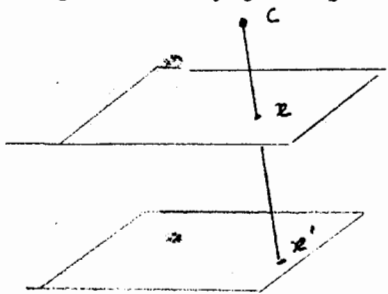


# GEOMETRIA II

INTRODUCCION:

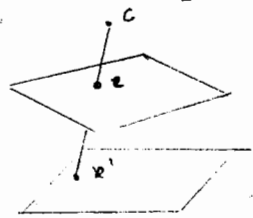
En el espacio afin intuitivo tridimensional  $\mathcal{E}$  imaginemos dos planos afines  $P$  y  $P'$  paralelos, y un punto  $o$  no situado sobre  $P$  ni  $P'$ .



Si  $x$  es un punto de  $P$ , la recta  $\langle o, x \rangle$  no es paralela a  $P$  (ni a  $P'$ ) y corta a  $P'$  en un punto  $x'$ . La aplicación  $P \ni x \mapsto x' \in P'$  es una biyección que transforma rectas en rectas. Por el Teorema Fundamental de la geometría afin, se concluye que  $f$  es una aplicación

afin, y se denomina proyección cónica (paralela) de  $P$  sobre  $P'$ .

Imaginemos ahora que  $P$  no es paralelo a  $P'$ . La aplicación  $f$  antes descrita parece a primera vista que transforma rectas en rectas. ¿Es aplicación afin?



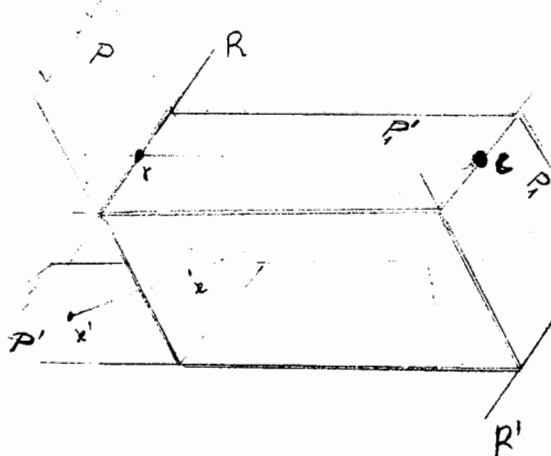
Un análisis más detenido muestra que los puntos de la recta  $R'$  intersección del plano  $P'_1$  (que pasa por el punto  $o$  y es paralelo a  $P'$ ) con el plano  $P$ , no tiene imagen en  $P'$ : Si  $r \in R$ , la recta  $\langle o, r \rangle$  es paralela a  $P'$ , e induce por tanto una "dirección"  $\alpha'$  en dicho plano. Parece natural asignar al punto  $r$  dicha dirección, y escribir  $f(r) = \alpha'$ .

Por otra parte, los puntos de la recta  $R'$  intersección del plano  $P_1$  (que pasa por  $o$  y es paralelo a  $P$ ) con el plano  $P'$ , no son en principio imagen de ningún punto de  $P$ . Si  $r' \in R'$ , la recta  $\langle o, r' \rangle$  es paralela a  $P$ , e induce una dirección  $\alpha$  sobre dicho plano.

Parece natural asignar como imagen de  $\alpha$  el punto  $r'$ , es decir  $f(\alpha) = r'$ .

Los elementos  $\alpha$  y  $\alpha'$  se denominan puntos del infinito (de  $P$  y  $P'$  respectivamente). Denotando por  $\tilde{P}$  y  $\tilde{P}'$  a los planos  $P$  y  $P'$  "completados" por los puntos del infinito correspondientes, la aplicación  $f$  descrita anteriormente, aparece como una biyección de  $\tilde{P}$  en  $\tilde{P}'$ , y se denomina proyección cónica (no paralela) de  $\tilde{P}$  en  $\tilde{P}'$ .

Nótese que  $f$  no induce aplicación afin entre  $P$  y  $P'$ , pero sin embargo conserva en cierto sentido las rectas. Las aplicaciones de  $\tilde{P}$  en  $\tilde{P}'$  verificando esta propiedad se denominarán aplicaciones proyectivas. Las transformaciones proyectivas de  $\tilde{P}$  establecen la geometría proyectiva del plano, que incluye en un sentido que más tarde explicitaremos, a la geometría afin.



Estableceremos el concepto de espacio proyectivo mediante la adjunción de los puntos del infinito (ó direcciones) a un espacio afin. La geometría proyectiva no distinguirá entre puntos ordinarios ó puntos del infinito, y el espacio proyectivo abstracto se identificará con la familia de rectas de cierto espacio vectorial. Desde este punto de vista, las propiedades proyectivas aparecen como las propiedades de los espacios vectoriales que hacen intervenir rectas.

El interés del estudio de la geometría proyectiva, se centra en tres aspectos fundamentales:

- 1.- Las propiedades de incidencia de subespacios son mas sencillas que en geometría afin.
- 2.- La posibilidad de enviar puntos al infinito, para obtener un espacio afin en el cual dos subespacios son paralelos si y solo si su intersección está formada por puntos del infinito. <sup>Esto</sup> permite obtener propiedades afines con técnicas de geometría proyectiva.
- 3.- La dualidad, que permite por ejemplo en un plano proyectivo intercambiar bajo ciertas condiciones las palabras recta y punto en enunciados de proposiciones que hacen intervenir propiedades de incidencia.

## 1. ESTRUCTURA DE ESPACIO PROYECTIVO

### 1.1 Puntos del infinito de un espacio afin

$X$  es un espacio afin sobre el  $K$ -espacio vectorial  $\vec{X}$ .  $\hat{X}$  denota la extensión vectorial canónica de  $X$ , y  $m_X: \hat{X} \rightarrow K$  es la aplicación masa.

#### 1.1.1 Definición

- a) Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de rectas del espacio afin  $X$ . La relación de paralelismo " $//$ " induce sobre  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia. Si  $R \in \mathcal{R}$  se denota por  $\infty_R = \{R' / R // R'\}$  a la clase de equivalencia definida por  $R$  en  $\mathcal{R}$ , y se denomina punto del infinito (de  $R$ ). El conjunto  $\infty_X = \mathcal{R} //$  es el conjunto de puntos del infinito de  $X$ , y se denomina hiperplano del infinito.
- b) Una dirección del espacio afin  $X$ , es una recta vectorial  $D$  de  $\vec{X}$ . Se escribe  $P(\vec{X})$  para denotar al conjunto de todas las direcciones de  $X$ .

La relación entre puntos del infinito y direcciones, viene explicitada en la siguiente proposición:

### 1.1.2 Proposición

La correspondencia  $\mathcal{A}_X \ni \mathcal{A}_R \mapsto \vec{R} \in P(\vec{X})$  es una aplicación bien definida y biyectiva.

Demostración:

Nótese que si  $R, R' \in \mathcal{R}$  se tiene la equivalencia:  $\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_{R'} \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{R}'$ .

### 1.1.3 Observación

La biyección anterior permite identificar cada punto  $\mathcal{A}_R \in \mathcal{A}_X$  con la dirección  $\vec{R}$  de la recta  $R$  ( $\mathcal{A}_R = \vec{R}$ ). Si  $A$  es subespacio afín de  $X$  con dimensión mayor que cero, el conjunto  $\mathcal{A}_A$  se identifica con  $P(\vec{A})$ . Esto permite escribir la inclusión

$$\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}_X$$

### 1.1.4 Definición

Se denomina extensión proyectiva del espacio afín  $X$ , al espacio  $\tilde{X} = X \cup \mathcal{A}_X = X \cup P(\vec{X})$ .

A la pareja  $(\tilde{X}, \mathcal{A}_X)$  se le denomina espacio proyectivo afín. Por abuso de notación se escribe a veces que  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \mathcal{A}_X)$  es un espacio proyectivo afín.

### 1.1.5 Notación

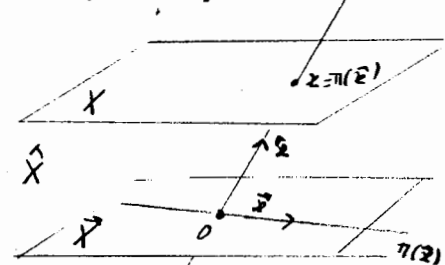
Si  $\hat{E}$  es un espacio vectorial y  $\hat{e} \in \hat{E}$ , escribir  $[\hat{e}]$  significa que  $\hat{e} \neq 0$  y  $[\hat{e}] = K\hat{e} = \{\lambda\hat{e} / \lambda \in K\}$ .  $P(\hat{E}) = \{[\hat{e}] : \hat{e} \in \hat{E} - 0\}$ , es el conjunto de rectas vect. de  $\hat{E}$ .

El siguiente teorema permitirá "ver" la extensión proyectiva de un espacio afín como el conjunto de rectas vectoriales de su extensión vectorial. Esto motivará la definición general de espacio proyectivo.

### 1.1.6 Teorema

La aplicación  $\pi: \hat{X} - \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ , tal que  $\pi(\hat{x}) = [\hat{x}]$  si  $\hat{x} \in \hat{X} - 0$  y  $\pi(\hat{x}) = \frac{1}{ms(\hat{x})} \hat{x} \in X$  para  $\hat{x} \in \hat{X} - \vec{X}$ , es una aplicación que verifica la propiedad:

$\pi^{-1}(\tilde{x}) \cup \{0\}$  es una recta vectorial de  $\hat{X}$  para cada  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .



Demostración:

Nótese que si  $x \in X$ , es  $\pi(x) = x$  y  $\pi(\lambda x) = x$  para todo  $\lambda \in K - 0$ . Así  $\pi^{-1}(x) \cup \{0\} = [x]$ .

Por otra parte,  $\pi^{-1}(v) \cup \{0\} = \mathcal{A}_v$  para cada  $v \in \mathcal{A}_X = P(\vec{X})$ .

### 1.1.7 Corolario

La aplicación  $I: \tilde{X} \ni \tilde{x} \mapsto \pi^{-1}(\tilde{x}) \cup \{0\} \in P(\hat{X})$  es una aplicación biyectiva.

Esta biyección permite identificar cada punto  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  con su imagen  $I(\tilde{x}) \in P(\hat{X})$ , y escribir por ejemplo la igualdad  $x = [x]$  para  $x \in X$ .

Demostración:

Si  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$  y es  $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$ , entonces  $\pi^{-1}(\tilde{x}_1) \cap \pi^{-1}(\tilde{x}_2) = \emptyset$ , por tanto  $I(\tilde{x}_1) \neq I(\tilde{x}_2)$

la sobreyectividad de  $I$  es evidente.

1.1.0 Ejemplos

a) Considerese el modelo analítico cartesiano  $A_n(K) = A_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$ , y su extensión

vectorial canónica  $\hat{A}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$ . Entonces  $\infty_{A_n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$ ,

y  $\tilde{A}_n = A_n \cup \infty_{A_n}$ .

La aplicación  $\pi: \hat{A}_n - \{0\} \rightarrow \tilde{A}_n$  viene definida por  $\pi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  para  $x_0 \neq 0$ , siendo

$$x_i = \frac{x_i}{x_0}, \text{ y } \pi \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La identificación 1.1.7 permite escribir  $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , y por tanto

$$A_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K, x_0 \neq 0 \right\} \cup \infty_{A_n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}.$$

Se denomina a  $A_n = (\hat{A}_n, \infty_{A_n})$  modelo analítico n-dimensional de espacio proyectivo afin.

b) En particular para  $n=1$  se tiene  $\tilde{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$  y  $\infty_{A_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

La recta proyectivo afin  $\tilde{A}_1$  se identifica con el conjunto  $\tilde{K} = K \cup \{\infty\}$  de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{x_0} \in K \text{ si } x_0 \neq 0, \text{ y } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \infty \text{ si } x_0 = 0. \text{ A } \tilde{K} \text{ se le denomina extensión pro-}$$

yectiva del cuerpo K.

1.2 El espacio proyectivo

La construcción anterior sugiere la siguiente definición general:

1.2.1 Definición

Un espacio proyectivo es una terna  $E = (E, \hat{E}, \pi)$  en donde:

- E es un conjunto <sup>no vacío</sup> denominado conjunto de puntos
- $\hat{E}$  es un espacio vectorial no nulo que denominamos espacio vectorial asociado
- $\pi: \hat{E} - \{0\} \rightarrow E$  es una aplicación suprayectiva denominada proyección, tal que  $\pi^{-1}(x) \cup \{0\}$  es una recta vectorial de  $\hat{E}$  para cada  $x \in E$ .

Si la dimensión de  $\hat{E}$  es finita igual a  $n+1$ , se dice que E tiene dimensión n, y se escribe  $\dim(E) = n$ .

Es habitual también decir en estas condiciones, que la proyección  $\pi$  da estructura de espacio proyectivo, al conjunto de puntos E.

1.2.1 Ejemplos

1) Si X es espacio afin la proyección  $\pi: \hat{X} - \{0\} \rightarrow \tilde{X}$  de 1.1.6, da estructura de espacio proyectivo a  $\tilde{X}$  sobre  $\hat{X}$ . Así  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \hat{X}, \pi)$ .

2) Si  $\hat{E}$  es espacio vectorial no nulo, la aplicación  $\pi: \hat{E} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\hat{E})$

da estructura a  $P(\hat{E})$  de espacio proyectivo sobre  $\hat{E}$ , y se escribe  $P(\hat{E}) = (P(\hat{E}), \hat{E}, [\ ])$ .

3) En particular tomando  $\hat{E} = \hat{A}_n(K) = \hat{A}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$ , se denota a  $P(\hat{E})$  por  $P_n(K)$ , y se denomina modelo analítico n-dimensional de espacio proyectivo.

Los puntos de  $P_n(K)$  son de la forma  $\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  (se sobrentiende  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ )

El ejemplo 2) es el más general posible, como vamos a ver a continuación:

### 1.2.3 Proposición

Si  $E = (E, \hat{E}, \pi)$  es un espacio proyectivo, la aplicación  $I: E \ni e \mapsto \pi^{-1}(e) \cup \{0\} \in P(\hat{E})$  es aplicación biyectiva.

La demostración es la misma que la de 1.1.7

### 1.2.4 Observación

La biyección anterior, permite identificar en la practica cada punto  $e \in E$  con la recta vectorial  $I(e) = \pi^{-1}(e) \cup \{0\}$ ; En consecuencia si  $\hat{e} \in \hat{E} - \{0\}$  escribimos por abuso de notación  $\pi(\hat{e}) = [e]$ . Con éste convenio, podemos suponer que  $E$  es el espacio proyectivo  $P(\hat{E})$  descrito en 1.2.1 2), y escribimos  $E = P(\hat{E})$  cuando se sobrentienda  $\pi$ .

## 2. SUBESPACIOS

### 2.1 Definiciones

2.1.1 Sea  $X$  espacio afin. Si  $A$  es subespacio afin no vacío de  $X$ , entonces  $A$  es espacio afin, y cabe considerar su extensión proyectiva  $\tilde{A} = A \cup \infty_A = A \cup P(\vec{A})$ .

Si  $A$  es un punto, entonces  $\tilde{A} = \{0\}$  y convenimos en escribir  $P(\tilde{A}) = P(0) = \emptyset$ , y  $\tilde{A} = A$ . Si  $A = \emptyset$  convendremos en que  $\tilde{A} = \emptyset$ .

### 2.1.2 Definición

En las condiciones de 2.1.1 se dice que  $A$  es un subespacio proyectivo afin de  $X$ , y se denota por  $\mathcal{S}A(\tilde{X})$  a la familia de dichos subespacios (incluido el subespacio vacío  $\emptyset$ ).

La siguiente proposición pretende motivar la definición general de subespacio de un espacio proyectivo:

### 2.1.3 Proposición

Si  $\tilde{A}$  es un subespacio proyectivo afin de  $\tilde{X}$ , entonces  $\pi^{-1}(\tilde{A}) \cup \{0\} = \hat{A}$  es la extensión vectorial del subespacio afin  $A$  de  $X$ .

Demostración:

Si  $\hat{a} \in \pi^{-1}(\tilde{A})$  entonces  $\pi(\hat{a}) \in \tilde{A}$ , y hay dos posibilidades:

si  $\pi(\hat{a}) \in A$ , entonces  $a = \frac{1}{ms(\hat{a})} \hat{a} \in A \subset \hat{A}$ , y por tanto  $\hat{a} \in \hat{A}$ .

si  $\pi(\hat{a}) \in P(\bar{A})$  entonces  $\pi(\hat{a}) = [\hat{a}] \subset \bar{A}$ , y por tanto  $\hat{a} \in \bar{A} \subset \hat{A}$ .

La otra inclusión se demuestra de forma análoga.

Sea  $E = (E, \hat{E}, \pi)$  un espacio proyectivo y  $A$  un subconjunto de  $E$ . La proposición anterior sugiere la siguiente definición general:

#### 2.1.4 Definición

Se dice que  $A$  es un subespacio proyectivo de  $E$ , si  $\pi^{-1}(A) \cup \{0\} = \hat{A}$  es un subespacio vectorial de  $\hat{E}$ .

En estas condiciones la proyección  $\pi_A : \hat{A} - \{0\} \rightarrow A$  da estructura de espacio proyectivo (si  $A \neq \emptyset$ ) al conjunto  $A$ , y (si  $\dim A$  es finita)  $\dim A = \dim \hat{A} - 1$ .

Si  $A = \emptyset$  entonces  $\hat{A} = \{0\}$  y convenimos en asignar a  $A$  dimensión igual a  $-1$ .

