GEOMETRIA DE LA RELATIVIDAD

Javier Lafuente

---

§0 Introducción.

El objetivo de esta charla, es por una parte mostrar los ingredientes geométricos que intervienen en la formulación de la teoría Especial y General de la Relatividad. Por otra parte, me gustaría mostrar en que forma la relatividad General se incorpora en los modelos geométricos de las teorías Cosmologicas modernas, y predice la existencia de singularidades.

Como es conocido, la Teoría (Especial y General) de la Relatividad, fué desarrollada por Einstein entre 1905 y 1915, y supone una modificación esencial de la dinámica y la teoría gravitatoria de Newton establecida en sus Principia en 1784.

La Teoría Especial describe el comportamiento dinámico de las partículas en regiones en las que la presencia de fuerzas gravitatorias es despreciable. La General no está condicionada a esta restricción, y constituye de hecho una teoría sobre la Gravedad.

La Teoría Especial se hizo necesaria al constatarse mediante el famoso experimento de **Michelson_Morley** (1886) que la velocidad observada de la luz en el vacio es de c=**300.000** Km/seg independientemente de la velocidad del observador.

El modelo Geométrico de la Relatividad Especial, se obtiene directamente del álgebra lineal, y se denomina espacio de **Minkowski**. Este es un espacio vectorial con dimensión 4, dotado de cierta estructura métrica lineal.

La Relatividad General por su parte, puede describirse mediante cierto tipo de modelos Geométricos denominados espacio–tiempos que son un caso particular de los espacios de Lorentz. Un espacio–tiempo es una variedad diferenciable dotada de cierta estructura, que induce en cada espacio tangente un espacio de **Minkowski.**

En terminos algo imprecisos, podríamos pensar que un espacio de Lorentz viene a ser como un espacio de **Minkowski** "distorsionado" desde el punto de vista métrico y topológico. La idea Geométrica central de La Relatividad General es que esta distorsión *determina* y *viene determinada* por las Fuerzas Gravitatorias.

Las Fuerzas Gravitatorias, son las únicas fuerzas que gobiernan el universo cuando nos interesa estudiarlo a *gran escala*. La Cosmología es la Ciencia que se ocupa de este estudio. Todos *modelos cosmológicos* – que tratan de describir la estructura a gran escala del Universo– son de hecho espacio–tiempos, e incorporan así la teoría General de la Relatividad.

Por último, en relación con este tema desearía analizar, uno de los teoremas Geométrico–Cosmológicos más significativo (debido a Stephen Hawking), que puede parafrasearse así:

En cualquier modelo cosmológico físicamente razonable, el pasado de cualquier partícula es siempre finito.

Me sentiría satisfecho, si al final de esta charla conseguimos comprender el significado geométrico preciso de la frase anterior.

La fuerza de este teorema de Hawking estriba en el hecho de que en él se garantiza la existencia de "singularidades" en cualquier modelo Cosmológico razonable. En estas singularidades, el modelo deja de funcionar, y la Relatividad General predice así su propio fracaso para explicar por si sola el universo a escala cósmica.

§1 Geometría de la Relatividad Especial.

1.1.- Descripción geométrica Newtoniana del espacio y el tiempo.

1.1.1 El modelo cinemático clásico.

Consideremos el "espacio" de esta habitación. Fijando un origen, y tres ejes (una esquina) podemos asignar coordenadas $x=(x_1,x_2,x_3)$ a cada punto. Si además ponemos un cronómetro en marcha, la cuaterna (t,x) representará el punto x considerado en el instante t. Esto es lo que se denomina un *suceso.*

El hecho de que esta construcción sea físicamente posible, presupone la existencia de un espacio y un tiempo absolutos, que es la base de la mecánica clásica.

Desde este punto de vista, una mosca que se mueva por la habitación, se encontrará en el instante t en el punto $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$, y entonces el conjunto de puntos (t,x(t)) cuando t varía representa la línea del universo de la mosca. Por ejemplo, si la mosca se mueve con velocidad constante $v=(v_1,v_2,v_3)$, y su linea del universo es la recta (t,x(t)) con x(t)=p+tv, siendo p la posición de la mosca en el instante inicial t=0. Se dice entonces que se trata de una partícula inercial.

El espacio de esta habitación constituye un buen modelo de espacio de sucesos para las hormigas que recorren el suelo. El propio suelo, representa el suelo en el instante inicial t=0. El techo es el suelo en el instante t=h, siendo h la altura de la habitación. Las líneas del universo son alambres que recorren la habitación de abajo arriba, siempre con pendiente positiva. La velocidad *escalar* es justamente la inversa de dicha pendiente. En particular, las hormigas en reposo vienen descritas por lineas verticales.

