec{o}a_t)_{pm}| \quad |(\vec{o}a_t)_{pi}|$$

permanecen constantes en el movimiento. En particular como $\vec{\omega}(t) = \rho a_t$,

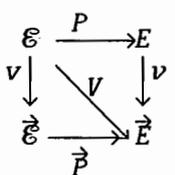
$$\omega = |\vec{\omega}(t)|, \quad \frac{|\mathbf{M}|}{I} = \omega_{pm} = |\vec{\omega}(t)_{pm}|, \quad \omega_{pi} = |\vec{\omega}(t)_{pi}|$$

son constantes del movimiento con claro significado físico. Pasando al espacio en reposo se observa entonces que $\vec{P}(t)(\vec{\omega}(t)) = \vec{\Omega}(t)$ se descompone en:

$\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}_{pm}(t) + \vec{\Omega}_{pi}(t)$ con $\vec{\Omega}_{pm}(t) = P(t)(\vec{\omega}(t)_{pm})$ $\vec{\Omega}_{pi}(t) = P(t)(\vec{\omega}(t)_{pi})$ componentes en la dirección de \mathbf{M} y $e(t) = P(t)(\vec{i})$ con módulos constantes $\omega_{pm} = \frac{|\mathbf{M}|}{I}$ y ω_{pi} respectivamente. Como \mathbf{M} es un vector constante, se concluye que también lo es el vector $\vec{\Omega}_{pm}(t) = \vec{\Omega}_{pm}$ que lo denominamos velocidad de precesión. podemos reformular estos resultados de la siguiente forma:

TEOREMA 4

Sea $(P, V) P \in Q, V \in T_p Q$ un estado del sólido, $v = V \circ P^{-1}$, $v = \vec{P}^{-1} \circ V$ es decir:



Sea $e_0 = P(o) \in E$, $V(o) = v(e_0) \in \vec{E}$, $\vec{e} = \vec{P}(\vec{i})$ y sean $\vec{\omega}$ y $\vec{\Omega}$ tales que:

$$v(a) = \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{o}a, \quad v(p) = V(o) + \vec{\Omega} \times \vec{e}_0 p.$$

Finalmente sea $m = m(\vec{\omega})$ y $\mathbf{M} = \vec{P}(m)$ los momentos cinéticos en \mathcal{E} y E respectivamente que corresponden al estado V .

Supóngase $\mathbf{M} \neq 0$. Entonces $(\mathbf{M}, \vec{\Omega}, \vec{e})$ son coplanarios, y $(m, \vec{\omega}, \vec{i})$ también.

Si $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{pm} + \vec{\Omega}_{pi}$ ($\vec{\omega} = \vec{\omega}_{pm} + \vec{\omega}_{pi}$) es la descomposición de $\vec{\Omega}$ en componentes proporcionales a \mathbf{M} y \vec{e} , $(m$ y $\vec{i})$ sea $v_{pm} \in \mathcal{T}or(E)$ y $v_{pi} \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$ definidos por

$$v_{pi}(a) = \vec{\omega}_{pi} \times \vec{o}a \quad v_{pm}(p) = \Omega_{pr} \times \vec{e}_0 p$$

En esta situación, el movimiento inercial del sólido $P(t)$ con condicion

inicial $P(0)=P$, $P'(0)=V$ puede escribirse en la forma $P(t)=\Psi(t)\circ\Phi(t)\circ R(t)$

donde: $\Phi(t)=\exp(tv_{pm})$, $R(t)=P_0\exp(tv_{p1})$, y $\Psi(t):E_p \rightarrow p+tV(o)\in E$.

Nótese que los vectores $\vec{\Omega}_{pm}$ y $\vec{\omega}_{p1}$ son constantes del movimiento es decir:

$$\vec{\Omega}_{pm} = \vec{\Omega}_{pm}(t) \quad \text{y} \quad \vec{\omega}_{p1} = \vec{\omega}_{p1}(t) \quad \text{para todo } t$$