Se denota por  $\mathcal{S}P(E)$  a la familia de subespacios proyectivos de  $E$ .

#### 2.1.5 Observaciones

1) Utilizando el abuso de notación establecido en 1.2.4, para un subespacio proyectivo  $A$  de  $E$  se tiene la igualdad  $A = P(\hat{A})$  siendo  $\hat{A} = \pi^{-1}(A) \cup \{0\}$ .

2) Los subespacios proyectivos afines de un espacio proyectivo afin  $X$  son subespacios proyectivos de  $X$ , es decir  $\mathcal{S}A(\tilde{X}) \subset \mathcal{S}P(\tilde{X})$ . Obsérvese que si  $A$  es subespacio afin de dimensión finita, se tiene  $\dim A = \dim \tilde{A} = \dim \hat{A} - 1$ .

#### 2.1.6 Proposición

Sea  $\bar{A}$  subespacio proyectivo del espacio proyectivo afin  $X$ . Si  $A = \bar{A} \cap X \neq \emptyset$ , entonces  $A$  es subespacio afin de  $X$ , y  $\tilde{A} = \bar{A}$ .

Demostración:

Por hipótesis es  $\pi^{-1}(\bar{A}) \cup \{0\} = \hat{\bar{A}}$  subespacio vectorial de  $\hat{X}$ . Si  $a \in \bar{A} \cap X$ , entonces  $a = \pi(a) \in \hat{\bar{A}} \cap X$ , y recíprocamente, si  $a \in \hat{\bar{A}} \cap X$  es  $a = \pi(a) \in \bar{A} \cap X$ , y se tiene por tanto:  $\emptyset \neq \bar{A} \cap X = \hat{\bar{A}} \cap X = A$ ; así por 1.4.1 (Cap VI)  $A$  es subespacio afin de  $X$  con extensión vectorial  $\hat{A}$ , y  $\pi^{-1}(\bar{A}) \cup \{0\} = \hat{\bar{A}} = \pi^{-1}(\hat{A}) \cup \{0\}$ . La igualdad  $\bar{A} = \tilde{A}$  se deduce de forma inmediata por la sobreyectividad de  $\pi$ .

#### 2.2 Reticulo de subespacios

$E = (E, \hat{E}, \pi)$  es un espacio proyectivo sobre el cuerpo  $K$ , y  $\mathcal{S}P(E)$  denota a la familia de sus subespacios.

Como cuestión previa se establece el siguiente resultado:

#### 2.2.1 Proposición

Si  $\mathcal{S}L(\hat{E})$  denota al reticulo de subespacios vectoriales de  $\hat{E}$ , entonces la aplicación  $\wedge : \mathcal{S}P(E) \ni A \mapsto \hat{A} = \pi^{-1}(A) \cup \{0\} \in \mathcal{S}L(\hat{E})$  es biyectiva.

denotando por  $P: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  a la inversa de  $\wedge$ , se verifica la identidad  $A = P(\hat{A})$  para cada  $A \in \mathcal{P}(E)$ . (Nótese que la igualdad  $A = P(\hat{A})$  es consistente con la identificación de 2.1.5. 1))

**Demostración**

La aplicación  $\wedge$  es claramente inyectiva. Veamos que es sobreyectiva:

Si  $V \in \mathcal{L}(E)$ , sea  $A = \pi(V - \{0\})$ . Entonces  $\hat{A} = \pi^{-1}(A) \cup \{0\} = V$ , ya que si  $v \in V - \{0\}$  es  $\pi(v) \in A$  y por tanto  $v \in \pi^{-1}(A)$ . Recíprocamente, si  $\hat{a} \in \pi^{-1}(A)$ , entonces  $\pi(\hat{a}) = a \in A = \pi(V - \{0\})$  y existe  $v \in V - \{0\}$  con  $a = \pi(v)$ . Así  $\hat{a}, v$  están en la recta vectorial  $\pi^{-1}(a) \cup \{0\}$  contenida en  $V$ . En particular  $a \in V$ .

Nótese que la aplicación  $P$  viene definida por  $P: \mathcal{L}(E) \ni V \mapsto \pi(V - \{0\}) \in \mathcal{P}(E)$ . Si  $V = 0$  entonces  $P(V) = \emptyset$ .

### 2.2.2 Teorema

Si  $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(E)$  es una familia de subespacios, entonces  $A = \bigcap_{i \in I} A_i$  es subespacio proyectivo de  $E$  y se verifica  $\hat{A} = \bigcap_{i \in I} \hat{A}_i$ .

**Demostración**

En efecto,  $\hat{A} = \pi^{-1}(A) \cup \{0\} = \pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} (\pi^{-1}(A_i) \cup \{0\}) = \bigcap_{i \in I} \hat{A}_i$ .

### 2.2.3 Definición

a) Si  $S$  es un subconjunto de  $E$ , se llama subespacio proyectivo generado por  $S$ , al subespacio  $\langle S \rangle$ , intersección de la familia de todos los subespacios proyectivos de  $E$  que contienen a  $S$ .  $\langle (a_1, \dots, a_r) \rangle \subset E$  se entiende  $\langle (a_1, \dots, a_r) \rangle = \langle \{a_1, \dots, a_r\} \rangle$

b) Si  $A$  y  $B$  son subespacios proyectivos de  $E$  se define la suma  $A+B = \langle A \cup B \rangle$ .

La estructura reticular de  $\mathcal{P}(E)$  viene establecida automáticamente por medio de la siguiente proposición:

### 2.2.4 Proposición

Si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ ,  $U, V \in \mathcal{L}(E)$  se verifica:

i)  $A \subset B \Leftrightarrow \hat{A} \subset \hat{B}$  ;  $U \subset V \Leftrightarrow P(U) \subset P(V)$

ii)  $\widehat{A+B} = \hat{A} + \hat{B}$  ;  $P(U+V) = P(U) + P(V)$

**Demostración**

i) Si  $A \subset B$ , es  $\pi^{-1}(A) \subset \pi^{-1}(B)$ , y por tanto  $\hat{A} \subset \hat{B}$ . Recíprocamente:

si  $\hat{A} \subset \hat{B}$  es  $\pi(\hat{A} - \{0\}) = A \subset B = \pi(\hat{B} - \{0\})$ .

ii) Como  $A \subset A+B$  y  $B \subset A+B$ , por i) se tiene  $\hat{A} \subset \widehat{A+B}$  y  $\hat{B} \subset \widehat{A+B}$ , por tanto  $\hat{A} + \hat{B} \subset \widehat{A+B}$ .

Por otra parte  $P(\widehat{A+B})$  contiene a  $P(\hat{A}) = A$  y a  $P(\hat{B}) = B$ , por tanto  $P(\widehat{A+B})$  contiene a  $A+B = P(\widehat{A+B})$ , es decir,  $\widehat{A+B} \supset A+B$ .

Las demás afirmaciones se deducen del hecho de ser  $\wedge$  biyectiva y  $P = \wedge^{-1}$



### 2.2.5 Corolario

$(\mathcal{L}P(E), +, \cap)$  es un retículo isomorfo (según la aplicación  $\wedge$ ) al retículo  $(\mathcal{L}L(\hat{E}), +, \cap)$  de subespacios vectoriales de  $E$ .

Consideremos ahora el espacio proyectivo afin  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{X}, \pi)$  con la familia de sus subespacios proyectivo-afines  $\mathcal{L}A(\tilde{X})$ :

### 2.2.6 Proposición

La aplicación  $\sim : \mathcal{L}A(X) \ni A \mapsto \tilde{A} \in \mathcal{L}A(\tilde{X})$  es una aplicación biyectiva, y se verifica para  $A, B \in \mathcal{L}A(X)$ :

- i) Si  $A \cap B \neq \emptyset$  entonces  $\widetilde{A \cap B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ , y  $\omega_{A \cap B} = \omega_A \cap \omega_B$ .
- ii)  $A \subset B \Leftrightarrow \tilde{A} \subset \tilde{B}$
- iii)  $\widetilde{A+B} = \tilde{A} + \tilde{B}$

#### Demostración

La biyectividad de la aplicación  $\sim$  es evidente.

i) Si  $A \cap B \neq \emptyset$  entonces por . . . (Cap ) es  $\overrightarrow{A \cap B} = \overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{B}$ , y se tiene:

$$\omega_{A \cap B} = P(\overrightarrow{A \cap B}) = P(\overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{B}) = \omega_A \cap \omega_B, \text{ y por tanto}$$

$$\widetilde{A \cap B} = (A \cap B) \cup \omega_{A \cap B} = (A \cap B) \cup (\omega_A \cap \omega_B) = (A \cup \omega_A) \cap (B \cup \omega_B) = \tilde{A} \cap \tilde{B}.$$

ii)  $A \subset B \Leftrightarrow \hat{A} \subset \hat{B} \Leftrightarrow P(\hat{A}) \subset P(\hat{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} \subset \tilde{B}$ .

iii) es consecuencia de ii)

### 2.2.7 Observación

Para un espacio afin  $X$  de dimensión  $> 1$ ,

la familia  $\mathcal{L}A(\tilde{X})$  con las operaciones  $+$  y  $\cap$  no tiene estructura de retículo.

Así por ejemplo dos rectas paralelas se cortan en un punto del infinito que no es subespacio proyectivo-afin

## 2.3 Fórmulas de dimensión

Si  $A$  es subespacio del espacio proyectivo  $E$ ; y la dimensión de  $A$  es finita, entonces  $\dim A = \dim \hat{A} - 1$ , es decir  $\dim P(\hat{A}) = \dim \hat{A} - 1$  para cada subespacio vectorial de  $\hat{E}$ . Este hecho y el teorema 2.2.4 permiten establecer trivialmente el siguiente resultado:

### 2.3.1 Teorema

Si  $A$  y  $B$  son subespacios proyectivos de  $E$  con dimensión finita, entonces el subespacio  $A+B$  tiene dimensión finita, y se verifica:

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

#### Demostración

Sea  $A = P(\hat{A})$ ,  $B = P(\hat{B})$ . Por la fórmula de dimensiones para subespacios vectoriales

(4.3 Cap I) se tiene  $\dim(\hat{A} + \hat{B}) = \dim \hat{A} + \dim \hat{B} - \dim(\hat{A} \cap \hat{B})$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \dim(A+B) &= \dim(P(\hat{A}) + P(\hat{B})) = \dim(P(\hat{A} + \hat{B})) = \dim(\hat{A} + \hat{B}) - 1 = (\dim \hat{A} - 1) + (\dim \hat{B} - 1) - \\ &- (\dim(\hat{A} \cap \hat{B}) - 1) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B). \end{aligned}$$

### 2.3.2 Corolario

a) Si  $\dim E = n$ ,  $\dim A = p$ ,  $\dim B = q$  y  $\dim (A \cap B) = r$  entonces:

$$\max(-1, p+q-n) \leq r \leq \min(p, q) \quad (1)$$

b) Recíprocamente, si  $p, q$  son números enteros con  $-1 \leq p \leq n$ ,  $-1 \leq q \leq n$ , y  $E$  es espacio proyectivo  $n$ -dimensional, entonces para cada entero  $n$  verificando las desigualdades (1), existen  $A$  y  $B$  subespacios proyectivos de  $E$  tales que  $\dim A = p$ ,  $\dim B = q$ , y  $\dim (A \cap B) = r$ .

La demostración es evidente del resultado análogo (4.3.3 Cap I) para subespacios vectoriales.

### 2.3.3 Observación

La fórmula de dimensiones 2.3.1 para subespacios proyectivos, contiene implícitamente la correspondiente fórmula para subespacios de un espacio afín:

Si  $A, B$  son subespacios del espacio afín  $X$  con  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $\tilde{A} \cap \tilde{B} = P(\tilde{A}) \cap P(\tilde{B}) = P(\tilde{A} \cap \tilde{B})$ , y  $\dim(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \dim(\tilde{A} \cap \tilde{B}) - 1$ , así  $\dim(A+B) = \dim(\tilde{A} + \tilde{B}) = \dim(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \dim \tilde{A} + \dim \tilde{B} - \dim(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \dim A + \dim B - \dim(\tilde{A} \cap \tilde{B}) - 1$ .

Cuando  $A \cap B \neq \emptyset$  la fórmula se deduce trivialmente de 2.2.6 i)

## 3. CORRESPONDENCIAS ENTRE ESPACIOS PROYECTIVOS

$E = (E, \hat{E}, \pi)$ ,  $E' = (E', \hat{E}', \pi')$  denotan espacios proyectivos sobre los cuerpos  $K$  y  $K'$  respectivamente.

Las técnicas de traducción proyectiva de elementos de la geometría vectorial, y de extensión proyectiva de elementos de la geometría afín, utilizados en epígrafe anterior, se desarrollan ahora en forma paralela para el estudio de las correspondencias naturales entre espacios proyectivos.

### 3.1 Conceptos preliminares

Sea  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  una aplicación semilineal con núcleo  $\ker \hat{f} = \hat{N} \neq \hat{E}$ . Si  $\hat{x} \in \hat{E} - \hat{N}$  entonces  $\hat{f}$  transforma la recta vectorial  $[\hat{x}]$  en la recta vectorial  $[\hat{f}(\hat{x})]$ , e induce por tanto una aplicación natural  $f: P(\hat{E}) - P(\hat{N}) \rightarrow P(\hat{E}')$ . Esto motiva la siguiente definición

#### 3.1.1 Definición

Sea  $N = P(\hat{N})$  subespacio proyectivo de  $E$  ( $N \neq E$ ). Una correspondencia semilineal proyectiva de  $E$  en  $E'$  con centro  $N$ , es una aplicación  $f: E - N \rightarrow E'$  tal que existe  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  aplicación semilineal con  $\ker \hat{f} = \hat{N}$  de forma que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E - N & \xrightarrow{f} & E' \\ \uparrow \pi & & \uparrow \pi' \\ \hat{E} - \hat{N} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{E}' - \{\emptyset\} \end{array}$$

...commutativo, es decir  $f(x) = \lambda f(x)$ , o tambien  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  para todo  $\lambda \in E-N$ .

### 1.2 Definición

En las mismas condiciones de 3.1.1 :

a) Si  $N \neq \emptyset$  se llama a  $f$  aplicación semilineal proyectiva.

Nótese que en este caso es  $\hat{N} = \{0\} = \ker \hat{f}$ , y por tanto  $f: E \rightarrow E'$  es una aplicación inyectiva.

b) Una aplicación semilineal proyectiva y suprayectiva, se denomina semihomografía.

Obviamente se suprimirá el prefijo "semi" cuando  $\hat{f}$  sea lineal.

c) En particular las homografías de  $E$  en si mismo se denominan transformaciones proyectivas

d) Si escribimos  $\pi(\hat{f}) = f$ , entonces  $\pi$  define una aplicación de  $FL(\hat{E}, \hat{E}') - \{0\}$  en el conjunto de correspondencias proyectivas de  $E$  en  $E'$  que denotamos por  $CP(E, E')$ .

### 1.3 Ejemplos

a) Si  $E$  es un espacio vectorial tridimensional, y  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}$  es una proyección vectorial con base el plano  $\hat{R}$  y dirección la recta  $\hat{N}$ , entonces  $N = P(\hat{N})$  es un punto de  $P(E)$ , y  $R = P(\hat{R})$  es una recta proyectiva. La aplicación  $f = \pi(\hat{f})$  de  $E-N$  en  $E$  transforma cada punto  $x \in E-N$  en  $\langle N, x \rangle \cap R$ .

Se trata de la proyección cónica de centro  $N$  y base  $R$ . Más adelante haremos un estudio general de éste tipo de correspondencias.

b) Una correspondencia proyectiva  $f$  entre  $P_n(K)$  y  $P_m(K)$  viene definida por una matriz  $\hat{A} \in FL(n+1, m+1)$  de forma que:

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \left[ \hat{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right] \text{ siempre que } A \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ sea no nulo.}$$

Probaremos que el conjunto  $CP(E, E')$  de correspondencias proyectivas de  $E$  en  $E'$  tiene estructura natural de espacio proyectivo:

### 1.4 Teorema

a) Si  $f: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  es aplicación lineal no nula, entonces para todo  $\lambda \in K - 0$  es  $\pi(\lambda \hat{f}) = \pi(\hat{f})$ .

b) Recíprocamente, si  $\varphi, \psi \in FL(\hat{E}, \hat{E}')$  verifican  $\pi(\varphi) = \pi(\psi)$  entonces existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\psi = \lambda \varphi$ .

Demostración:

a) Claramente es  $\ker \hat{f} = \ker(\lambda \hat{f})$ , y para cada  $\hat{x} \in \hat{E} - \hat{N}$  se verifica  $[\hat{f}(\hat{x})] = [\lambda \hat{f}(\hat{x})] = [(\lambda \hat{f})(\hat{x})]$ . Esto prueba la afirmación.

b) Por hipótesis  $\ker \varphi = \ker \psi = \hat{N}$ , y para todo  $\hat{x} \in \hat{E} - \hat{N}$  se verifica:  $[\varphi(\hat{x})] = [\psi(\hat{x})]$ , es decir,  $\varphi(\hat{x}) = \lambda_{\hat{x}} \psi(\hat{x})$  para cierto  $\lambda_{\hat{x}} \in K - \{0\}$ .