Figura 1: Hormigas

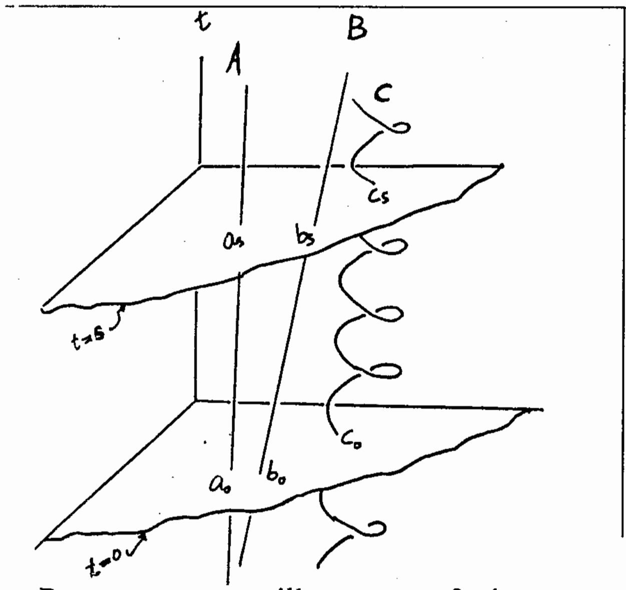
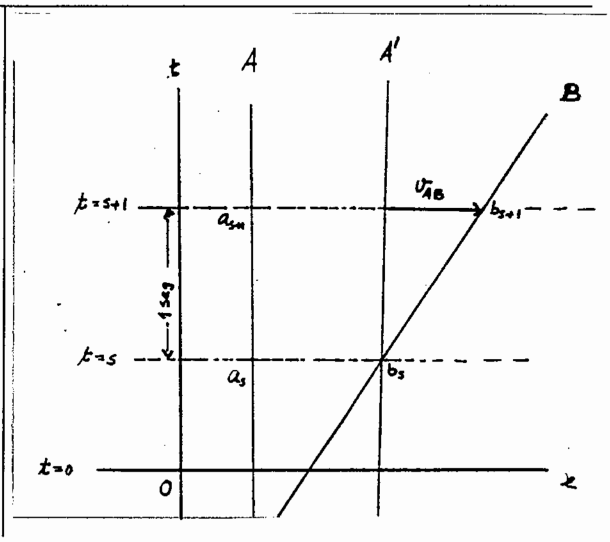


Figura 2: Cucarachas

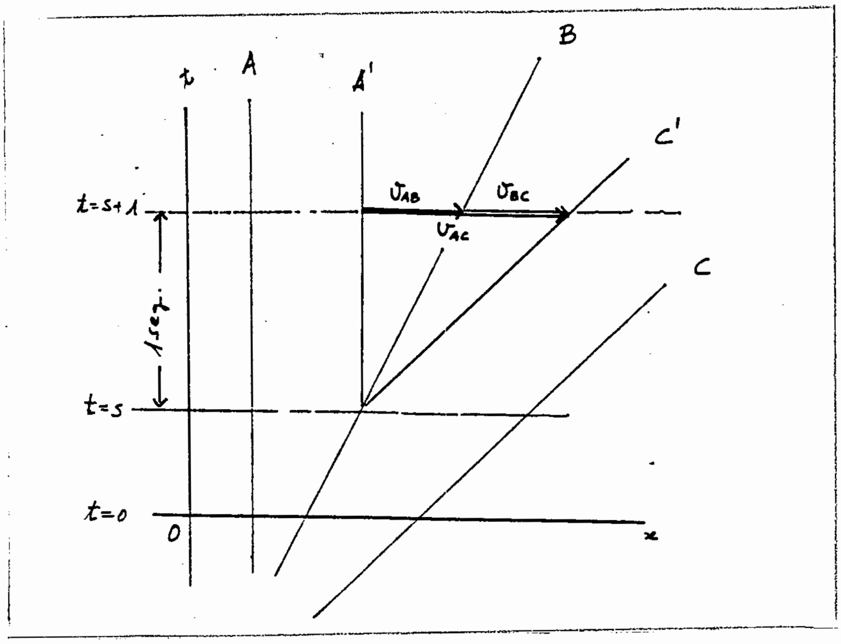


Para mayor sencillez, nos referiremos en nuestros dibujos a partir de ahora al espacio de sucesos de los habitantes (¿cucarachas?) de una cañería infinitamente larga, que puede representarse cómodamente por los puntos del plano de una hoja de papel o de una pizarra o de una pantalla de transparencias.

1.1.2 Velocidades relativas. Regla de composición.

Un movimiento inercial en nuestra pizarra viene definido por una linea recta *no horizontal* como las líneas A, B o C. En particular, una linea vertical como la A, representa el reposo absoluto. Si nos quedamos con la idea de movimiento inercial, y nos olvidamos del reposo absoluto, la noción de "verticalidad" pierde su sentido, y debe generalizarse la regla para el calculo de velocidades. Por ejemplo la velocidad relativa de C respecto a B , v_{BC} se obtiene tal y como se indica en la figura. Observese cómo se verifica la regla de composición de velocidades: $v_{AC}=v_{AB}+v_{BC}$.

Figura 3.