Se probará que  $\lambda_{\hat{x}} = \lambda \in K - 0$  para todo  $\hat{x} \in \hat{E} - \hat{N}$ . En efecto, sea  $\hat{M}$  un complementario en  $\hat{E}$  de  $\hat{N}$ , es decir,  $\hat{E} = \hat{N} \oplus \hat{M}$ . Si  $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{M} - \{0\}$ , llamando  $\alpha = \lambda_{\hat{x}}$ ,  $\beta = \lambda_{\hat{y}}$ , es fácil probar que  $\alpha = \beta$  si  $(\hat{x}, \hat{y})$  es l.d. Cuando  $(\hat{x}, \hat{y})$  es l.i, se verifica que  $(\varphi(\hat{x}), \varphi(\hat{y}))$  es l.i (pues si  $0 = \mu \varphi(\hat{x}) + \nu \varphi(\hat{y})$ , es  $\mu \hat{x} + \nu \hat{y} \in \hat{N} \cap \hat{M} = 0$ ). Sea  $\gamma = \lambda_{\hat{x} + \hat{y}}$ , se tiene:

$\alpha \varphi(\hat{x}) + \beta \varphi(\hat{y}) = \varphi(\hat{x} + \hat{y}) = \gamma \varphi(\hat{x}) + \gamma \varphi(\hat{y})$ , por lo que  $\alpha = \beta = \gamma$ , y por tanto  $\lambda_{\hat{m}} = \lambda$  para todo  $\hat{m} \in \hat{M}$ .

Finalmente, si  $\hat{x} \in \hat{E} - \{0\}$ , escribimos  $\hat{x} = \hat{n} + \hat{m}$  con  $\hat{n} \in \hat{N}$ ,  $\hat{m} \in \hat{M}$ , y se verifica  $\varphi(\hat{x}) = \varphi(\hat{n}) + \varphi(\hat{m}) = 0 + \lambda \varphi(\hat{m}) = \lambda \varphi(\hat{n} + \hat{m}) = \lambda \varphi(\hat{x})$ .

### 1.5 Observación

El teorema 3.1.4 admite una versión obvia para correspondencias semilineales proyectivas, cuyo enunciado y demostración dejamos al lector como ejercicio. El siguiente resultado es inmediato a partir de 3.1.4

### 1.6 Corolario

La aplicación  $\pi: FL(\hat{E}, \hat{E}') - \{0\} \rightarrow CP(E, E')$  define en  $CP(E, E')$  una estructura de espacio proyectivo.

Identificando como en 1.2.4  $f$  con  $\pi^{-1}(f) \cup \{0\}$ , para  $f \in CP(E, E')$ , podemos escribir  $f = [\hat{f}]$  donde  $\pi(\hat{f}) = f$ , y así puede establecerse la fórmula general:

$$[f](\hat{x}) = [\hat{f}(\hat{x})]$$

que refleja todo el contenido de 3.1, si se utiliza el convenio 1.1.5

## 3.2 Correspondencias proyectivas y subespacios

$f = [\hat{f}]$  denota una correspondencia semilineal proyectiva con centro  $N = P(\hat{N})$ , entre los espacios proyectivos  $E$  y  $E'$ .

3.2.1 Definición

a) Si A es un subespacio proyectivo de E no contenido en N, se llama imagen por f de A, y se denota por f(A) al conjunto {f(x) / x ∈ A-N}. Si A ⊂ N escribimos f(A) = ∅.

b) Si A' es subespacio proyectivo de E', se denomina imagen inversa por f de A', y se denota por f<sup>-1</sup>(A') al conjunto {x ∈ E / f(x) ∈ A', ó x ∈ N}.

Probaremos que f(A) y f<sup>-1</sup>(A') son subespacios proyectivos.

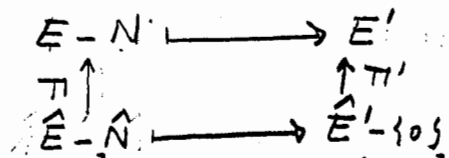
3.2.2 Teorema

Sean A y A' subespacios proyectivos de E y E' respectivamente. Entonces:

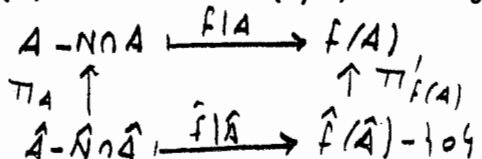
- 1) f(A) es subespacio proyectivo de E' y  $\widehat{f(A)} = \widehat{f(\widehat{A})}$ . Además si f(A) ≠ ∅, la aplicación f/A: A-(A ∩ N) → f(A) es correspondencia proyectiva de A en f(A) con centro A ∩ N, y f/A = [f/Ā].
- 2) f<sup>-1</sup>(A') es subespacio proyectivo de E, y  $\widehat{f^{-1}(A')} = \widehat{f^{-1}(\widehat{A'})}$ .

Demostración:

Teniendo en cuenta la conmutatividad del diagrama de abajo, se tiene:

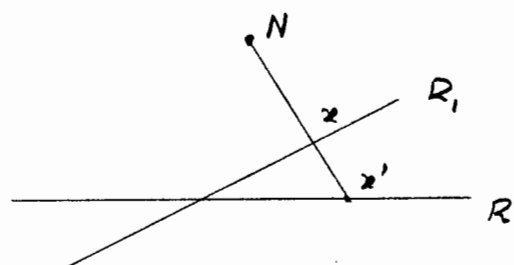


1)  $\pi^{-1}(f(A) \cup \{0\}) = \pi^{-1}(f(A-N) \cup \{0\}) = \widehat{f}(\pi^{-1}(A-N) \cup \{0\}) = \widehat{f}(\pi^{-1}(A) - \pi^{-1}(N) \cup \{0\}) = \widehat{f}(\widehat{A} - \widehat{N}) \cup \{0\} = f(\widehat{A} - \widehat{N}) \cup \widehat{N} = \widehat{f(\widehat{A})}$ . Además  $\ker(\widehat{f/\widehat{A}}) = \widehat{N} \cap \widehat{A}$  y f/A verifica la conmutatividad del diagrama:



2)  $\pi^{-1}(f^{-1}(A') \cup \{0\}) = \pi^{-1}(f^{-1}(A') \cup N) \cup \{0\} = \pi^{-1}(f^{-1}(A')) \cup \widehat{N} = \widehat{f^{-1}(\pi^{-1}(A'))} \cup \widehat{N} = \widehat{f^{-1}(\widehat{A'} - \{0\})} \cup \widehat{f^{-1}(0)} = \widehat{f^{-1}(\widehat{A'})}$

3.2.3 Comentario



Si A ∩ N = ∅ la aplicación f/A: A → f(A) es una semi-homografía. Así en el ejemplo 3.1.3, la proyección cónica en el plano proyectivo de centro el punto N y base la recta R, induce homografías de R1 en R para cualquier recta R1 que no pase por el punto N.

3.2.4 Corolario

Si E es de dimensión finita, entonces dim f(E) + dim N = dim E - 1.

Demostración:

Es consecuencia de la fórmula dim(im f) + dim Ker(f) = dim E, y de 3.2.2

3.2.5 Proposición

a) Si A y B son subespacios proyectivos de E, entonces f(A+B) = f(A) + f(B)

$$f^{-1}(A' + B') = f^{-1}(A') + f^{-1}(B')$$

- c) Si  $(a_1, \dots, a_r)$  es un sistema de puntos de  $E$ , entonces  $f(\langle a_1, \dots, a_r \rangle) = \langle f(a_1), \dots, f(a_r) \rangle$  en donde se sobreentiende que si  $a_i \in N$ , es  $f(a_i) = \emptyset$ .

Demostración:

a)  $\widehat{f(A+B)} = \widehat{f(A+B)} = \widehat{f(\widehat{A+B})} = \widehat{f(\widehat{A}) + f(\widehat{B})} = \widehat{f(A) + f(B)}$ . El resultado se obtiene por la biyectividad de  $\widehat{\phantom{x}}$ .

b) Se prueba de forma análoga

c) Por inducción se prueba trivialmente a partir de a) que para  $A_i$  subespacios de  $E$ , es  $f(A_1 + \dots + A_r) = f(A_1) + \dots + f(A_r)$ . Tomando  $A_i = a_i$  se obtiene la conclusión buscada.

### 3.2.5 Observación

En particular se deduce que una semihomografía transforma rectas proyectivas en rectas proyectivas. La afirmación recíproca es en general cierta y constituye el segundo teorema fundamental de la geometría proyectiva.

### 2.6 Proyecciones cónicas

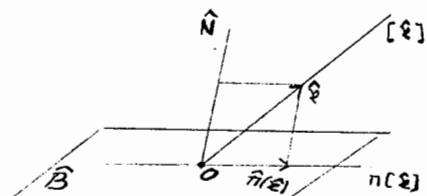
Sean  $B$  y  $N$  dos subespacios complementarios de  $E$ , es decir,  $B + N = E$  y  $B \cap N = \emptyset$ .

Para cada  $x \in E - N$ , por el teorema de incidencia 2.3.1 se ve que

$(x + N) \cap B$  es un punto de  $E$ . La aplicación  $\pi: E - N \ni x \mapsto (x + N) \cap B \in B \subset E$  define una correspondencia proyectiva en  $E$  que denominamos proyección cónica de centro  $N$  y bas  $B$ . En efecto:

Las condiciones  $B + N = E$  y  $B \cap N = \emptyset$  se traducen vectorialmente en la fórmula  $B \oplus N = E$ . Sea  $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}$  la proyección vectorial sobre  $B$  con dirección  $N$ . Probaremos que  $\pi = [\hat{\pi}]$ .

Si  $x = [\hat{x}] \in E - N$ , es  $\hat{\pi}(\hat{x}) \in ([\hat{x}] \oplus \hat{N}) \cap \hat{B}$ , y  $[\hat{\pi}(\hat{x})] \in P([\hat{x}] \oplus \hat{N}) \cap \hat{B} = (x + N) \cap B = \pi(x)$ .



### 3.3 Extensión proyectiva de aplicaciones semiafines

#### 3.3.1 Definición

Sea  $f: X \rightarrow X'$  una aplicación semiafin. Una correspondencia semilineal proyectiva  $\tilde{f}$  de  $\tilde{X}$  en  $\tilde{X}'$  se denomina extensión proyectiva de  $f$ , si  $\tilde{f}/X = f: X \rightarrow X'$ .

#### 3.3.2 Teorema

Dada la aplicación semiafin  $f: X \rightarrow X'$  existe una única extensión proyectiva  $\tilde{f}$  para  $f$ . Por otra parte se verifica:

- i)  $f/\omega_x = [f]$  si  $f$  no es constante
- ii) Si  $f$  es constante, el centro de  $f$  es  $\omega_x$
- iii)  $f = [\hat{f}]$  siendo  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$  la extensión vectorial de la aplicación semiafin  $f$ .

Demostración:

Sea  $\vec{N} = \ker \vec{f}$ ,  $N = P(\vec{N})$ . Supóngase que existe la extensión proyectiva  $\tilde{f}$  de  $f$ , y probemos que  $\tilde{f}/\omega_x$  queda unívocamente determinada por  $\vec{f}$ .

Sea  $\alpha \in \omega_x$  y  $R$  una recta afin de  $X$  con dirección  $\vec{R} = \alpha$ ;

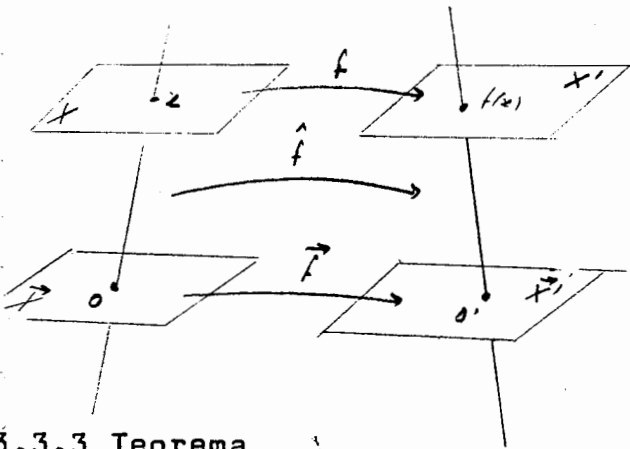
a) Si  $\alpha \notin N$  entonces  $f(R)$  es una recta afin de  $X'$  con dirección  $\vec{f(R)} = \vec{f}(\vec{R}) = \alpha'$  y  $\alpha' = [\vec{f}](\alpha)$ . Por otra parte  $\tilde{f}(\tilde{R}) = \tilde{f}(R \cup \{\alpha\}) = f(R) \cup \{\tilde{f}(\alpha)\}$  es una recta proyectiva de  $X'$  que tiene al menos dos puntos comunes distintos con la recta proyectiva  $\tilde{f}(\tilde{R}) = f(R) \cup \{\alpha'\}$ . Por tanto  $\tilde{f}(\tilde{R}) = \tilde{f}(\tilde{R})$  y  $\alpha' = [\vec{f}](\alpha) = \hat{f}(\alpha)$ .

b) Si  $\alpha \in N$ , y  $a \in R$  entonces  $f(R)$  consta de un único punto  $f(a)$ , y  $\tilde{f}(\tilde{R}) = \tilde{f}(R \cup \{\alpha\}) = f(a) \cup \{\tilde{f}(\alpha)\}$  es subespacio proyectivo de  $X'$ . Como no existen subespacios proyectivos formados solo por dos puntos, se concluye que ó bien  $f(a) = \tilde{f}(\alpha)$  ó bien  $\tilde{f}(\alpha) = \emptyset$ . Probemos que solo ésta posibilidad es factible:

Si  $\tilde{f}(\alpha) \neq \emptyset$ , el razonamiento anterior sirve para probar que  $f(x) = \tilde{f}(\alpha) \in X'$  para todo  $x \in X$ , y se concluye que  $f: X \rightarrow X'$  es aplicación constante  $\vec{N} = \ker \vec{f} = \vec{X}$ , y  $f(X)$  es un único punto de  $X'$ . Por 3.2.4 el centro  $M$  de  $\tilde{f}$  es un hiperplano de  $\tilde{X}$ , y está contenido en  $\omega_x$  (ya que  $f$  está definida en todos los puntos de  $X$ ) por tanto  $M = \omega_x = N$  y  $f(\alpha) = \emptyset$ .

Esto prueba la unicidad de  $f$ , y los apartados i) y ii) del teorema.

Para concluir la demostración es suficiente probar que  $[\hat{f}]$  es una extensión proyectiva de  $f$ :



Para cada  $x \in X$  (identificando  $x$  con  $[x]$ ) se verifica:  $[\hat{f}]( [x] ) = [\hat{f}(x)] = [f(x)] = f(x)$ .

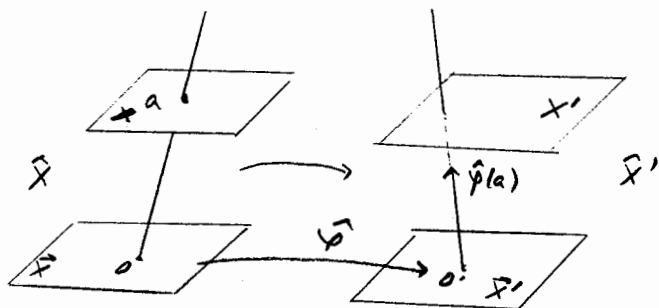
El siguiente resultado es una caracterización de las correspondencias semilineales proyectivas que son extensión proyectiva de aplicaciones semiafines:

### 3.3.3 Teorema

Si  $\varphi$  es una correspondencia semilineal proyectiva de  $\tilde{X}$  en  $\tilde{X}'$  tal que  $\varphi(\omega_x) \subset \omega_{x'}$  y  $\varphi(X) \not\subset \omega_{x'}$ , entonces existe  $f$  (única) aplicación semiafin de  $X$  en  $X'$  tal que  $\tilde{f} = \varphi$ .

Demostración:

Sea  $\varphi = [\hat{\varphi}]$ ,  $\hat{\varphi}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$  semilineal. La condición  $\varphi(\infty_X) \subset \infty_{X'}$  implica que  $\hat{\varphi}(\vec{X}) \subset \vec{X}'$ , y la condición  $\varphi(X) \not\subset \infty_X$  permite concluir que existe



$a \in X$  tal que  $\hat{\varphi}(a) \notin \vec{X}'$ ; Multiplicando  $\hat{\varphi}$  por una constante adecuada ( $\lambda' = \frac{1}{ms'(\hat{\varphi}(a))}$ ) podemos suponer que  $\hat{\varphi}(a) \in X'$  manteniendo la igualdad  $\varphi = [\hat{\varphi}]$ . Para cada  $x \in X$  se tiene:  $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(a + \vec{ax}) = \hat{\varphi}(a) + \hat{\varphi}(\vec{ax}) \in X'$ .

Así  $\varphi(X) \subset X'$  y por . . .  $\hat{\varphi}/X = f: X \rightarrow X'$  es aplicación semiafin con extensión vectorial  $\hat{\varphi}$ . Por 3.3.2 iii) es  $\hat{f} = [\hat{\varphi}]$ .

### 3.3.4 Proposición

Si  $f: X \rightarrow X'$  es aplicación semiafin,  $A$  subespacio afin de  $X$  y  $A'$  subespacio afin de  $X'$  se verifica:

- i)  $\widehat{f(A)} = \widehat{f(A')}$
- ii)  $\widehat{f^{-1}(A')} = \widehat{f^{-1}(A')}$

Demostración:

i) Teniendo en cuenta que  $\widehat{\hat{f}} = \hat{f}$  y  $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$  se tiene:  $\widehat{f(A)} = \widehat{\widehat{f(A)}} = \widehat{\widehat{f(A')}} = \widehat{\widehat{f(A')}} = \widehat{f(A')}$ , y así  $\widehat{f(A)} = \widehat{f(A')}$ .

La demostración de ii) es análoga.