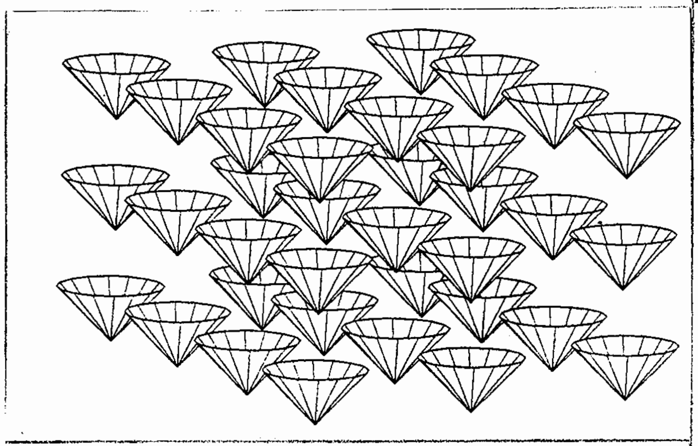


1.2 Relatividad especial: El espacio_tiempo de Minkowski.

La Ley de composición de velocidades de la cinemática de Newton, es incompatible con la constancia de la velocidad de la luz. Es decir, de acuerdo con la experiencia, si en la figura anterior, C es un rayo de luz, entonces, de acuerdo con los experimentos debe ser $|v_{AC}|=|v_{BC}|$=300.000 Km/seg. La idea básica de la Relatividad Especial, construida por Einstein, y geometrizada por Minkowski, parte de que el espacio y el tiempo no deben ser considerados como entes absolutos y separados. Lo absoluto, es una cierta estructura que ahora denominamos espacio-tiempo de Minkowski. Lo único que sucede es que los observadores A y B contemplan el espacio-tiempo desde distintas prespectivas, de manera análoga a como Vd. y yo contemplamos esta misma mesa de forma distinta.

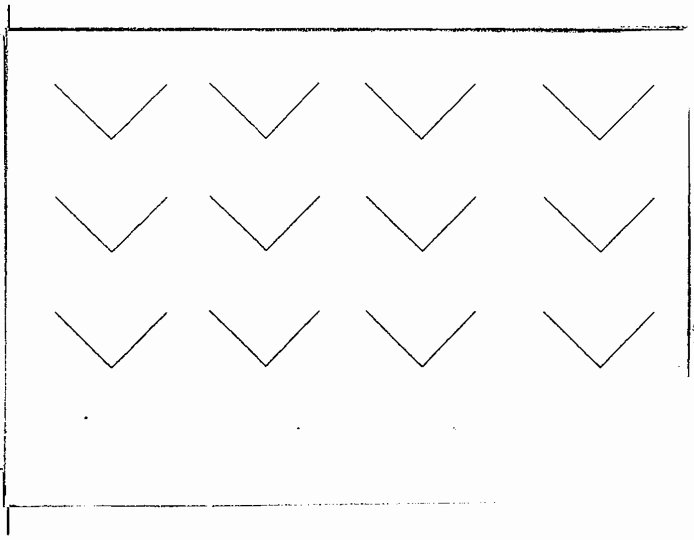
La linea C si representa un rayo de luz, debe ser casi horizontal. Sin embargo, si cambiamos la unidad de longitud *metro* (m.) por *segundo luz* (sl.) 1 sl.= 300000 m., obtendremos una velocidad para la luz de c=1 sl./seg., y la linea C quedaría inclinada 45 grados. Dibujando por cada suceso todos los rayos de luz obtendríamos un dibujos parecidos al de las figuras de más abajo, que como explicaremos, representan gráficamente la estructura del espacio–tiempo de Minkowski.

Figura 4: Conos de Hormigas



$-\nabla t^2+\nabla x^2+\nabla y^2=0$

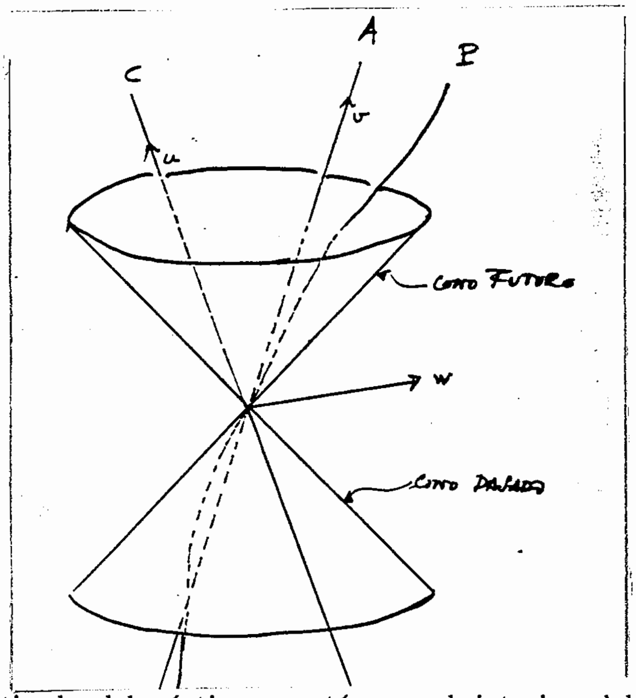
Figura 5: Conos de Cucarachas



$-\nabla t^2+\nabla x^2=0$

Los conos que aparecen, se denominan *Conos de Luz.* Puede comprobarse que (para las hormigas y las moscas) cada cono de luz divide (en el sentido topológico) al espacio–tiempo en las tres zonas señaladas en la figura: Exterior, Cono Causal Futuro, Cono Causal Pasado.

Figura 6 :El cono Causal.



- Los vectores como el v que partiendo del vértice p están en el interior del cono Causal futuro, se llaman temporales futuros.
- Los vectores como el u que están sobre el cono de luz futuro, se llaman luz futuros.
- Las lineas del universo de las partículas u observadores son aquellas como

la P cuyo vector tangente marca en cada punto un vector temporal futuro. Si son lineas rectas como la A, la partícula se dice inercial.

∘ Las lineas del universo de los fotones de luz como C son lineas rectas que marcan siempre la dirección luz en el sentido futuro.