### 3.4 Composición de correspondencias semilineales proyectivas

Sean  $f$  y  $g$  correspondencias semilineales proyectivas de centros respectivos  $N$  y  $N'$ ,  $f: E - N \rightarrow E'$ ,  $g: E' - N' \rightarrow E''$ . Se verifica el siguiente resultado:

#### 3.4.1 Teorema

Si  $f^{-1}(N') \not\subset E$  entonces la composición de aplicaciones  $g \circ f$  define una correspondencia semilineal proyectiva de  $E$  en  $E''$  con centro  $f^{-1}(N')$ . Además si  $f = [\hat{f}]$ ,  $g = [\hat{g}]$  se verifica  $g \circ f = [\hat{g} \circ \hat{f}]$ .

Demostración:

Nótese que  $\hat{g} \circ \hat{f}(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{x}) \in \widehat{N'} \Leftrightarrow \hat{x} \in \widehat{f^{-1}(N')} = \widehat{f^{-1}(N')}$ , y se tiene para  $x = [\hat{x}] \in E - f^{-1}(N')$ :

$(g \circ f)(x) = g([\hat{f}(\hat{x})]) = [(\hat{g} \circ \hat{f})(\hat{x})]$  y así  $g \circ f = [\hat{g} \circ \hat{f}]$  es correspondencia semilineal proyectiva.

Los resultados que siguen tienen ya demostración casi inmediata

#### 3.4.2 Corolario

i) La composición de aplicaciones (semilineales) proyectivas, es apli-



cación (semilineal) proyectiva.

ii) La composición de (semi)homografías es (semi)homografía.

### 3.4.3 Corolario

El conjunto  $GP(E)$  de transformaciones proyectivas de un espacio proyectivo  $E$ , tiene estructura de grupo respecto a la composición de aplicaciones. El operador  $[ ]: GL(\hat{E}) \ni \hat{f} \mapsto [\hat{f}] \in GP(E)$  es un homomorfismo suprayectivo de grupos cuyo núcleo es el subgrupo  $Z(\hat{E})$  de homotecias vectoriales de  $E$ .

### 3.4.4 Corolario

Sean  $f: X \rightarrow X'$   $g: X' \rightarrow X''$  aplicaciones semiafines. Entonces  $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$

Demostración

$$\widetilde{g \circ f} = [\hat{g} \circ \hat{f}] = [\hat{g}] \circ [\hat{f}] = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$$

### 3.4.5 Corolario

Dado  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \omega_X)$  espacio proyectivo afin, el conjunto de transformaciones  $GA(\tilde{X}) = \{ \tilde{f} / f \in GA(X) \}$  es un subgrupo del grupo de transformaciones proyectivas  $GP(X)$ , isomorfo al grupo afin  $GA(X)$ .

Por otra parte  $GA(\tilde{X}) = \{ \varphi \in GP(X) / \varphi(\omega_X) = \omega_X \}$ .

Demostración

Es consecuencia inmediata de 3.4.4 y 3.3.3

### 3.4.6 Observaciones

a) El grupo proyectivo  $GP(E)$  establece una actuación natural sobre el conjunto  $\mathcal{P}(E)^r$  de  $r$ -tuplas ordenadas de subespacios.

Un invariante completo de la clasificación para  $r=1$  es la dimensión.

Para  $r=2$  las diferentes clases describen las posibles posiciones relativas entre dos subespacios descritas ya en 2.3.2. Estas afirmaciones se deducen de forma inmediata a partir de . . . (Cap . . .)

b) La geometría proyectivo afin de un espacio afin  $X$  viene definida por el grupo  $GA(\tilde{X})$  subgrupo de  $GP(\tilde{X})$ . En virtud de 3.4.5, la geometría proyectivo afin es la propia geometría afin mirada desde un punto de vista proyectivo. Todos los teoremas y conceptos de la geometría afin desarrollados en la sección precedente, tienen una traducción precisa en el lenguaje proyectivo afin.

Por otra parte en  $\tilde{X}$  puede hablarse de propiedades ó conceptos afines (invariantes por  $GA(\tilde{X})$ ) y proyectivos (invariantes por  $GP(\tilde{X})$ ). La razón simple es un ejemplo de concepto afin no proyectivo. El concepto de subespacio es proyectivo (y por tanto afin)

Los sistemas de coordenadas homogéneos permiten representar en forma analítica los elementos de la geometría proyectiva de un espacio abstracto de dimensión finita  $n$ , y describirlos como elementos de la geometría proyectiva de los modelos analíticos  $P_n(K)$ .

Estos sistemas de coordenadas deducidos inicialmente a partir de bases vectoriales, se pueden obtener a través de ciertos sistemas de puntos denominados sistemas de referencia proyectivos, que desempeñan en geometría proyectiva el mismo papel que los sistemas de referencia afín en geometría afín. A partir de aquí se establece de forma natural una versión proyectiva del primer teorema fundamental, que aplicado al caso de rectas proyectivas da lugar al invariante "razón doble" que es característico de una estructura proyectiva.

Por otra parte, los sistemas de coordenadas naturales en un espacio afín dan lugar a sistemas de coordenadas homogéneos sobre su extensión proyectiva, y establecen la geometría analítica proyectivo afín, que será desarrollada en forma paralela a lo largo del capítulo.

$E=(E, \mathcal{E}, \pi)$  denota un espacio proyectivo, y  $X=(X, \mathcal{X})$  un espacio proyectivo afín, ambos definidos sobre el cuerpo  $K$ , y de dimensión finita  $n$ .

## 1. SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE COORDENADAS

### 1.1 Coordenadas homogéneas inducidas por una base vectorial

Sea  $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  base vectorial de  $\hat{E}$ , y  $\hat{h} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \hat{E} \ni \hat{e} \mapsto \begin{pmatrix} x_0(\hat{e}) \\ \vdots \\ x_n(\hat{e}) \end{pmatrix} \in \hat{A}_n(K)$

el isomorfismo de coordenadas definido por la igualdad:

$$\hat{e} = \sum_{i=0}^n x_i(\hat{e}) \hat{e}_i \quad \text{para } \hat{e} \in \hat{E}$$

#### 1.1.1 Definición

A la homografía  $h = [\hat{h}] = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : E \mapsto P_n(K)$  se denomina sistema de coordenadas homogéneas inducido en  $E$  por la base vectorial  $\hat{\mathcal{E}}$

#### 1.1.2 Observación

De la definición anterior se deduce inmediatamente la siguiente equivalencia para cada  $e \in E$ :

$$h(e) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow e = [\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n]$$

Sean  $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$   $\hat{\mathcal{E}}' = (e'_0, \dots, e'_n)$  dos bases de  $\hat{E}$ . Entonces, los sistemas de coordenadas homogéneas  $h$  y  $h'$  inducidos por  $\hat{\mathcal{E}}$  y  $\hat{\mathcal{E}}'$  coinciden si y solo si existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{\mathcal{E}}' = \lambda \hat{\mathcal{E}}$  (es decir  $e'_i = \lambda e_i$  para  $i=0, \dots, n$ )

Demostración

Si  $\hat{\mathcal{E}}' = \lambda \hat{\mathcal{E}}$  para  $\lambda \neq 0$  entonces  $\lambda \hat{h}' = \hat{h}$ , y  $h = [\hat{h}] = [\lambda \hat{h}'] = [h] = h'$ .

Recíprocamente: si  $h = h'$  por 3.1.4 (Cap VIII) se deduce que existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $\hat{h} = \lambda \hat{h}'$ . En particular se tiene,  $\hat{h}(\hat{e}'_i) = \lambda \hat{h}'(\hat{e}'_i) =$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es decir } \hat{e}'_i = \lambda \hat{e}_i \text{ para cada } i=0, \dots, n.$$

#### 1.1.4 Observación

Si  $\hat{\mathcal{E}}$  es base de  $\hat{E}$ , se escribe  $\mathcal{E} = [\hat{\mathcal{E}}] = \{\lambda \hat{\mathcal{E}} / \lambda \in K - \{0\}\}$ . Por la proposición anterior, cada  $\mathcal{E}$  se corresponde biunívocamente con un sistema de coordenadas homogéneas.

#### 1.1.5 Ejemplo

La base canónica  $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{I}_0, \dots, \hat{I}_n)$  de  $\hat{A}_n$  da lugar a un sistema de coordenadas homogéneas  $h: P_n \rightarrow P_n$  tal que  $h \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_u \end{bmatrix}$  para todo  $\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_u \end{bmatrix} \in P_n$

#### 1.1.6 Coordenadas homogéneas cartesianas

Un sistema de referencia afin  $\hat{\mathcal{E}} = (e_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  en el espacio afin  $X$  con coordenadas cartesianas:

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : X \rightarrow A_n$$

induce un sistema de coordenadas (cartesianas) homogéneas  $\tilde{h} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  en  $X$ , ya que  $\hat{\mathcal{E}}$  es base de  $\hat{X}$ .  $\tilde{h}$  es justamente la extensión proyectiva del isomorfismo afin  $h$ , y se tiene:

$$\text{Si } a \in X \quad h(a) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_u \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = [\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_u e_n] = e_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e_1 + \dots + \frac{\lambda_u}{\lambda_0} e_n$$

$$\text{Si } \alpha \in \infty_X, \quad h(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = [\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_u e_n]$$

Por tanto  $x_i = \frac{x_i}{x_0}$  para  $i=1, \dots, n$  para puntos del espacio afin  $X$ .

Al fijar el sistema de coordenadas homogéneas cartesianas podemos pasar a trabajar (por medio de  $\tilde{h}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{A}_n$ ) sobre el modelo analítico  $\tilde{A}_n$ .

### 1.1.7 Coordenadas homogéneas baricéntricas

Sea  $\xi = (e_0, \dots, e_n)$  un sistema de referencia afín sobre el espacio  $X$  con coordenadas baricéntricas  $h = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : X \rightarrow B_n$  (véase . . . (Cap . . .))

Como  $\xi$  es base de  $\hat{X}$ , induce un sistema  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{B}_n$  de coordenadas homogéneas (baricéntricas). La relación entre ambos sistemas de

coordenadas viene dada por  $x_i = \frac{x_i}{\sum_{j=0}^n x_j}$  para puntos del espacio afín  $X$ .

Fijado el sistema de coordenadas homogéneas baricéntricas en  $X$  podemos pasar a trabajar al modelo baricéntrico proyectivo afín  $\tilde{B}_n = (\tilde{B}_n, \infty_{B_n})$

donde:  $B_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum_{i=0}^n x_i \neq 0 \right\}$

$\tilde{B}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$ ,  $\infty_{B_n} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum_{i=0}^n x_i = 0 \right\}$

## 1.2 Dependencia e independencia proyectiva

### 1.2.1 Definición

- Sea  $\xi = (e_0, \dots, e_r)$  un sistema de puntos de  $E$
- Se dice que el punto  $e \in E$  depende proyectivamente de  $\xi$  si  $e \in \langle \xi \rangle$  se escribe entonces  $e$  d.p.  $\xi$ .
  - El sistema  $\xi$  se dice proyectivamente dependiente, si existe  $e \in \xi$  tal que  $e$  d.p.  $(\xi - (e))$ , y escribimos entonces  $\xi$  p.d.
  - Se dice que el sistema  $\xi$  es proyectivamente independiente (p.i) si no es proyectivamente dependiente.

La dependencia e independencia proyectiva, está íntimamente ligada a la dependencia e independencia vectorial, tal como se indica a continuación:

### 1.2.2 Teorema

Sea  $\xi = (e_0, \dots, e_r)$  un sistema de puntos de  $E$ . Supóngase  $e_i = [\hat{e}_i]$  para  $i=0, \dots, r$  y sea  $\hat{\xi} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_r)$ . Entonces:

- Si  $e = [\hat{e}] \in E$  se verifica:  $e$  d.p.  $\xi \Leftrightarrow \hat{e}$  d.l.  $\hat{\xi}$ .
- p.i.      l.i.

Demostración:

Es inmediata si se tiene en cuenta la igualdad  $\langle e_0, \dots, e_r \rangle = \langle \hat{e}_0, \dots, \hat{e}_r \rangle$ .

### 1.2.3 Definición

Un sistema  $\xi = (e_0, \dots, e_r) \subset E$  se denomina generador de  $E$  si se verifica  $\langle \xi \rangle = E$ . Un sistema generador e independiente, se denomina base (proyectiva) de  $E$ .

#### 1.2.4 Teorema

Con las mismas hipótesis de 1.2.2:

- a)  $\mathcal{E}$  es base de  $E \Leftrightarrow \hat{\mathcal{E}}$  es base de  $\hat{E}$
- b) Todas las bases de  $E$  tienen  $n+1$  puntos.
- c) Es válido un teorema de extensión de bases proyectivas

#### 1.2.5 Corolario

Si  $\mathcal{E}$  es un sistema de puntos en un espacio afin  $X$ , las afirmaciones que siguen son equivalentes:

- i)  $\mathcal{E}$  es afinmente independiente (en  $X$ )
- ii)  $\mathcal{E}$  es proyectivamente independiente (en  $X$ )

Demostración

Observese que  $\mathcal{E}$  a.i en  $X \Leftrightarrow \mathcal{E}$  l.i en  $\hat{X} \Leftrightarrow \mathcal{E}$  p.i en  $\tilde{X}$ .

### 1.3 Sistemas de referencia proyectivos

#### 1.3.1 Definición

Un sistema de puntos  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e) \subset E$  se llama sistema de referencia proyectivo si cualquier subsistema formado por  $n+1$  puntos de  $\mathcal{E}$  es proyectivamente independiente.

El interés de los sistemas de referencia proyectivos radica esencialmente en el hecho de que inducen de forma biunívoca sistemas de coordenadas homogéneas:

#### 1.3.2 Proposición (Definición)

Sea  $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  una base de  $\hat{E}$ ,  $e_i = [\hat{e}_i]$  para  $i=0, \dots, n$ , y  $e = [\hat{e}]$  donde  $\hat{e} = \hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n$ . Entonces  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e)$  es un sistema de referencia proyectivo de  $E$ . A  $\mathcal{E}$  se le denomina s.r.p inducido por  $\hat{\mathcal{E}}$  en  $E$ .

Demostración

Claramente  $(e_0, \dots, e_n)$  es p.i. Probemos por ejemplo que  $(e_1, \dots, e_n, e)$  es proyectivamente independiente:

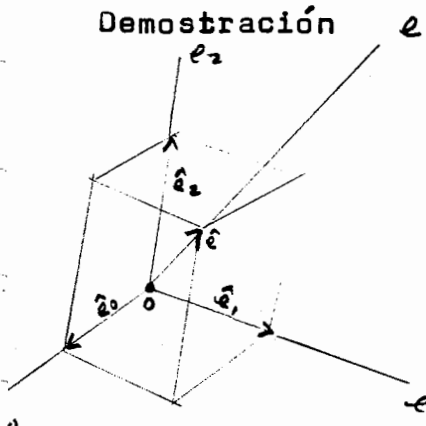
Si  $\lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_n \hat{e}_n + \lambda \hat{e} = 0$  entonces  $\lambda \hat{e}_0 + (\lambda + \lambda_1) \hat{e}_1 + \dots + (\lambda + \lambda_n) \hat{e}_n = 0$ , y como  $\hat{\mathcal{E}}$  es l.i se concluye que  $\lambda = 0$  y  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Estableceremos ahora el resultado recíproco

#### 1.3.3 Teorema

Si  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e)$  es un sistema de referencia proyectivo en  $E$ , existe una base  $\hat{\mathcal{E}}$  que induce a  $\mathcal{E}$ . Por otra parte dos bases vectoriales  $\hat{\mathcal{E}}$  y  $\hat{\mathcal{E}}'$  inducen el mismo sistema de referencia proyectivo, si y solamente si existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{\mathcal{E}}' = \lambda \hat{\mathcal{E}}$ .

Demostración



Fijemos  $\hat{e} \in \hat{E} - \{0\}$  con  $e = [\hat{e}]$ . Como  $(e_0, \dots, e_n)$  es p.i, entonces  $\hat{E}$  se descompone en suma directa de rectas vectoriales:  $E = e_0 \oplus \dots \oplus e_n$ , y existen únicos  $\hat{e}_i \in e_i$  tales que  $\hat{e} = \hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n$ . Si algún  $\hat{e}_j$  es nulo, el sistema  $(\dots, \hat{e}_{j-1}, \hat{e}_{j+1}, \dots)$  es l.d, y  $(\dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots)$  es p.d en contradicción con la hipótesis.

Así  $\hat{E} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  es base de  $\hat{E}$  que induce el sistema  $\mathcal{E}$ .

Si  $\hat{E}' = (\hat{e}'_0, \dots, \hat{e}'_n) = \lambda \hat{E}$  para cierto  $\lambda \in K - \{0\}$ , entonces

$$e'_i = [\hat{e}'_i] = [\lambda \hat{e}_i] = [\hat{e}_i] = e_i, \text{ y } e' = [\hat{e}'_0 + \dots + \hat{e}'_n] = [\lambda (\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n)] = [\hat{e}] = e.$$

Por último, si dos bases  $\hat{E}$  y  $\hat{E}'$  inducen el mismo sistema de referencia proyectivo  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e)$  se verifica,  $e_i = [\hat{e}'_i] = [\hat{e}_i]$ , y existe  $\lambda_i \in K - \{0\}$

tal que  $\hat{e}'_i = \lambda_i \hat{e}_i$  para  $i=0, \dots, n$ .

Por otra parte,  $\hat{e} = [\hat{e}'_0 + \dots + \hat{e}'_n] = [\lambda_0 \hat{e}_0 + \dots + \lambda_n \hat{e}_n]$  y existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que

$$\hat{e}'_0 + \dots + \hat{e}'_n = \lambda e_0 + \dots + \lambda e_n = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n, \text{ y por ser } \hat{E} \text{ base, es } \lambda = \lambda_0 = \dots = \lambda_n.$$

1.3.4 Comentario

En virtud de 1.3.2 y 1.3.3 existe una biyección natural entre los sistemas de referencia proyectivos  $\mathcal{E}$  y los elementos de la forma  $[\hat{E}]$  para

$\hat{E} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  base de  $\hat{E}$ , y esto permite identificar ambos objetos.