∘ Técnicamente un espacio de Minkowski es un espacio afín de dimensión 4 , en cuyo espacio vectorial subyacente, se ha definido un "producto escalar" no euclídeo con signatura −+++, y se ha elegido una de entre las dos posibilidades que hay para seleccionar el cono causal futuro.

Como pretendo liberar esta charla de tecnicismos, voy a tratar de explicar sin fórmulas, como se puede representar gráficamente toda la información fisica que proporciona el modelo de Minkowski para las cucarachas, y porqué el modelo resuelve la paradoja del experimento de Michelson.

Figura 7: velocidad relativa

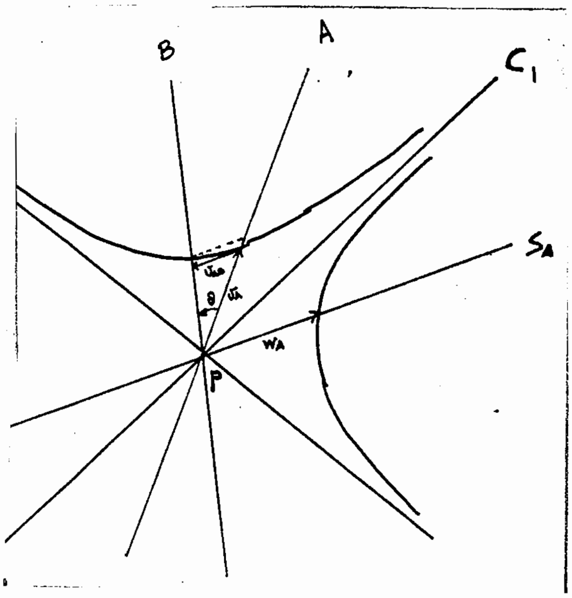
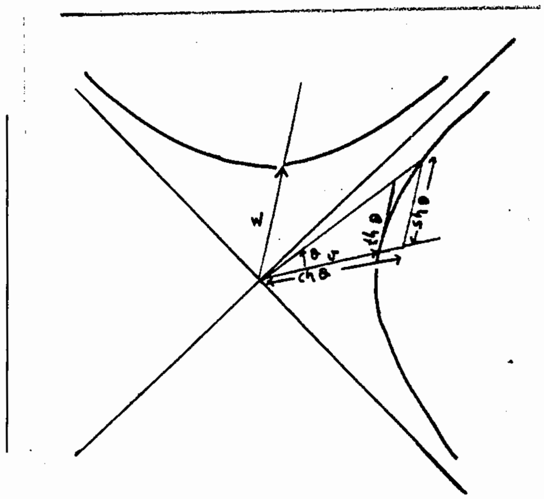


Figura 8 : Funciones hiperbólicas



En la figura están marcados los elementos relevantes que definen la estructura de Minkowski en el suceso p: El cono de luz, que consta de lasdos lineas *perpendiculares* C_1, y C_2, y las hipérbolas "unidad" que que tienen por asintotas C_1 y C_2.

Aparece una cucaracha inercial A que vive el suceso p. La linea S_A representa los sucesos que A considera simultáneos con p. La linea C_1 es *bisectriz* entre A y S_A. Las hipérbolas unidad, marcan los vectores "unidad" v_A (temporal futuro) y w_A, que permiten "graduar" el eje de tiempos A y el eje del espacio S_A. Lo que mide la cucaracha A es lo que correponde a este modelo Newtoniano construido.

Así si B es otra cucaracha inercial que vive el suceso p, la velocidad relativa v_{AB} de B respecto a A, es el vector representado en la figura, y cuyo módulo (con signo) ν_{AB} es la tangente hiperbólica del ángulo hiperbólico ϑ entre A y B respecto a la hipérbola unidad. En particular tanto para A como para

B la velocidad escalar de la luz es exactamente igual a la unidad.

Usando la fórmula para th(φ+ψ) en función de th(φ) y th(ψ) se obtiene como fórmula de composición de velocidades: $\nu_{AC}=(\nu_{AB}+\nu_{BC})/(1+\nu_{AB}\nu_{BC})$.

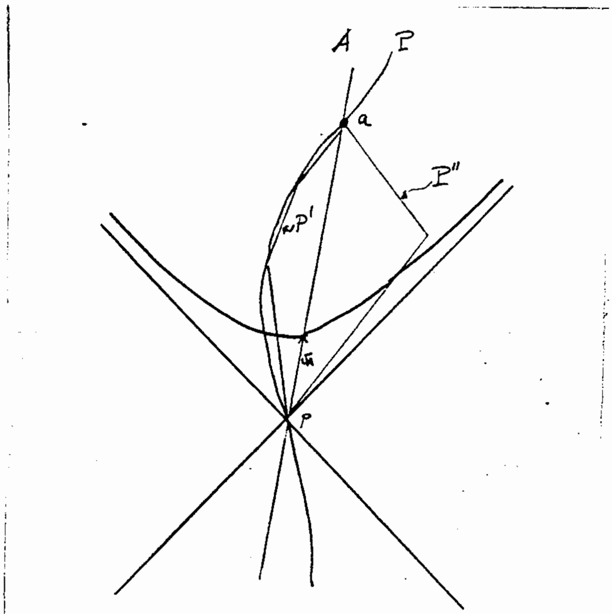
Nótese que si C es un rayo de luz es $\nu_{AC}=1=\nu_{BC}$ que es compatible con la fórmula de composición de velocidades anterior.