Así escribir  $\mathcal{E} = [\hat{E}]$ , significa que  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e)$  es el sistema de referencia proyectivo inducido por  $\hat{E}$ .

Nótese por otra parte que el sistema de coordenadas homogéneas  $h = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  inducido por  $\mathcal{E}$  viene caracterizado por:  $h(e_i) = I_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $h(e) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

1.3.5 Teorema

i) Un sistema de referencia cartesiano  $\tilde{\mathcal{E}} = (e_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  sobre el espacio afin  $X$ , dá lugar a un sistema de referencia proyectivo (cartesiano)

$$[\tilde{\mathcal{E}}] = \mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e), \text{ donde } e_i = [\vec{e}_i] \in \infty_X \text{ para } i=1, \dots, n, \text{ y } e = e_0 + \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n.$$

ii) Recíprocamente, si  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n; e)$  es un sistema de referencia proyectivo en  $\tilde{X}$  tal que  $e_0, e \in X$  y  $e_1, \dots, e_n \in \infty_X$ , entonces

$\mathcal{E}$  es cartesiano (es decir, existe  $\tilde{\mathcal{E}}$  sistema de referencia cartesiano tal que  $\mathcal{E} = [\tilde{\mathcal{E}}]$ )

i) Es evidente (si se identifica cada punto  $x \in X$  con la recta  $[x]$ ).

ii)  $\vec{X}$  se descompone en suma de rectas vectoriales de la forma,

$\vec{X} = e_1 \oplus \dots \oplus e_n$ , y por tanto existen  $\vec{e}_i \in e_i$   $i=1, \dots, n$  tales que  $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n$ , es decir  $e = e_0 + e_1 + \dots + e_n$ , y necesariamente cada  $e_i$  es no nulo, pues caso contrario  $\mathcal{E}$  no sería sistema de referencia proyectivo.  $\tilde{\mathcal{E}} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  es el sistema de referencia buscado, que evidentemente es único.

### 1.3.6 Teorema

Sea  $\hat{\mathcal{E}} = (e_0, \dots, e_n)$  un sistema de referencia afín en el espacio afín  $X$ .

Se verifica entonces que  $\mathcal{E} = [\hat{\mathcal{E}}] = (e_0, \dots, e_n; e) \subset X$ , siendo

$e = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} e_i$  el baricentro de  $(e_0, \dots, e_n)$  (se supone  $K$  de característica distinta de  $n+1$ )

Demostración:

Nótese que  $e = [e_0 + \dots + e_n] = \left[ \frac{1}{n+1} (e_0 + \dots + e_n) \right] = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} e_i$ .

## 2. GEOMETRIA ANALITICA PROYECTIVA

### 2.1 Ecuaciones de correspondencias proyectivas. Primer Teorema Fundamental.

Aunque el desarrollo de éste parágrafo puede hacerse para el caso semilineal, nos ceñiremos por razones de claridad al caso lineal. De cualquier forma la generalización al caso semilineal de las cuestiones fundamentales, es tan obvia como trivial.

2.1.1  $E$  y  $E'$  denotan espacios proyectivos (sobre el mismo cuerpo  $K$ ) de dimensiones  $n$  y  $m$  respectivamente.  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  son sistemas de referencia proyectivos que inducen coordenadas homogéneas

$h = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : E \rightarrow P_n(K)$  y

$h' = \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} : E' \rightarrow P_m(K)$ .

Si  $f$  es una correspondencia proyectiva de  $E$  en  $E'$  con centro  $N$ , existe una única correspondencia proyectiva  $A$  de  $P_n(K)$  en  $P_m(K)$  con centro  $h(N)$ , tal que  $A = h' \circ f \circ h^{-1}$ , es decir,  $Ah(p) = h'(f(p))$  para  $p \in E - N$ , y por

3.1.3 b)  $A$  es de la forma:

$A: P_n(K) \ni \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in P_m(K)$ , donde  $\hat{A} \in FL(n+1, m+1)$ .

Se tiene entonces la siguiente definición:

### 2.1.2 Definición

En las condiciones de 2.1.1, se dice que  $\begin{bmatrix} \hat{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix}$  representa la ecuación matricial homogénea de la correspondencia proyectiva  $f$ , respec-

co a los sistemas de coordenadas  $n$  y  $n'$ . Las ecuaciones  $x_i = \sum_{j=0}^m a_{ij} x'_j$

( $i=0, \dots, m$ ) representan unas ecuaciones homogéneas para  $f$ .

Se escribe  $A = [\hat{A}] = M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(f)$ .

### 1.3 Comentario

La aplicación  $M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}$  de  $CP(E, E')$  en  $CP(n, m) = \{[\hat{A}] : \hat{A} \in FL(n+1, m+1) - \{0\}\}$  define una homografía entre espacios proyectivos, y  $M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'} = [M_{\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{E}'}}]$  siendo  $\mathcal{E} = [\hat{\mathcal{E}}]$  y  $\mathcal{E}' = [\hat{\mathcal{E}'}]$ .

Como consecuencia de esto, el siguiente teorema tiene demostración inmediata.

### 1.4 Teorema

Si  $E, E',$  y  $E''$  son espacios proyectivos con sistemas de referencia respectivos  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$ ,  $f \in CP(E, E')$   $g \in CP(E', E'')$ , se verifica entonces:  $M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}', \mathcal{E}''}(g) M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(f)$

### 1.5 Comentario

Si  $\mathcal{E}$  es sistema de referencia proyectivo en  $E$ , la homografía  $M_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  de  $CP(E) = CP(E, E)$  en  $CP(n) = CP(n, n)$  aplica el grupo proyectivo  $GP(E)$  en el grupo  $GP(n) = \{[\hat{A}] : \hat{A} \in GL(n+1)\}$  que se identifica con el grupo proyectivo de  $P_n$ .

Si  $f \in CP(E)$ , y  $M_{\mathcal{E}}(f) = [\hat{A}] = A$  las ecuaciones de  $f$  respecto al sistema de coordenadas homogéneas  $h = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  definido por  $\mathcal{E}$  se escriben aún matricialmente en la forma:

$$\left[ \hat{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

### 1.6 Proposición

Sean  $X$  y  $X'$  espacios afines sobre el mismo cuerpo  $K$ . Si  $f: X \rightarrow X'$  es aplicación afin, las ecuaciones de  $\tilde{f}$  respecto a sistemas de referencia homogéneos cartesianos

$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$  en  $X$  y  $X'$  es de la forma  $\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$  en donde  $\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$  son las correspondientes ecuaciones cartesianas.

Demostación:

Nótese que las ecuaciones  $\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$  son las ecuaciones de  $\tilde{f}$ .

Veamos por último que una homografía entre espacios proyectivos viene determinada por los valores que toma sobre un sistema de referencia proyectivo:



Sean  $E$  y  $E'$  espacios proyectivos sobre el mismo cuerpo  $K$ , y con la misma dimensión  $n$ . Si  $\mathcal{E}=(e_0, \dots, e_n; e)$ ,  $\mathcal{E}'=(e'_0, \dots, e'_n; e')$  son sistemas de referencia proyectivos en  $E$  y  $E'$  respectivamente, existe una única homografía  $f: E \rightarrow E'$  tal que  $f(e_i)=e'_i$ ,  $i=0, \dots, n$  y  $f(e)=e'$ .

Demostración

Sean  $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$ ,  $\hat{\mathcal{E}}'=(\hat{e}'_0, \dots, \hat{e}'_n)$  bases vectoriales con  $\mathcal{E}=[\hat{\mathcal{E}}]$ ,  $\mathcal{E}'=[\hat{\mathcal{E}}']$

Existe  $\hat{f}$  isomorfismo lineal (único) de  $\hat{E}$  en  $\hat{E}'$  tal que  $\hat{f}(\hat{e}_i)=\hat{e}'_i$ , y la

homografía  $f=[\hat{f}]: E \rightarrow E'$  verifica:

$f(e_i)=[\hat{f}](\hat{e}_i)=[\hat{f}(\hat{e}_i)]=[\hat{e}'_i]=e'_i$  para  $i=0, \dots, n$  y además

$f(e)=[\hat{f}](\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n)=[\hat{f}(\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n)]=[\hat{e}'_0 + \dots + \hat{e}'_n]=e'$ , así  $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'$ .

Por otra parte, si  $g: E \rightarrow E'$  es homografía con  $g(\mathcal{E})=\mathcal{E}'$ ,  $g=[\hat{g}]$ , es:

$g(e_i)=[\hat{g}](\hat{e}_i)=[\hat{g}(\hat{e}_i)]=e'_i$  y existe  $\lambda_i \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{g}(\hat{e}_i)=\lambda_i \hat{e}'_i$  para

$i=0, \dots, n$ . Pero  $g(e)=[\hat{g}](\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n)=[\hat{g}(\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n)]=[\lambda_0 \hat{e}'_0 + \dots + \lambda_n \hat{e}'_n]=$

$[\hat{e}'_0 + \dots + \hat{e}'_n]=e'$ , luego existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que

$\lambda \hat{e}'_0 + \dots + \lambda \hat{e}'_n = \lambda_0 \hat{e}'_0 + \dots + \lambda_n \hat{e}'_n$ . Por ser  $\hat{\mathcal{E}}'$  base es  $\lambda = \lambda_0 = \dots = \lambda_n$ , y

$\hat{g} = \lambda \hat{f}$ ; así  $g=[\hat{g}]=[\lambda \hat{f}]=[\hat{f}]=f$ . Esto prueba la unicidad.

### 1.8 Comentario

Si  $\mathcal{E}=(e_0, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{E}'=(e'_0, \dots, e'_n)$  son sistemas de referencia afin en el espacio afin  $X$ , se sabe (por el teorema fundamental (primero) de la geometría afin) que existe una única transformación afin que envía  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{E}'$ . Sin embargo existen muchas transformaciones proyectivas en  $\tilde{X}$  verificando ésta condición: Una por cada elección de puntos  $e, e' \in \tilde{X}$  tales que  $(e_0, \dots, e_n; e)$  y  $(e'_0, \dots, e'_n; e')$  sean sistemas de referencia proyectivos.

## 2.2 Ecuaciones de subespacios

### 2.1 Ecuaciones implícitas de subespacios proyectivos

Sea  $E$  un espacio proyectivo de dimensión  $n$ , y  $h = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : E \rightarrow P_n$  un sistema de coordenadas homogéneas inducido por el sistema de referencia proyectivo  $\mathcal{E}=[\hat{\mathcal{E}}]$ .

Si  $A$  es un subespacio proyectivo de  $E$  con dimensión  $n-r$ , y  $A=P(\hat{A})$ , entonces  $\hat{A}$  es subespacio vectorial de  $\hat{E}$ , y admite unas ecuaciones implícitas en las coordenadas (de  $\hat{\mathcal{E}}$ )  $\hat{h} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  con  $(n+1)-(r+1)$  ecuaciones

lineales homogéneas independientes, de la forma:

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{ij} x_j = 0, \quad i=1, \dots, r \quad \text{rg}((\lambda_{ij}))=r.$$

Al sistema anterior, se denomina sistema de ecuaciones implícitas del

subespacio proyectivo A, que puede describirse de la forma:

$$A = \{ a = [\hat{a}] \in E : \sum_{j=0}^n \lambda_{ij} x_j(a) = 0, i=1, \dots, r \}.$$

### 2.2.2 Ecuaciones implícitas de las extensiones proyectivas de aplicaciones afines.

Sea ahora  $X = (X, \infty_X)$  un espacio proyectivo afín, y  $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un sistema de coordenadas cartesianas con coordenadas homogéneas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Si A es un subespacio afín de X con dimensión n-r, admite en las coordenadas cartesianas ecuaciones implícitas de r ecuaciones lineales independientes:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{10} + \lambda_{11}x_1 + \dots + \lambda_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \\ \lambda_{r0} + \lambda_{r1}x_1 + \dots + \lambda_{rn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{rg}(\lambda_{ij}) = r$$

Las ecuaciones de A (y de  $\hat{A} = \tilde{A}$ ) se escriben entonces:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{10}x_0 + \lambda_{11}x_1 + \dots + \lambda_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \\ \lambda_{r0}x_0 + \lambda_{r1}x_1 + \dots + \lambda_{rn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Finalmente, las ecuaciones de  $\infty_A$  (y las de  $\vec{A} = \infty_A$ ) son:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11}x_1 + \dots + \lambda_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \\ \lambda_{r1}x_1 + \dots + \lambda_{rn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

### 3. HOMOGRAFÍAS ENTRE RECTAS PROYECTIVAS: RAZÓN DOBLE

El estudio de las homografías en el caso particular de las rectas proyectivas, es la clave para la determinación del concepto de razón doble. La razón doble es el invariante que desempeña en geometría proyectiva, el papel análogo de la razón simple en geometría afín. La relación sobre una recta afín de ambos invariantes, permite dar estructura afín canónica al complementario de un punto en una recta proyectiva.

#### 3.1 Representaciones analíticas de homografías entre rectas proyectivas

3.1.1 Sean  $\Delta = P(\hat{\Delta})$ ,  $\Delta' = P(\hat{\Delta}')$  rectas proyectivas (eventualmente coincidentes) sobre el mismo cuerpo K. Supongáse fijados sistemas de coordenadas homogéneas  $h = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ,  $h' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$  sobre  $\Delta$  y  $\Delta'$  respectivamente.

La ecuación matricial homogénea de una homografía  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  es en virtud de 2.1.1 de la forma:  $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$  con  $\det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad \neq 0$  (1)

Esto significa que el punto de coordenadas homogéneas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$  se transforma por f en el de coordenadas homogéneas  $\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$  en la forma en que se indica en la ecuación anterior.

En las condiciones 3.1.1, la actuación de la homografía  $f$  puede describirse por medio de la ecuación bilineal:

$$(x_0, x_1) \begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

que se denominan ecuación bilineal homogénea de  $f$ .

Demostración:

Nótese que se verifica la equivalencia:  $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda\mu' - \lambda'\mu = 0$ ,

aplicando esto a la igualdad:

$\begin{bmatrix} cx_0 + dx_1 \\ ax_0 + bx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix}$  se verifica a  $ax_0x'_0 - cx_0x'_1 + bx_1x'_0 - dx_1x'_1 = 0$ , que está de acuerdo con la ecuación (2).

### 3.1.3 Comentario

La ecuación bilineal (2), significa que la imagen de un punto con coordenadas homogéneas  $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$  viene definida por la recta vectorial en  $\hat{\Delta}'$  que

en coordenadas lineales  $\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$  tiene por ecuación:  $(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = 0$

3.1.4 Supongase ahora que  $D$  y  $D'$  son rectas afines, y  $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix}$  son sistemas de coordenadas cartesianas en  $D$  y  $D'$  respectivamente, y sean

$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix}$  los correspondientes sistemas de coordenadas homogéneas cartesianas inducidos sobre  $\tilde{D}$  y  $\tilde{D}'$  respectivamente, es decir,  $x = \frac{x_1}{x_0}, x' = \frac{x'_1}{x'_0}$  con el convenio,  $\frac{\lambda}{0} = \infty \in \tilde{K}$ , si  $\lambda \in K - \{0\}$ .

### 3.1.5 Proposición

En las condiciones de 3.1.4, si  $f: \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}'$  es una homografía con ecuación homogénea matricial:

$$\left[ \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad cb - ad \neq 0$$

entonces la ecuación de  $f$  en coordenadas cartesianas se escribe en la forma:

$$x' = \frac{a + bx}{c + dx} \quad (3) \quad \text{ó bien}$$

$$dx x' - bx + cx' + a = 0 \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) se denominan respectivamente, ecuación cartesiana, y bilineal cartesiana de la homografía.

Demostración:

De la ecuación matricial de  $f$  se deduce que para puntos con coordenada  $x_0$  y  $x'_0$  no nulas (puntos propios) se tiene:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_0} = \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1} = \frac{a + b \frac{x_1}{x_0}}{c + d \frac{x_1}{x_0}} = \frac{a + bx}{c + dx}$$

Las ecuaciones (4) se deducen directamente de (3).

a) Si en (3) es  $d \neq 0$  y  $c+dx=0$  (es decir  $x = -\frac{c}{d}$ ), entonces

$ax+bx = \frac{ad-bc}{d} \neq 0$ , y  $x' = \infty$ , resultado al que se puede llegar por medio

de la ecuación matricial (1). Por otra parte, si  $x = \infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , entonces  $x' = \frac{b}{d}$ .

b) La condición necesaria y suficiente para que  $f$  sea proyectivo afin, es que  $d$  sea nulo.

### 3.2 Razón doble de cuatro puntos alineados

La razón simple establece en geometría afin un invariante que caracteriza la estructura afin del espacio y el grupo afin de transformaciones. Un invariante análogo en geometría proyectiva, no puede depender solo de tres puntos: Por el primer teorema fundamental 2.1.6, tres puntos distintos alineados pueden ser enviados a otros tres puntos distintos alineados arbitrarios mediante una adecuada homografía.

Cabe esperar que dicho invariante - la razón doble - dependa de cuatro puntos alineados.