1.3 Causalidad y tiempo própio.

Observese que los sucesos como el a de la fig.7 en el interior del cono futuro de p son siempre observados despues de p, cualquiera que sea la cucaracha (inercial) que los mire. Escribimos por esto p«a (p precede cronológicamente a a). Así en el cono futuro está realmente el futuro de p.

Por otra parte, la linea del universo de cualquier cucaracha, viene representada por una curva como la P o la P', (fig. 9) inclinada siempre más de 45 grados respecto de la horizontal, es decir, la dirección de su tangente apunta siempre al interior del cono. En el argot técnico, se denominan a estas curvas, *temporales.*

Figura 9: Curvas temporales



P, P', P'' : Diferentes "viajes" del gemelo

El tiempo experimentado por el observador A, entre los sucesos p y a, viene determinado por la longitud del segmento [p,a] cuando se toma v_A como unidad de medida. Esto se llama *tiempo propio* o longitud Lorentziana de A entre p y a. Sumando trozo a trozo, es posible calcular la longitud Lorentziana de cualquier poligonal temporal (como P') entre p y a, y tomando límite de poligonales, la longitud Lorentziana de P entre p y a. Esta longitud representa físicamente el tiempo *experimentado* por la cucaracha P entre los sucesos p y a.

1.4 La paradoja de los gemelos.

Las propiedades de la longitud Lorentziana no son análogas a las de la longitud euclidea, sino más bien duales. Así por ejemplo, de entre todas las curvas temporales que unen p con a, se demuestra que es el segmento de la línea recta temporal A, el que tiene *mayor* longitud Lorentziana. Físicamente esto significa que es el observador inercial A, el que experimenta mayor lapso de tiempo entre los sucesos p y a. Este fenómeno, explica la paradoja de los gemelos: P y A son dos hermanos gemelos, y el suceso p es una despedida hasta el suceso a. Se supone que han convivido juntos hasta antes del suceso p (y tienen por tanto en p la misma edad). La Teoría de la relatividad predice que en el suceso de reencuentro a, la edad del gemelo viajero P será inferior a la de su hermano. De hecho es geométricamente posible que entre ambos sucesos el gemelo P experimente un lapso de tiempo arbitrariamente pequeño, si realiza su viaje con velocidad próxima a la de la luz.

§2 **Geometría de la Relatividad General.**

Para la formulación geométrica de la Teoría Especial de la Relatividad, son necesarios solo algunos prerequisitos de algebra lineal elemental. Sin embargo, los ingredientes geométricos que intervienen en la Teoría General son bastante más avanzados, y requieren al menos de los conceptos básicos de la Geometría diferencial: Variedades diferenciables, métricas, conexiones... etc.

En este punto, me veo obligado a elegir entre dos posibles enfoques para mi exposición:

O bien trato de mantenerme en el tono informal y elemental de la primera parte, a riesgo de ser absolutamente impreciso, o bien trato de ser absolutamente preciso y riguroso, con el riesgo de terminar hablando solo para las paredes.

Mi decisión es seguir ambos enfoques a la vez, manteniendo en mi exposición un doble lenguaje (uno informal y otro riguroso), con idea de que cada uno, de acuerdo con su nivel, entienda lo que pueda, y a ser posible algo.

2.1 Geometrización de la gravedad: Espacio_tiempo de Lorentz.

La teoría General de la Relatividad, trata de describir el comportamiento dinámico de las partículas en presencia de fuerzas gravitatorias, y contiene como caso particular (gravedad nula) la Teoría Especial antes expuesta.

Desde un punto de vista geométrico – que es el que nos ocupa – debemos entender que la gravedad interviene en la relatividad especial "distorsionando" el espacio de Minkowsi, y que esta distorsión determina a su vez la gravedad.

Una buena imagen geométrica de esta distorsión viene dada por las figuras de más abajo. Se supone que en el ambiente tridimensional hay una fuerza constante vertical hacia abajo. La forma de la superficie determina la acción de dicha fuerza sobre sus habitantes.

El modelo geométrico usado por la Teoría General, retiene de la Teoría Especial la idea de "Espacio de Sucesos" M de dimensión cuatro, y la de cono Causal. El Modelo busca asociar "infinitesimalmente" a cada suceso p un espacio de Minkowski.

Figura 10 Gravedad cero

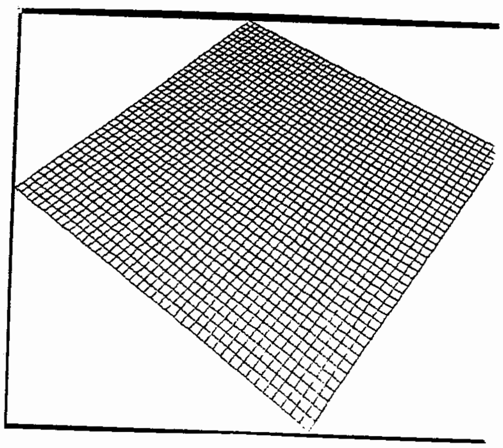
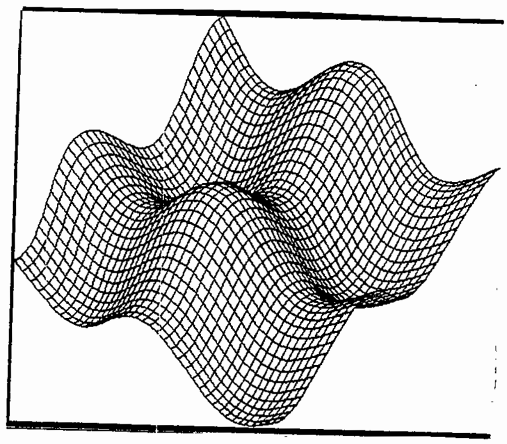


Figura 11 Con Gravedad.