La extensión proyectiva del cuerpo  $K$ ,  $\tilde{K} = K \cup \{\infty\}$  será identificada con  $P_1(K)$  tal como se indica en 1.1.8

3.2.1 Tres puntos distintos  $(a, b, c)$  de una recta proyectiva  $\Delta$  (sobre  $K$ ) determinan un sistema de referencia proyectivo, y un sistema de coordenadas homogéneas  $h: \Delta \rightarrow \tilde{K}$ , que es la única homografía (ver 2.1.6) tal

que  $h(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ,  $h(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \infty$ ,  $h(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

#### 3.2.2 Definición

En las condiciones de 3.2.1, para cada  $x \in \Delta$  se denomina razón doble  $[a, b; x, c]$  al valor  $h(x) \in \tilde{K}$ , es decir:

$$[a, b; x, c] = h(x)$$

Nótese que:  $[a, b; a, c] = 0$ ,  $[a, b; b, c] = \infty$ ,  $[a, b; c, c] = 1$

La propiedad de invariancia proyectiva de la razón doble se deduce de forma inmediata a partir del siguiente teorema:

#### 3.2.3 Teorema

Sean  $\Delta$  y  $\Delta'$  rectas proyectivas sobre el cuerpo  $K$ ,  $(a, b, c)$  un sistema de tres puntos distintos de  $\Delta$ , y  $(a', b', c')$  un sistema de tres puntos distintos de  $\Delta'$ , Sean  $d \in \Delta$ ,  $d' \in \Delta'$ .

La condición necesaria y suficiente para que exista  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  homogra-

fía tal que  $f(a,b,c,d)=(a',b',c',d')$ , es que  $[a,b;d,c]=[a',b';d',c']$ .

Demostración:

Considérense las homografías  $h:\Delta \ni x \mapsto [a,b;x,c] \in \tilde{K}$ , y

$h':\Delta' \ni x' \mapsto [a',b';x',c'] \in \tilde{K}$ . Nótese que  $h(a,b,c)=h'(a',b',c')=(0,\infty,1)$

Sea  $h(d)=\lambda$ ,  $h'(d')=\lambda'$ . Tomando  $f=h'^{-1}.h$ , se verifica si  $\lambda=\lambda'$  que

$f(a,b,d,c)=(a',b',d',c')$ . Recíprocamente, si existe  $g:\Delta \mapsto \Delta'$  tal

que  $g$  es homografía con  $g(a,b,d,c)=(a',b',d',c')$ , entonces por el primer

teorema fundamental 2.1.7, se deduce que  $g=f.h'^{-1}.h$ , y en particular

$g(d)=h'^{-1}(\lambda)=d'=h'^{-1}(\lambda')$ , y  $\lambda=\lambda'$ .

### 3.2.4 Definición

Una biyección  $f:\Delta \rightarrow \Delta'$  entre rectas proyectivas, se dice que conser-

va la razón doble si para cualesquiera que sean los puntos  $(a,b,d,c) \in \Delta$ ,

$a,b,c$  distintos, se verifica:  $[a,b;d,c]=[f(a),f(b);f(d),f(c)]$ .

### 3.2.5 Corolario

Si  $g:\Delta \rightarrow \Delta'$  es una aplicación biyectiva entre rectas proyectivas,

son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i)  $g$  es homografía

ii)  $g$  conserva la razón doble

Demostración

i)  $\Rightarrow$  ii) es consecuencia inmediata de 3.2.3

ii)  $\Rightarrow$  i): Sean  $(a,b,c,d) \in \Delta$ ,  $a,b,c$  distintos, y sea  $g(a,b,d,c)=$

$(a',b',d',c')$ . Por hipótesis es  $[a,b;d,c]=[a',b';d',c']$ , y por 3.2.3

existe una homografía  $f:\Delta \rightarrow \Delta'$  tal que  $f(a,b,d,c)=(a',b',d',c')$ . Pre-

temos que  $g=f$ : Si  $x \in \Delta$  (utilizando i)  $\Rightarrow$  ii) ) se tiene,

$[a,b;x,c]=[a',b';g(x),c']=[a',b';f(x),c']$ . Como la aplicación

$h:\Delta' \ni x' \mapsto [a',b';x',c'] \in \tilde{K}$  es biyectiva, se deduce que  $g(x)=f(x)$ .

### 3.2.6 Definición

Sean  $E$  y  $E'$  espacios proyectivos. Una aplicación  $f:E \rightarrow E'$  se dice que

conserva la razón doble, si transforma biyectivamente cada recta pro-

yectiva  $\Delta$  de  $E$  en una recta proyectiva  $\Delta'$  de  $E'$ , y la aplicación

$f/\Delta : \Delta \mapsto \Delta'$  conserva la razón doble.

### 3.2.7 Corolario

Una aplicación proyectiva  $f:E \rightarrow E'$  conserva la razón doble

Demostración:

Es consecuencia inmediata de 3.2.5 c) (Cap VIII), y de 3.2.5

### 3.3 Expresión analítica de la razón doble: Propiedades

Fijado sobre la recta proyectiva  $\Delta$  un sistema de coordenadas homogéneas  $h = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} : \Delta \rightarrow \tilde{K}$ , y dados los puntos distintos  $(a, b, c) \in \Delta$ , por

3.2.5 i), se deduce que para todo  $x \in \Delta$ ,  $[a, b; x, c] = [h(a), h(b); h(x), h(c)]$  y para determinar la razón doble, es suficiente conocer la fórmula explícita para cuatro puntos en  $P_1(K) = \tilde{K}$ .

#### 3.3.1 Teorema

Sean  $\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$  vectores de  $\hat{P}_1(K)$  que determinan puntos  $a = [\hat{a}]$ ,  $b = [\hat{b}]$ ,  $c = [\hat{c}]$ ,  $x = [\hat{x}]$  de  $P_1(K)$ , siendo  $a, b, c$  distintos se verifica entonces:

$$[a, b; x, c] = \frac{\det(\hat{a}, \hat{x})}{\det(\hat{a}, \hat{c})} : \frac{\det(\hat{b}, \hat{x})}{\det(\hat{b}, \hat{c})} \quad \text{con el convenio } \frac{1}{0} = \infty \quad \lambda \in \tilde{K} - \{0\}$$

$$\text{y } \frac{1}{\infty} = 0 \quad \lambda \in \tilde{K} - \{\infty\}$$

Demostración:

Fijado  $\hat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \hat{P}_1(K)$ , se tiene por la regla de Cramer la identidad:

$$\hat{y} = \lambda_{\hat{y}} \hat{a} + \mu_{\hat{y}} \hat{b} \quad \text{con } \lambda_{\hat{y}} = \frac{\det(\hat{y}, \hat{b})}{\det(\hat{a}, \hat{b})}, \quad \mu_{\hat{y}} = \frac{\det(\hat{a}, \hat{y})}{\det(\hat{a}, \hat{b})} \quad (1)$$

Por tanto,  $(\lambda_{\hat{c}} \hat{a}, \mu_{\hat{c}} \hat{b})$  es la base asociada al sistema de referencia proyectivo  $(a, b, c)$  (véase 1.3.3), y la homografía  $h: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$  tal que  $h(a, b, c) = (0, \infty, 1)$  es de la forma  $h = [\hat{h}]$  donde  $\hat{h}: \hat{P}_1(K) \rightarrow \hat{P}_1(K)$  es el isomorfismo lineal tal que:

$$\hat{h}(\lambda_{\hat{c}} \hat{a}, \mu_{\hat{c}} \hat{b}) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Por la definición 3.2.2 es  $h(x) = [a, b; x, c]$ , pero

$$\hat{h}(\hat{x}) = \hat{h}\left(\frac{\lambda_{\hat{x}}}{\lambda_{\hat{c}}} (\lambda_{\hat{c}} \hat{a}) + \frac{\mu_{\hat{x}}}{\mu_{\hat{c}}} (\mu_{\hat{c}} \hat{b})\right) = \begin{pmatrix} \lambda_{\hat{x}}/\lambda_{\hat{c}} \\ \mu_{\hat{x}}/\mu_{\hat{c}} \end{pmatrix} \text{ así:}$$

$$h(x) = [\hat{h}(\hat{x})] = \left[ \begin{pmatrix} \lambda_{\hat{x}}/\lambda_{\hat{c}} \\ \mu_{\hat{x}}/\mu_{\hat{c}} \end{pmatrix} \right] = \frac{\mu_{\hat{x}}}{\lambda_{\hat{c}}} : \frac{\lambda_{\hat{x}}}{\mu_{\hat{c}}} \quad (\text{se ha identificado de la forma habitual } \tilde{K} \text{ y } P_1(\tilde{K}))$$

Sustituyendo  $\lambda_{\hat{x}}, \mu_{\hat{x}}, \lambda_{\hat{c}}, \mu_{\hat{c}}$  por su valor en (1) se obtiene la fórmula pedida

#### 3.3.2 Propiedades

Denotando  $[a, b; x, c] = \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix}$  entonces para cuatro puntos distintos de una recta proyectiva  $\Delta$ , se deducen de forma inmediata a partir de

3.3.1 las siguientes propiedades:

$$1) \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ x & c \end{bmatrix}^{-1}; \quad 2) \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & x \end{bmatrix}^{-1}; \quad 3) \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & c \\ a & b \end{bmatrix}$$

y como consecuencia de 1) y 2) se obtiene: 4)  $\begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & x \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ a & c \end{bmatrix} = 0$ ,  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \infty$ ,  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix} = 1$ , es natural establecer, utilizando las propiedades anteriores el siguiente

### 3.3.3 Convenio

Si  $a, b, c$  son tres puntos (al menos dos distintos) de una recta proyectiva, convenimos en escribir:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & a \end{bmatrix} = 0 \quad \text{válida aun cuando } b=c \neq a$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix} = \infty \quad \text{válida aún cuando } a=c \neq b$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c \\ a & b \end{bmatrix} = 1 \quad \text{válida aún cuando } a=b \neq c$$

### 3.3.4 Comentario

Esta ampliación de la definición de razón doble-compatible por su propia construcción con las propiedades 3.3.2- no aporta nada esencialmente nuevo a las definiciones 3.2.4 y 3.2.6 por lo que los resultados 3.2.5 y 3.2.7 permanecen válidos.

### 3.3 Razón doble y razón simple

Si  $a, x, b$  son tres puntos de una recta afin  $R$ ,  $a \neq b$ , la razón simple  $(a; x; b)$  viene definida por la condición:  $(a; x; b) \vec{ab} = \vec{ax}$ . Convendremos en escribir  $(a; x; a) = \infty \in \tilde{K}$ , cuando  $x \neq a$ , y adoptaremos los siguientes convenios para  $\lambda \in \tilde{K}$ :

$$\frac{\lambda}{\infty} = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$$\frac{\lambda}{0} = \infty \quad \text{si } \lambda \neq 0, \quad \frac{0}{0} = 1$$

### 3.4.1 Teorema

Sea  $R$  una recta afin y sean  $a, b, x, c \in \tilde{R}$  cuatro puntos entre los cuales hay por lo menos dos distintos. Entonces:

i) Si  $a, b, x, c \in R$  es  $[a, b; x, c] = \frac{(a; x; c)}{(b; x; c)}$

ii) Si  $b = \infty_R$ ,  $(a, x, c) \in R$  entonces  $[a, b; x, c] = (a; x; c)$

Demostración:

Fijemos en  $R$  un sistema de coordenadas cartesianas  $h = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} : R \rightarrow K$ , y sea

$\tilde{h} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{K}$  el sistema de coordenadas homogéneas inducido por  $h$  (vease 1.1.6):

se 1.1.6):

i) Si  $a, b, x, c \in K$ , es  $h(a, b, x, c) = h(a', b', x', c') = (a', b', x', c') \in K$ , escribiendo  $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda$  para  $\lambda \in K$  y aplicando la fórmula de 3.3.1, se obtiene teniendo en cuenta la invarianza de la razón doble por  $\tilde{h}$ , y de la razón simple por  $h'$ :

$$[a, b; x, c] = [a', b'; x', c'] = \frac{x' - a'}{c' - a'} : \frac{x' - b'}{c' - b'} = \frac{(a'; x'; c')}{(b'; x'; c')} = \frac{(a; x; c)}{(b; x; c)}$$

Por otra parte, los convenios establecidos más arriba, son compatibles con los convenios 3.3.3.

ii) Tomando  $b' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \infty \in \tilde{K}$  se verifica:

$$[a, \infty_R; x, c] = [a', \infty; x', c'] = \frac{x' - a'}{c' - a'} : \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x' \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c' \end{pmatrix}} = (a'; x'; c') = (a; x; c)$$

La afirmación ii) admite cierta reciprocidad:

### 3.4.2 Teorema

Sea  $\Delta$  una recta proyectiva,  $b \in \Delta$ . Existe entonces una única estructura afin en  $R = \Delta - \{b\}$  respecto a la cual se verifica la propiedad:

$$(a; x; c)_R = [a, b; x, c]_{\Delta}$$
 para todo  $a, x, c \in R$ .

Además la aplicación  $h: \hat{R} \rightarrow \Delta$  tal que  $h(x) = x$  para  $x \in R$  y  $h(\infty_R) = b$  es una homografía que permite identificar de manera canónica  $\hat{R}$  con  $\Delta$  y el punto  $b \in \Delta$  con el infinito de  $R$ .

Demostración

fijemos una homografía arbitraria  $h: \Delta \rightarrow \tilde{K}$  con  $h(b) = \infty$ .

la aplicación  $h_b = h|_{\Delta - \{b\}}: \Delta - \{b\} \rightarrow K$  es una aplicación biyectiva, y existe una única estructura afin en  $R = \Delta - \{b\}$  tal que  $h_b$  es isomorfismo afin, y se verifica para  $a, x, c \in R$ :

$$(a; x; c) = (h(a); h(x); h(c)) = [h(a), \infty; h(x), h(c)] = [h(a), h(b); h(x), h(c)] = [a, b; x, c].$$

La unicidad de la estructura afin de  $R$  es evidente a priori.

### 3.4.3 Corolario

Sea  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  biyección entre rectas proyectivas, y  $b \in \Delta$ . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i)  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  es homografía
- ii)  $f_b: \Delta - \{b\} \rightarrow \Delta' - \{f(b)\}$  es aplicación afin

Demostración

- i)  $\Rightarrow$  ii) Si  $f$  es homografía, por 3.2.5, conserva la razón doble, y por 3.4.2  $f_b$  conserva la razón simple, y es por tanto isomorfismo afin
- ii)  $\Rightarrow$  i) Si  $f_b$  es afin, entonces conserva la razón simple en  $\Delta - \{b\}$



utilizando 3.3.1 y 3.4.2 se prueba que  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  conserva la razón doble de cuatro puntos en los que no intervenga b. En efecto: si  $(a, b_1, x, c)$  son cuatro puntos de  $\Delta - \{b\}$  se tiene,

$$[a, b_1; x, c] = \frac{(a; x; c)}{(b; x; c)} = \frac{(f(a); f(x); f(c))}{(f(b_1); f(x); f(c))} = [f(a), f(b_1); f(x), f(c)].$$

Si en la razón doble interviene el punto b en segundo lugar, se tiene

$$[a, b; x, c] = (a; x; c)_{\Delta - \{b\}} = (f(a); f(x); f(c))_{\Delta' - \{f(b)\}} = [f(a), f(b); f(x), f(c)]$$

Finalmente si el punto b interviene en otro lugar distinto, el resultado se sigue de las propiedades 3.3.2, que permiten pasarlo a segundo lugar.

#### 3.4.4 Ejemplo

Fijado en la recta proyectiva  $\Delta$  un sistema de referencia proyectivo  $(e_0, e_1; e)$  con coordenadas  $h = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}: \Delta \rightarrow \tilde{K}$ , es  $h(e_0, e_1, e) = (0, \infty, 1)$  y así  $h_{e_1}: \Delta - \{e_1\} \rightarrow K$  es isomorfismo afin. Nótese que  $x = \frac{x_1}{x_0}$  es coordenada cartesiana en  $\Delta - \{e_1\}$ .

#### 3.4.5 Comentario

Sean  $\mathcal{E} = (e_0, e_1; e)$   $\mathcal{E}' = (e'_0, e'_1; e')$  sistemas de referencia proyectivos sobre las rectas  $\Delta$  y  $\Delta'$  respectivamente con sistemas correspondientes de coordenadas  $h = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$  y  $h' = \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix}$ .

Si  $f$  es una homografía de  $\Delta$  en  $\Delta'$  pueden establecerse como en 3.1 ecuaciones cartesianas y bilineales cartesianas para  $f$  considerada como aplicación de la recta  $\Delta = \widetilde{\Delta - \{e_1\}}$  en  $\Delta' = \widetilde{\Delta' - \{e'_1\}}$ .

Nótese que las coordenadas cartesianas correspondientes son

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad \text{y} \quad x' = \frac{x'_1}{x'_0}.$$

El principio de dualidad y la técnica de envío de puntos al infinito constituyen las dos herramientas básicas de trabajo en geometría proyectiva, y serán analizadas en la primera parte del capítulo.

La segunda parte presenta una versión proyectiva del segundo teorema fundamental probado en geometría afin, y analiza las relaciones entre estructura y geometría proyectiva.

1. ESPACIO PROYECTIVO DUAL

Dotaremos al conjunto  $E$  de hiperplanos de un espacio proyectivo  $E = P(E)$  de estructura canónica de espacio proyectivo sobre el espacio vectorial dual  $E^*$ . La "traducción" de los elementos de la geometría proyectiva de  $E$  en términos de la geometría proyectiva del espacio original  $E$  permitirá enunciar el principio general de dualidad.