Técnicamente un espacio–tiempo de Lorentz es una variedad diferenciable real conexa de dimensión 4, dotada de un tensor métrico g que asigna de forma diferenciable a cada espacio tangente T_pM una métrica con signatura −+++, que denotamos por $g_p : T_pM \times T_pM \ni (v,w) \longrightarrow g(v,w)=\langle v,w\rangle \in \mathbb{R}^2$. Se denomina a g *Métrica de Lorentz.*

En cada espacio tangente queda por tanto determinado un espacio de Minkowski y un Cono Causal $\mathscr{C}_p=\{v\in T_pM:\ \langle v,v\rangle \le 0\}$. Se supone, que se ha elegido diferenciablemente en cada espacio tangente un cono futuro, de forma que los conceptos de vector temporal futuro, cusal futuro , luz futuro o espacial se mantienen vigentes. También se mantiene vigente el concepto de linea del universo de una partícula –curva temporal futura– como aquella curva cuyo vector tangente es siempre temporal futuro.

Una curva causal futura es aquella cuyo vector tangente define una dirección causal futura. Es decir, son las lineas del universo que utilizan para "viajar" las "causas" que pueden producir efectos a su paso. Se admite pues que estas causas viajen eventualmente a la velocidad de la luz.

Se dice que el suceso p precede cronológicamente al q (y escribimos $p \ll q$) si existe una curva temporal futura que los une.

Se dice que el suceso p' precede causalmente al q' (y escribimos $p' \le q'$) si p'=q' o bien existe una curva causal futura que los une. Físicamente significa que *no es imposible* que p' sea la causa de q'

Naturalmente, la precedencia cronológica implica la causal.

figura 12 Hormigas

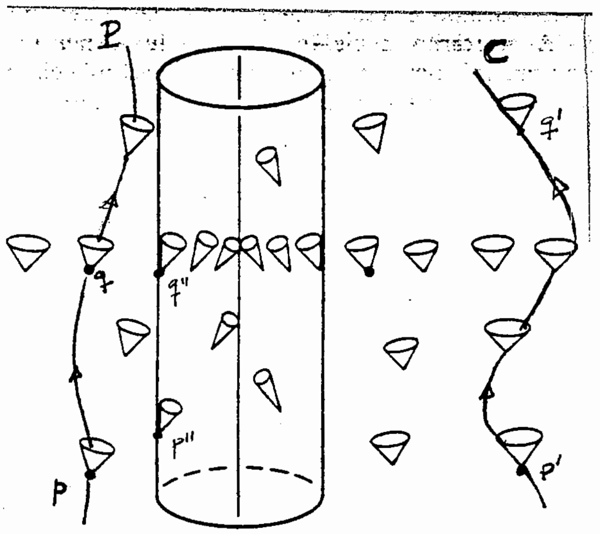
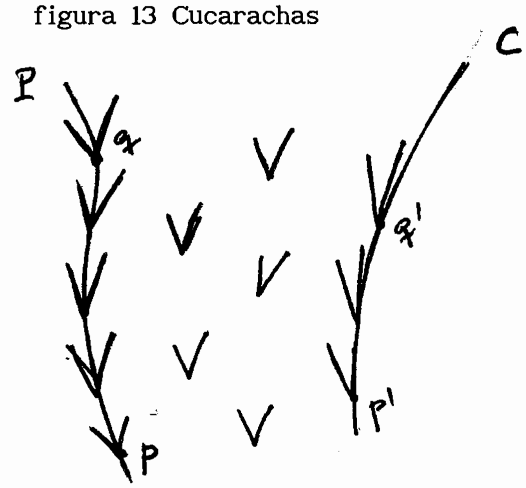


figura 13 Cucarachas



Los dibujos representan un mapa "local" de un espacio–tiempo en dimensiones dos y tres. P representa la linea del universo de una partícula, y C una línea causal.

La diferencia con los dibujos análogos de las figuras 5 y 6 del la Relatividad Especial es que ahora, la forma, la inclinación o la abertura del cono varía con el punto.

2.2 Tiempo própio. Partículas en caida libre.

Para dar interpretación geométrica en un espacio tiempo M , a los conceptos cinemáticos (como velocidad relativa, tiempo propio ...etc) introducidos en el espacio de Minkowski de la Relatividad especial hay un principio básico que es el siguiente:

Las "nuevas" interpretaciones deben corresponderse infinitesimalmente, con las "antiguas" en los "espacios de Minkowski" T_pM de los sucesos $p \in M$.