1.1 Estructura proyectiva dual

$\hat{E}$  denotará aquí un espacio vectorial de dimensión finita  $n+1$ , y la aplicación  $\omega: GL(\hat{E}) \rightarrow GL(E^*)$  es la ortogonalidad introducida en 3.1 (Cap II)

A partir de las propiedades básicas de la ortogonalidad dual, puede establecerse de forma inmediata el siguiente lema técnico:

1.1.1 Lema

Si  $\hat{\alpha} \in \hat{E}^* - \{0\}$  entonces  $\hat{\alpha}^\omega = [\hat{\alpha}]^\omega$  es un hiperplano de  $\hat{E}$ .  
Además si  $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \hat{E}^* - \{0\}$  y  $\hat{\alpha}^\omega = \hat{\beta}^\omega$  entonces  $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$ .

Este resultado es la clave para la demostración del siguiente teorema:

1.1.1 Teorema

Sea  $E^*$  el conjunto de hiperplanos del espacio proyectivo  $E = P(\hat{E})$ . La aplicación  $\pi: \hat{E}^* - \{0\} \ni \hat{\alpha} \mapsto P(\hat{\alpha}^\omega) \in E^*$ , da a  $E^*$  estructura de espacio proyectivo sobre el espacio vectorial  $\hat{E}^*$ .

Demostración:

Es suficiente probar que fijado  $H \in E^*$ , el conjunto  $\pi^{-1}(H) \cup \{0\}$  es una recta vectorial de  $\hat{E}^*$ :

Si  $H = P(\hat{H})$ , y  $\hat{\alpha} \in \hat{E}^* - \{0\}$  es tal que  $\hat{\alpha}^\omega = \hat{H}$ , entonces  $\pi(\hat{\alpha}) = H$ , y por el lema 1.1.1 si  $\hat{\beta} \in \hat{E}^* - \{0\}$ , se verifica la equivalencia:

$$\pi(\hat{\beta})=H \Leftrightarrow \beta^\omega=H$$

### 1.1.3 Definición

En las hipótesis de 1.1.2 se denomina a  $E^*=(E^*, \hat{E}^*, \pi)$  espacio proyectivo dual.

### 1.1.4 Notación

Se identificará como es habitual para  $\hat{\alpha} \in \hat{E}^* - \{0\}, [\hat{\alpha}]$  con  $\pi(\hat{\alpha})$  y escribiremos para  $\hat{A} \subset \hat{E}^*, P(\hat{A}) = \pi(\hat{A} - \{0\})$ . En particular,  $E^* = P(\hat{E}^*)$

## 1.2 Subespacios: Razón doble de hiperplanos

### 1.2.1 Definición

Si  $A = P(\hat{A})$  es subespacio proyectivo de  $E = P(\hat{E})$  se define  $A^\omega = P(\hat{A}^\omega)$  que es subespacio proyectivo de  $E$ , y se denomina ortogonal dual de  $A$ . La aplicación  $\omega: \mathcal{G}L(E) \rightarrow \mathcal{G}L(E^*)$  se denomina correlación de dualidad.

### 1.2.2 Teorema

La correlación de dualidad  $\omega: \mathcal{G}L(E) \rightarrow \mathcal{G}L(E^*)$  es una aplicación biyectiva. Por otra parte, si  $A$  y  $B$  son subespacios proyectivos de  $E$  se verifican las propiedades:

- i)  $\dim A + \dim A^\omega = n-1$
- ii) Si  $A \subset B$  entonces  $A^\omega \supset B^\omega$ ;  $\emptyset^\omega = E, E^\omega = \emptyset$ .
- iii)  $(A+B)^\omega = A^\omega \cap B^\omega$ ;  $(A \cap B)^\omega = A^\omega + B^\omega$ .

Demostración: (Se utilizarán los resultados de 3.1 Cap II)

Si  $A = P(\hat{A}), B = P(\hat{B})$ , se tiene:

$$A^\omega = B^\omega \Rightarrow \hat{A}^\omega = \hat{B}^\omega \Rightarrow \hat{A}^{\omega\omega} = \hat{A} = \hat{B} = \hat{B}^{\omega\omega} \Rightarrow A = B \text{ por tanto } \omega \text{ es inyectiva.}$$

Por otra parte, si  $\mathcal{J} = P(\hat{\mathcal{J}})$  es subespacio de  $E^*$ , tomando  $\hat{A} = \hat{\mathcal{J}}^\omega$  se verifica  $A^\omega = P(\hat{A}^\omega) = P(\hat{\mathcal{J}}^{\omega\omega}) = P(\hat{\mathcal{J}}) = \mathcal{J}$ . Por tanto  $\omega$  es biyectiva.

- i)  $A \subset B \Rightarrow \hat{A} \subset \hat{B} \Rightarrow \hat{B}^\omega \subset \hat{A}^\omega \Rightarrow B^\omega = P(\hat{B}^\omega) \subset P(\hat{A}^\omega) = A^\omega$ .
- ii)  $(A+B)^\omega = P((\hat{A}+\hat{B})^\omega) = P(\hat{A}^\omega \cap \hat{B}^\omega) = P(\hat{A}^\omega) \cap P(\hat{B}^\omega) = A^\omega \cap B^\omega$ .

La otra igualdad se prueba de forma análoga.

La siguiente proposición expresa la propiedad de ser subespacio proyectivo de  $E^*$  en términos de la geometría de  $E$ :

### 1.2.3 Proposición

Dado  $A = P(\hat{A})$  subespacio proyectivo de  $E$  entonces:

$A^\omega = \{H \in E^* / H \supset A\}$ . Se denomina por ésta razón a  $A^\omega$  haz de hiperplanos con lomo  $A$ , ó  $r$ -haz si  $\dim A = r$ .

Demostración:

Si  $A = P(\hat{A})$  y  $\hat{\alpha} \in \hat{E}^* - \{0\}$  se tiene:

1.2.4 Corolario

$\mathcal{L}$  es subespacio proyectivo de  $E^*$  r-dimensional, si y solo si existe  $A$ , subespacio proyectivo de  $E$  con dimensión  $n-r-1$  tal que

$$\mathcal{L} = A^\omega = \{H \in E^* / H \supset A\}.$$

Demostración:

Aplíquese 1.2.2 i) y 1.2.3

1.2.5 Ejemplos

Una recta de hiperplanos de  $E^*$  está formada por la familia de hiperplanos que contienen a cierta subvariedad  $L$  de dimensión  $n-2$ . Así en el plano proyectivo, la familia de rectas que pasan por un punto dado constituye una recta de hiperplanos ó haz rectilíneo de rectas.

En el espacio proyectivo tridimensional, las rectas de  $E^*$  son haces de hiperplanos que pasan por una recta, y los planos de  $E$  son familias de hiperplanos que pasan por un punto

Interpretemos ahora la razón doble de puntos de  $E^*$  en la geometría de  $E$  :

1.2.5 Teorema

Sean  $(H_i)_{i=0, \dots, 4}$  cuatro hiperplanos de  $E$  (al menos dos distintos) que contienen a cierto subespacio  $L$  de dimensión  $n-2$ . Se tiene:

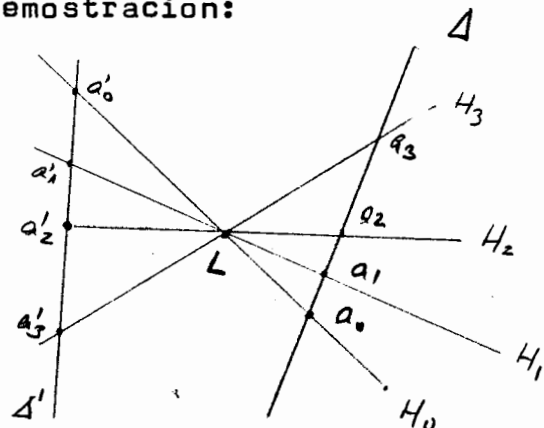
Cualesquiera que sean las rectas  $\Delta$  y  $\Delta'$  de  $E^*$  tales que

$$\Delta \cap L = \Delta' \cap L = \emptyset, \text{ se verifica que } \Delta \cap H_i = \{a_i\} \text{ y } \Delta' \cap H_i = \{a'_i\} \text{ } i=0, \dots, 4$$

siendo  $a_i$  y  $a'_i$  puntos de  $E$ , y  $[a_0, a_1; a_2, a_3] = [a'_0, a'_1; a'_2, a'_3] = \rho$ .

Por otra parte,  $\rho$  coincide con la razón doble  $[H_0, H_1; H_2, H_3]$  en la recta proyectiva  $L^\omega$  de  $E^*$ .

Demostración:



Dada la recta proyectiva  $\Delta$  de  $E^*$ , por el Teorema de Incidencia se verifica que ó bien  $\Delta \cap H_i$  es un punto  $a_i$ , ó bien es  $\Delta \subset H_i$ , y en éste último caso, como  $L$  es hiperplano de  $H_i$  se verifica  $\Delta \cap L \neq \emptyset$ . Así si  $\Delta \cap L = \emptyset$  es  $H_i = \{a_i\}$ .

Probemos que si  $\Delta \cap L = \emptyset$  entonces la aplicación  $h: L^\omega \ni H_i \rightarrow \Delta \cap H_i \in \Delta$  es una homografía. Esto concluiría la demostración, ya que las homografías conservan la razón doble.

Si  $L = P(\hat{L})$ , sea  $\hat{L}^\omega = \langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} \rangle$  con  $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \hat{E}^* - \{0\}$ , y tomemos  $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{E}$  tales que  $\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \hat{\Delta}$  :

si  $H \in L^\omega$ ,  $H = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \Leftrightarrow H = P((\lambda \hat{\alpha} + \mu \hat{\beta})^\omega)$ .

Análogamente  $(\hat{a}, \hat{b})$  determina en  $\Delta$  un sistema de coordenadas homogéneas de forma que si  $p \in \Delta$ ,  $p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow p = [x\hat{a} + y\hat{b}]$ .

La condición  $h \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  equivale a:

$$(\lambda \hat{\alpha} + \mu \hat{\beta} / x\hat{a} + y\hat{b}) = 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} (\hat{\alpha}/\hat{a}), & (\hat{\alpha}/\hat{b}) \\ (\hat{\beta}/\hat{a}), & (\hat{\beta}/\hat{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \text{ que}$$

determina las ecuaciones de una homografía siempre que

$$\det \begin{pmatrix} (\hat{\alpha}/\hat{a}) & (\hat{\alpha}/\hat{b}) \\ (\hat{\beta}/\hat{a}) & (\hat{\beta}/\hat{b}) \end{pmatrix} \neq 0$$

lo cual es cierto, ya que por ser  $\Delta \cap L = \emptyset$ , el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} (\hat{\alpha}/\hat{a}) & (\hat{\alpha}/\hat{b}) \\ (\hat{\beta}/\hat{a}) & (\hat{\beta}/\hat{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \text{ es incompatible.}$$

### 1.3 Homografía dual

Sean  $E = P(E)$ ,  $E' = P(E')$  espacios proyectivos. Si  $\hat{f}: E \rightarrow E'$  es aplicación lineal, la aplicación lineal transpuesta  $\hat{f}^t: E'^* \rightarrow E^*$  viene definida por la condición  $\hat{f}^t(\hat{\alpha}') = \hat{\alpha}' \circ \hat{f}$  (véase . . . Cap II). La traducción proyectiva de la transposición viene explicitada en el siguiente resultado:

#### 1.3.1 Teorema

Sea  $f = [\hat{f}] : E \rightarrow E'$  una homografía. Si  $H$  es hiperplano de  $E$  entonces  $f(H)$  es hiperplano de  $E'$ , y la aplicación  $f^*: E'^* \supset H \rightarrow f(H) \in E'^*$  es una homografía que verifica  $f^* = [(\hat{f}^t)^{-1}]$ .

Demostración:

La primera afirmación es evidente a partir de

La segunda es consecuencia de la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{f^*} & E'^* \\ \uparrow \pi & & \uparrow \pi' \\ \hat{E}^* - \{0\} & \xrightarrow{\hat{f}^t} & E'^* - \{0\} \end{array}$$

En efecto: si  $\hat{\alpha}' \in E'^* - \{0\}$  se verifican las equivalencias:

$$\hat{x} \in \ker(\hat{f}^t(\hat{\alpha}')^\omega) \Leftrightarrow (\hat{\alpha}' \circ \hat{f})(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{x}) \in \ker \hat{\alpha}' \text{ y por tanto se tiene,}$$

$$\hat{f}(\hat{f}^t(\hat{\alpha}')^\omega) = \hat{\alpha}'^\omega, \text{ y proyectivizando la igualdad se deduce,}$$

$$f(P(\hat{f}^t(\hat{\alpha}')^\omega)) = f^* \cdot \pi \cdot \hat{f}^t(\hat{\alpha}') = \pi'(\hat{\alpha}') \text{ que es lo que queríamos probar.}$$

La aplicación  $\ast: GP(E) \ni f \mapsto f^\ast \in GP(E^\ast)$  es un isomorfismo de grupos

Demostración:

Por las propiedades de la transposición ( . . . Cap II) se deduce que es un homomorfismo suprayectivo de grupos.

Si  $f \in GP(E)$  y  $f^\ast = id: E^\ast \rightarrow E^\ast$ , se concluye que todos los hiperplanos de  $E$  son invariantes por  $f$ . Como cada punto de  $E$  puede escribirse como intersección de hiperplanos, se concluye que  $f=id$ .

### 1.3.3 Corolario

Si  $f: E \rightarrow E'$  es homografía, y  $A$  es subespacio proyectivo de  $E$ , entonces  $f^\ast(A^\omega) = f(A)^\omega$ .

La demostración queda como ejercicio.

## 1.4 El Principio de Dualidad

Es un principio básico de argumentación característico de la geometría proyectiva, y se basa en la existencia de estructura proyectiva dual

### 1.4.1 Teoremas duales:

Supuesto demostrado un teorema  $T$  de geometría proyectiva, al aplicarlo al espacio proyectivo (dual) de hiperplanos, y traducir su enunciado en términos de la geometría proyectiva del espacio puntual original, se obtiene un nuevo teorema  $T^\omega$  que se denomina teorema dual de  $T$ .

Puede probarse que  $T^{\omega\omega} = T$ .

Trataremos de clarificar ésta idea mediante algunos ejemplos sencillos:

### 1.4.2 Ejemplo

El siguiente teorema  $T_n$  es válido para espacios proyectivos de dimensión  $n \geq 2$ :

"Dos rectas con un punto común en un espacio proyectivo  $n$ -dimensional, son coplanarias"

Nótese que el enunciado  $T_2$  es banal

Para encontrar el enunciado  $T_3^\omega$  debe tenerse en cuenta que en un espacio proyectivo tridimensional se tiene:

- i) tres planos son "coplanarios" si (y solo si) tienen un punto en común
- ii) tres planos están "alineados" si tienen una recta en común.

Así  $T_3$  se enuncia literalmente: "Todos los hiperplanos de dos haces rectilíneos de hiperplanos en un espacio proyectivo tridimensional, con un hiperplano común, tienen un punto en común."

Dado que la recta de cada haz viene determinada por la intersección de dos de sus hiperplanos distintos, se observa que el enunciado

$T_3'$ : "En un espacio proyectivo tridimensional, dos rectas coplanarias tienen un punto en común", que es el enunciado recíproco de  $T_3$ .

El paso directo de  $T_3$  a  $T_3'$  puede realizarse directamente de la siguiente forma:

1ª) Se establece un enunciado esquemático de  $T_3$  del tipo:

" Sean  $a, b$  dos rectas de un espacio proyectivo tridimensional, tales que existe un punto  $c$  con  $c \subset a \cap b$ . Existe entonces un plano  $d$  tal que  $a \subset d$  y  $b \subset d$ "

2ª) Intercambiamos en el enunciado anterior los siguientes términos:

PUNTO  $\leftrightarrow$  PLANO , RECTA  $\leftrightarrow$  RECTA ,  $\subset \leftrightarrow \cap$  ,  $\subset \leftrightarrow \supset$  , y se obtiene:

" Sean  $a$  y  $b$  dos rectas de un espacio proyectivo tridimensional tales que existe un plano  $c$  tal que  $c \supset a \supset b$ . Existe entonces un punto  $d$  tal que  $d \subset a$  y  $d \subset b$ "

3ª) Si escribimos este último enunciado en un lenguaje más compacto, se obtiene el enunciado  $T'$  recíproco de  $T$ .

Este ejemplo ilustra el siguiente enunciado general:

#### 1.4.3 Teoremas de incidencia duales

En relación con un teorema de incidencia  $T$  de un espacio proyectivo  $n$ -dimensional, puede obtenerse su teorema dual  $T^w$ , intercambiando en el enunciado de  $T$  los siguientes términos:

SUBESPACIO  $r$ -DIMENSIONAL  $\leftrightarrow$  SUBESPACIO  $(n-r-1)$ -DIMENSIONAL

$\subset \leftrightarrow \cap$  ,  $\subset \leftrightarrow \supset$  .

La demostración de éste principio descansa esencialmente en las propiedades de la correlación de dualidad establecidas en 1.2.2, y será sugerida en la sección de ejercicios.

#### 1.4.4 Ejemplo

El enunciado  $T_4^w$  dual de  $T_4$  del ejemplo 1.4.2, se obtiene directamente de 1.4.3 quedando:

$T_4$  : " En un espacio proyectivo de dimensión cuatro, dos planos contenidos en un hiperplano, tienen una recta común"

El principio de dualidad va sin embargo más allá de los teoremas de incidencia, y es aplicable a cualquier teorema de la geometría proyectiva:

#### 1.4.5 Ejemplo

Considerese el siguiente enunciado:

$T$ : "Toda transformación proyectiva en un espacio proyectivo comple-

jo admite algun punto fijo".