Por ejemplo, en el espacio de Minkowski se había definido la longitud Lorentziana de una curva poligonal temporal futura γ entre los sucesos p y a. Esta magnitud, se interpreta como el lapso de tiempo que la partícula P que describe γ experimenta entre ambos sucesos. Si aceptamos el principio anterior, solo hay una vía para poder definir el concepto análogo en un espacio–tiempo M, y hay que usar naturalmente el cálculo integral:

[Longitud Lorentziana de $\gamma(t)$ entre t=a y t=b]=

=[Tiempo experimentado por P entre los sucesos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$]=

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \quad (\text{donde } |\gamma'(t)|=(-\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle)^{1/2}$$

Podría uno preguntarse quienes son ahora las partículas "inerciales". Fisicamente son aquellas que solo están sometidas a la fuerza de la gravitación. Se llaman ahora partículas en caida libre. Desde el punto de vista geométrico, la respuesta técnica es: *Las que describen geodésicas temporales futuras.* Nos referimos a las geodésicas de la conexión de Levi–Civita asociada a la métrica de Lorentz de M. Estas curvas vienen caracterizadas por la siguiente propiedad:

Dados dos sucesos p y q suficientemente próximos con $p \ll q$, de entre todas las curvas temporales futuras que unen p a q, la geodésica temporal futura es la que tiene mayor longitud Lorentziana.

Dicho de otra forma Las curvas que se corresponden con las partículas en caida libre son las únicas que mantienen "localmente" cierta la paradoja de los gemelos.

2.3 Partículas con pasado finito.

Una curva temporal futura $\gamma:(a,b] \longrightarrow M$ se dice pasado inextensible, si no existe el límite de $\gamma(t)$ cuando $t \to a$. Desde el punto de vista físico, γ describe TODO el pasado de una partícula P antes del suceso $\gamma(b)$. Así la "edad" de la partícula hasta el suceso b, viene determinada por:

$$\text{Long. Lorentz. } (\gamma)=\lim_{s\to a} [\text{Long. Lorentz. de } \gamma \text{ entre } t=s \text{ y } t=b]$$

si este número es finito, entonces la partícula tiene un pasado finito.

Se define de forma análoga la inextendibilidad futura.

Una curva temporal futura se dice inextendible si es pasada y futura inextendible.

§3.-Cosmología

3.1 Modelos Cosmológicos.

Las fuerzas gravitatorias, son las únicas que intervienen cuando se trata de analizar el comportamiento del universo a gran escala.

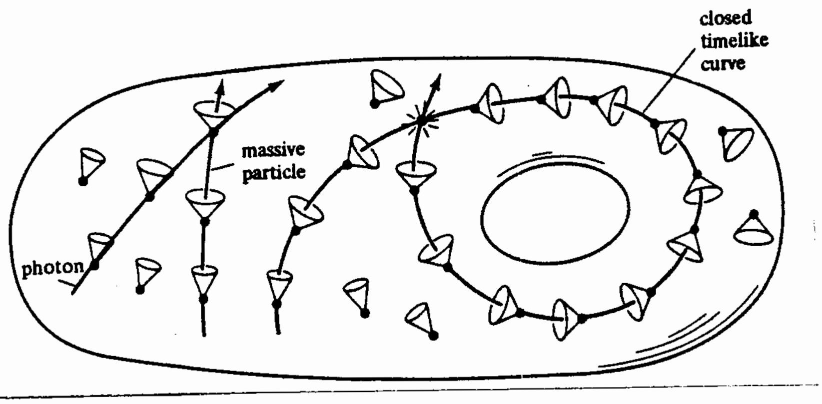
Un modelo Cosmológico, es un ejemplo concreto de espacio–tiempo que aspira a describir a gran escala el comportamiento global del Universo. La cuestión es analizar que restricciones geométricas deben imponerse como mínimo al modelo para que reflejen propiedades físicamente plausibles del Universo. Estos requerimientos físicos mínimos pueden esquematizarse en los siguientes puntos:

- *Condiciones razonables de Causalidad*
- *El Universo está en expansión*
- *La gravedad atrae.*

3.2 Propiedades de Causalidad: Hiperbolicidad Global.

Dibujemos por ejemplo el siguiente "modelo Cosmológico" para el Universo de las hormigas del interior del toro:

Figura 14



Este modelo es filosóficamente insostenible desde el punto de vista Causa–Efecto: Existen curvas temporales y causales futuras que se cierran sobre si mismas. Gracias a este tipo de Universos se han realizado las peliculas "Regreso al Futuro I y II". Nadie debería poder influir sobre su propio pasado, y ni siquiera sobre las "proximidades" del mismo.

Naturalmente, conviene excluir este tipo de patologías de cualquier modelo cosmológico razonable, al que se deben imponer ciertas restricciones causales denominadas condiciones de causalidad (Espacios Cronológicos, Causales, Fuertemente Causales, Establemente Causales ... etc.).

Hay una condición fisicamente plausible, que garantiza el buen comportamiento Causal del modelo. Es la Hiperbolicidad Global:

Un espacio–tiempo M es Globalmente Hiperbólico si admite un subconjunto S que corta una y solo una vez a cada curva temporal inextendible. Se dice en-

tonces que S es una Superficie de Cauchy.

Nótese cómo esta condición elimina automáticamente todo tipo de paradojas Causales.

Como ejemplo, los subconjuntos S de las figuras de más abajo, representan superficies de Cauchy de los modelos de Minkowski con dimensión 2 y 3.

Fig 15

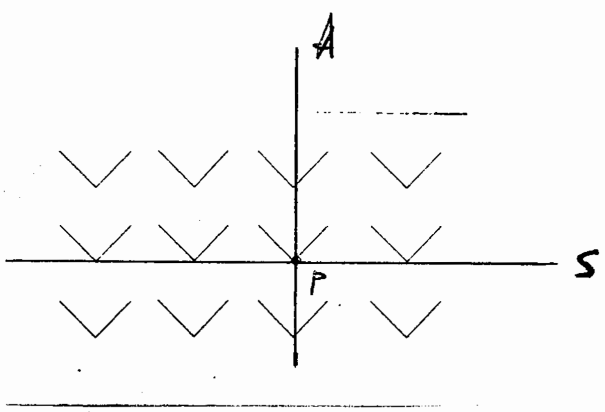
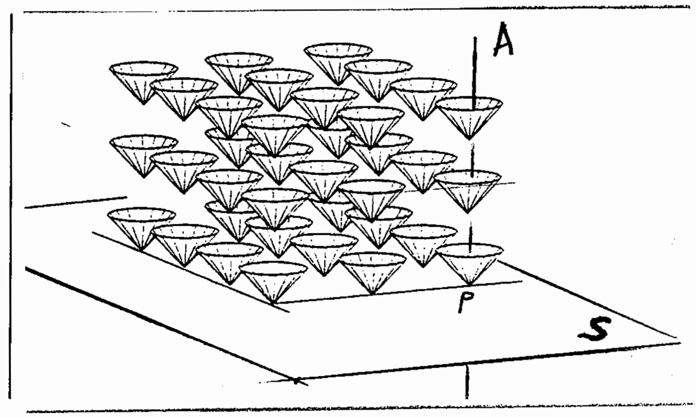


Fig 16



Nótese que S es el conjunto de sucesos que son simultáneos con p desde el punto de vista del observador A.

Una superficie de Cauchy S debe interpretarse como una superficie de simultaneidad, es decir, una "fotografía" instantánea del Universo. Cualquier "partícula" imaginable del Universo ha de sufrir una y solo una vez la experiencia de "atravesar" S.

Puede probarse, que un espacio–tiempo Globalmente Hiperbólico, es *geométricamente* posible construir funciones diferenciables $T:M \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que cada $S_t=F^{-1}(t)$ define una hipersuperficie (diferenciable) de Cauchy. La función T desempeña el papel de "tiempo cósmico" absoluto, y cada superficie S_t es una superficie de simultaneidad absoluta, y representa el Universo en el instante cósmico t. Conviene indicar, que la estructura métrica del espacio–tiempo induce sobre cada S_t una estructura Riemanniana que nos permite medir en S_t longitudes, areas, y volumenes.

3.3 Expansión del Universo.

El desplazamiento al rojo de las ondas luminosas procedentes de objetos lejanos constituye hoy en día la única prueba experimental de la Ley de Expansión del Universo formulada por Hubble en 1929 y admitida sin reservas en todas las teorías cosmológicas modernas.

Introducir en nuestro espacio–tiempo Globalmente Hiperbólico la hipótesis de expansión, significa admitir algo así como:

Existe un Tiempo Cósmico T de forma que en algún instante cósmico t, el universo instantáneo S_t tiende a expandirse en cada punto de S_t.

Que cada cual lo entienda como pueda.

3.4 La gravedad atrae.

Geométricamente, la información sobre la gravedad está contenida en el tensor de Curvatura del espacio–tiempo. El asunto es excesivamente técnico para poder entrar ahora en detalles. Baste decir que la anulación de este tensor significa gravedad nula, y "localmente" el espacio–tiempo es de Minkowski.

Físicamente la Gravedad se manifiesta con la presencia de aceleraciones de aproximación o alejamiento relativo entre partículas inerciales "proximas".

Justamente este efecto viene medido por cierta contracción del tensor de Curvatura denominada Tensor de Ricci. La condición para que la gravedad nunca repela se expresa imponiendo que el **tensor de Ricci** (que es 2–covariante) sea **semidefinido positivo** en cada punto. Esta condición supone que en torno a cada suceso de cada partícula inercial, el promedio de las aceleraciones de las partículas inerciales vecinas no tiene nunca componente "repulsiva".

3.5 La aparición expontánea de singularidades.

El modo de funcionar de la Ciencia Cosmologica viene a ser el siguiente:

Se imponen condiciones al espacio–tiempo para que el modelo cosmológico tenga validez física. Estas condiciones, son la formulación geométrica de ciertos requerimientos físicos avalados por la observación. Es ahora el momento de dejar funcionar a la geometría por si sola. Los teoremas geométricos obtenidos se reinterpretan entonces físicamente.

El teorema de Hawking enunciado en la introducción, es un buen ejemplo de este proceso:

Las condiciones 3.3 y 3.4 son necesarias (aunque no suficientes) para la validez física del modelo. Podemos llamar *modelo razonable de Universo*, a cualquier espacio–tiempo verificando estos requerimientos. La *frase* que sigue a continuación, ya tiene entidad de *Teorema:*

En un Universo razonable cada partícula debe tener un pasado finito.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA:

Robert Geroch La Relatividad General (de la A a la B).
Alianza Universidad 448.

Martin Gardner La explosión de la Relatividad.
Biblioteca Científica Salvat 45.

M. Friedman Fundamentos de las teorías del espacio–tiempo
Alianza Universidad 684.

Naber, G.L. Spacetime and Singularities.
London Math. Soc. Stud. Cambridge University Press (1988)