Aplicando T al espacio proyectivo dual, y teniendo en cuenta 1.3 se obtiene:

T: "Toda transformación proyectiva en un espacio proyectivo complejo admite un hiperplano invariante"

## 2. RESTRICCIONES AFINES EN GEOMETRIA PROYECTIVA

En 3.4.2 Cap IX se probó la existencia de una estructura afin canónica para el complementario de un punto b de una recta proyectiva  $\Delta$ , de forma que fué posible identificar de forma natural la completación proyectiva de la recta afin  $\Delta - \{b\}$  con  $\Delta$ , y b con el punto del infinito.

En éste epígrafe mandaremos al infinito todos los puntos de un hiperplano H de un espacio proyectivo E, de manera que la extensión proyectiva X del espacio afin canónico  $X=E-H$  pueda identificarse de forma natural con E, y H con los puntos del infinito de X. Esto permitirá traducir sistemáticamente la teoría de extensiones proyectivas de subespacios afines y aplicaciones a éste nuevo contexto.

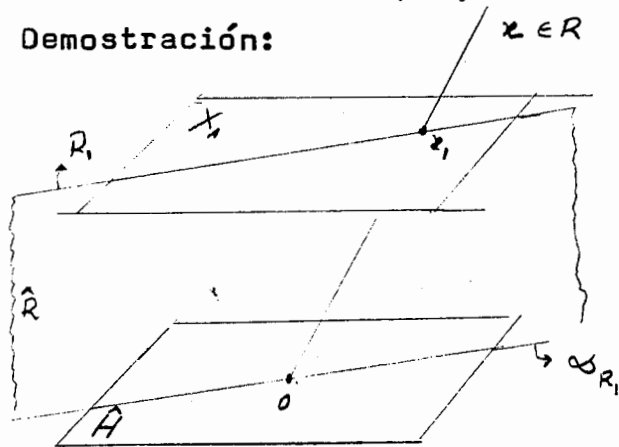
### 2.1 Estructura afin canonica para el complementario de un hiperplano.

2.1.1 Sea E un espacio proyectivo de dimensión  $n-1$ , y sea H un hiperplano de E. Por el teorema de incidencia, cada recta proyectiva  $\Delta$  de E ó bien está contenida en H, ó bien  $\Delta \cap H = b$  punto de H. En este caso  $\Delta - \{b\} \subset E-H$  es una recta afin. Parece razonable pensar que dicha recta está sumergida en una estructura afin global para E-H:

#### 2.1.2 Teorema

En las hipótesis de 2.2.1, existe una estructura afin sobre el conjunto  $X=E-H$  tal que toda recta afin R de X es de la forma  $R = \bar{R} \cap X = \bar{R} - (\bar{R} \cap H)$  siendo  $\bar{R}$  una recta proyectiva de E no contenida en H. *con su estructura afin canonica*

Demostración:



Sea  $H = P(\hat{H})$  y  $\hat{\alpha} \in \hat{E}^* - \{0\}$  tal que  $\ker \hat{\alpha} = \hat{H}$ . Sea  $X_1 = \{x_1 \in \hat{E} / \hat{\alpha}(x_1) = 1\}$ . La aplicación  $I_1: X = E-H \ni x \mapsto x_1 = x \cap X_1 \in X_1$  es biyectiva. Damos a X la estructura de espacio afin inducida a través de  $I_1$  por la estructura afin canonica de  $X_1$  con espacio vectorial asociado  $\hat{H}$

Probemos que ésta es la estructura afin buscada para X:



Sea  $R$  recta afin de  $X$ , es decir,  $I_1(R) = R_1$  es recta afin de  $X_1$ . Su extensión vectorial  $\hat{R}_1 \subset \hat{E}$  verifica  $\hat{R}_1 \cap X_1 = R_1$ . Sea  $\bar{R} = P(\hat{R}_1)$ ; claramente es  $\bar{R} \cap H = \infty_{R_1}$  y  $\tilde{I}_1(\infty_R) = \infty_{R_1} = \bar{R} \cap H$ , así si  $(a, x, c) \in R$ ,  $I_1(a, x, c) =$

$(a_1, x_1, c_1) \in R_1$  y se verifica:

$$(a; x; c)_R \stackrel{(1)}{=} [a, \infty_R; x, c]_{\bar{R}} \stackrel{(2)}{=} [a_1, \infty_{R_1}; x_1, c_1]_{\bar{R}_1} \stackrel{(3)}{=} [a, \bar{R} \cap H; x, c]_{\bar{R}}$$
 en donde:

-la igualdad (1) es consecuencia de 3.4.2 (Cap IX) en donde se dió estructura afin canónica al complementario de un punto en una recta proyectiva.

-La igualdad (2) se verifica por ser  $\tilde{I}_1: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1 = E$  homografía, (donde  $I_1$  es la extensión proyectiva de la aplicación afin  $\tilde{I}_1$ ).

-La igualdad (3) es consecuencia de la identificación canónica que permite escribir  $\tilde{X}_1 = E$

Los siguientes resultados, consecuencia inmediata del teorema anterior establecen la unicidad de la estructura afin sobre  $X = E - H$ , y la igualdad  $X = E$ , salvo homografías:

### 2.1.3 Corolario

En las hipótesis de 2.1.1, si  $X = E - H$  es el espacio afin construido en 2.1.2, se verifica:

i) Dada una recta afin  $R$  de  $X$ , existe una única recta proyectiva, que denotamos por  $\bar{R}$ , tal que  $\bar{R} \cap X = R$ .

ii) Recíprocamente, el espacio afin  $X = E - H$ , verifica la siguiente propiedad  $P$ : "Para toda recta proyectiva  $\Delta$  de  $E$  no contenida en  $H$ , es  $\Delta = \bar{\Delta} \cap X$  con su estructura afin canónica (dada en 3.4.2 Cap IX) recta afin de  $X$ "

Demostración:

i) Si  $\bar{R}_1$  y  $\bar{R}_2$  son rectas proyectivas que verifican  $\bar{R}_1 \cap X = \bar{R}_2 \cap X = R$ , recta afin de  $X$ , entonces  $\bar{R}_1$  y  $\bar{R}_2$  tienen al menos dos puntos en común, y por tanto  $\bar{R}_1 = \bar{R}_2$ .

ii) Si  $\Delta$  es una recta proyectiva de  $E$  no contenida en  $H$ , entonces  $\Delta \cap H$  es un punto de  $\Delta$  y existen al menos dos puntos distintos  $a, b \in \Delta \cap X$ . A partir de la recta afin  $R$  de  $X$  definida por los puntos  $a$  y  $b$ , se obtiene por i) una recta proyectiva  $\bar{R}$  tal que  $\bar{R} \cap X = R$ , y  $\bar{R}$  coincide con  $\Delta$  por tener comunes los puntos  $a$  y  $b$ . Así se tiene  $\bar{R} \cap H = \Delta \cap H$  que es recta afin de  $X$

#### 2.1.4 Corolario

La estructura afin de  $X=E-H$  dada en 2.1.2 es la única verificando la propiedad P de 2.1.3 ii)

Demostración:

Nótese que la propiedad P caracteriza a las rectas afines de  $X$ , y la razón simple:

Si  $(a, x, c)$  es un sistema de tres puntos (al menos dos distintos) sobre la recta afin  $R$  de  $X$ , existe una única recta proyectiva  $\bar{R}$  de  $E$  con  $\bar{R} \cap X = R$ , y  $(a; x; c) = [a, \bar{R} \cap H; x, c]$ .

#### 2.1.5 Corolario

Dos rectas afines  $R_1, R_2$  de  $X=E-H$  (con su estructura afin canónica) son paralelas, si y solo si  $\bar{R}_1 \cap H = \bar{R}_2 \cap H$ .

Demostración:

Supóngase  $R_1 \neq R_2$ .

Si  $\bar{R}_1 \cap H = \bar{R}_2 \cap H = \alpha \in H$ , las rectas  $\bar{R}_1, \bar{R}_2$  generan (por el teorema de incidencia) un plano proyectivo  $P$ , y  $R_1 = \bar{R}_1 \cap H, R_2 = \bar{R}_2 \cap H$  son dos rectas afines del plano afin  $P - (P \cap H)$ , que tienen intersección vacía.

Por el teorema de incidencia afin, se concluye que  $R_1$  y  $R_2$  son rectas afines paralelas.

El recíproco se prueba de forma analoga.

#### 2.1.6 Corolario

Dotemos a  $X=E-H$  de su estructura afin canónica dada en 2.1.2:

La aplicación  $h: \tilde{X} \rightarrow E$  definida por  $h(x) = x$  si  $x \in X$ , y  $h(\infty_R) = \bar{R} \cap H$  para toda recta afin de  $X$ , es una homografía que permite identificar:

- $\bar{R}$  con  $\tilde{R}$ , para toda recta afin  $R$  de  $X$
- $\infty_X$  con  $H$
- $\tilde{X}$  con  $E$

Demostración:

La aplicación  $h$  está definida sin ambigüedad, y es biyectiva en virtud de 2.1.5. Nótese además que  $h$  coincide con la homografía

$\tilde{I}_1: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1 = E$  considerada en la demostración del teorema 2.1.2.

Retomando la definición 1.1.4 del capVIII, se puede establecer una aparente generalización del concepto de espacio proyectivo afin:

#### 2.1.7 Definición

Un espacio proyectivo afin es una pareja  $(E, H)$  donde  $E$  es un espacio proyectivo, y  $H$  es un hiperplano de  $E$

En particular, si  $X$  es un espacio afín  $X = (X, \infty_X)$  es un espacio proyectivo afín. Observese que si  $(E, H)$  es un espacio proyectivo afín, tomando  $X = E - H$  se verifica que  $\tilde{X} = E$ ,  $\infty_X = H$  y por tanto  $(E, H) = \tilde{X}$ .

### 2.1.8 Ejemplo

En el espacio proyectivo  $P_n(K)$  se fija el hiperplano  $H$  de ecuación  $x_0 = 0$ . Entonces en  $X = P_n(K) - H = \{[x_i] / x_0 \neq 0\}$  la estructura afín canónica se define por la biyección:  $I_1: X \ni \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1/x_0 \\ \vdots \\ x_n/x_0 \end{pmatrix} \in A_n(K)$ , y por tanto  $\tilde{A}_n(K) = (P_n(K), H)$ .

Traduciendo al lenguaje de la definición 2.1.7 anterior los resultados del epígrafe 2.1 del capítulo VIII se tiene:

### 2.1.9 Teorema

Dado  $(E, H)$  espacio proyectivo afín,  $X = E - H$  entonces:

- i) Para  $A$  subespacio afín de  $X$ , existe un único  $\tilde{A}$  subespacio proyectivo de  $E$  tal que  $\tilde{A} \cap X = A$ . Además  $\tilde{A} \cap H = \infty_A$ .
- ii) Recíprocamente, si  $\tilde{A}$  es subespacio proyectivo de  $E$  tal que  $\tilde{A} \not\subset H$ , entonces  $\tilde{A} \cap X = A$  es subespacio afín de  $X$ , y  $\tilde{A} = \tilde{A}$ .

Denotamos por  $\mathcal{S}A(E, H) = \{\tilde{A} / A \in \mathcal{S}A(X)\} = \{\tilde{A} \in \mathcal{S}P(E) / \tilde{A} \not\subset H\}$ .

Nótese que  $\mathcal{S}A(E, H) \subset \mathcal{S}P(E)$ .

## 2.2 RESTRICCIONES AFINES DE TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS

Como consecuencia de 2.1.6 es posible traducir sistemáticamente toda la teoría de espacios proyectivos afines desarrollada en el capítulo VIII a los espacios  $(E, H)$  de la definición 2.1.7. Destaquemos no obstante explícitamente los siguientes conceptos y resultados:

### 2.2.1 Definición

Sea  $(E, H)$  un espacio proyectivo afín. Una transformación proyectiva afín de  $(E, H)$  es una transformación proyectiva de  $E$  que deja invariante el hiperplano  $H$ . Escribimos  $GA(E, H) = \{f \in GP(E) / f(H) = H\}$ .

$GA(E, H)$  tiene estructura natural de grupo, y se denomina grupo proyectivo afín de  $(E, H)$ , que permite identificar  $f$  y  $\tilde{f}$ .

### 2.2.2 Teorema

Sea  $(E, H)$  un espacio proyectivo afín,  $X = E - H$  con su estructura afín canónica. Se tiene:

- i) Si  $f \in GA(X)$  existe una única transformación  $\tilde{f} \in GA(E, H)$  tal que  $\tilde{f}_X = \tilde{f}/X = f: X \rightarrow X$ . La aplicación  $GA(X) \ni f \mapsto \tilde{f} \in GA(E, H)$  es un isomorfismo de grupos.

- ii) Si  $A \in \mathcal{S}A(X)$  y  $f \in GA(X)$  se verifica  $\tilde{f}(\tilde{A}) = \tilde{f}(A)$ .

En lo que sigue,  $E$  es un espacio proyectivo de dimensión finita  $n \geq 2$ , y  $H$  es un hiperplano de  $E$ .  $X=E-H$  es el espacio afin construido en 2.1 ; Si  $f \in GA(E,H)$  escribimos  $f_X$  para denotar la restricción de  $f$  a  $X$ .  $f_X \in GA(X)$  y verifica  $f_X = f$ . Se identificará  $X$  con  $E$  y  $X$  con  $H$ .

### 2.2.3 Definición (Homologías)

Una transformación proyectiva  $f$  de  $E$  que deja fijos todos los puntos de  $H$  ( es decir,  $f(a)=a$  para todo  $a \in H$ ) se denomina homología de  $E$  con hiperplano central  $H$ .

El estudio de las homologías se realiza mejor desde la perspectiva del espacio afin  $X=E-H$ :

### 2.2.4 Teorema

Sea  $f \in GA(E,H)$ . Entonces  $f$  es homología de hiperplano central  $H$  si y solo si  $f_X$  es una dilatación del espacio afin  $X=E-H$ .

Demostración:

Si  $f$  es homología, para probar que  $f$  es dilatación es suficiente demostrar (por 1.2.5 Cap V) que  $f_X$  transforma cada recta afin en una recta paralela:

Si  $R$  es una recta afin de  $X$ , se verifica para  $\tilde{R} \cap H = a \in H$  que

$$f_X(\tilde{R}) \cap H = \tilde{f}_X(\tilde{R}) \cap H = f(\tilde{R}) \cap f(H) = f(\tilde{R} \cap H) = f(a) = a.$$

Por 2.1.5 las rectas  $R$  y  $f_X(R)$  son paralelas.

Recíprocamente, si  $f_X$  es dilatación, entonces  $\tilde{f}_X = f$  deja fijos los puntos de  $\mathcal{L}_X = H$ .

Traduciendo los elementos geométricos de las dilataciones al lenguaje proyectivo se tiene:

### 2.2.5 Teorema

Sea  $f: E \rightarrow E$  una homología de hiperplano central  $H$ , distinta de la aplicación identidad. Existe entonces un único punto  $c \in E$ , tal que para todo  $x \in E$  los puntos  $c, x, f(x)$  están alineados. Además  $H \cup \{c\}$  es el conjunto de puntos fijos para  $f$ . Por otra parte:

i)  $f$  queda unívocamente determinada por su hiperplano central  $H$ , su centro  $c$ , y una pareja  $a, a'$  de puntos homologos distintos.

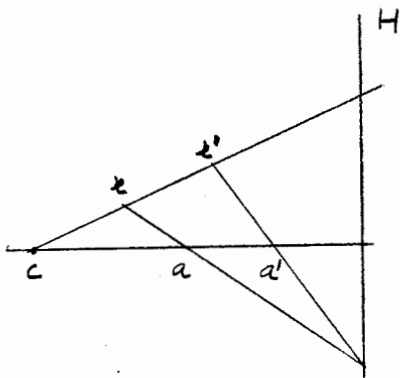
ii) Si  $c \notin H$ , existe un único  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  denominado razón de homología tal que para todo  $x \notin H \cup \{c\}$  se tiene:  $[c, c, x \in H; f(x), x] = \lambda$  ( $\lambda \neq 1$ )

Si  $c \in H$  se dice que la razón  $\lambda$  de homología es la unidad.

Demostración:

Por 2.2.4  $f_x: X \rightarrow X$  es dilatación. Hay dos posibilidades:

a)  $f_x$  es homotecia de centro  $c$ . En este caso el punto  $c$  es el único punto fijo para  $f_x$ , y  $H \cup \{c\}$  es el conjunto de puntos fijos de  $f$ .



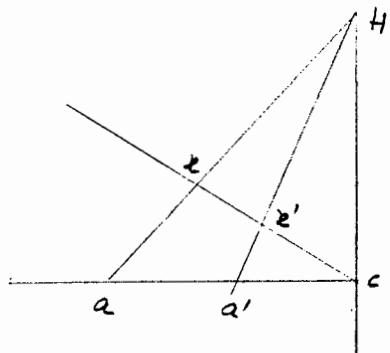
Para  $x \notin H \cup \{c\}$ , los puntos  $c, x, f(x)$  están situados sobre la recta afin  $R_x$  que contiene a  $c$  y a  $x$  y sobre la recta proyectiva  $\tilde{R}_x$  extensión proyectiva de  $R_x$ . Se verifica:

$(c; f(x); x) = \lambda$ , siendo  $\lambda$  la razón de homotecia de  $f_x$ . Por 2.1.2 se verifica:

$$\lambda = [c, R_x \cap H; f(x), x].$$

Si se conocen  $a, a'$  tales que  $a' = f(a) \neq a$ , entonces  $a \in X$ , y  $\lambda$  se determina por la fórmula  $\lambda = [c, R_a \cap H; a', a]$ , con lo cual queda determinada  $f$ .

b)  $f_x$  es traslación. El conjunto de puntos fijos para  $f$  es en este caso, exactamente  $H$  (ya que ahora  $f_x$  no tiene puntos fijos)



Para cada  $x \in X$  las rectas afines  $R_x$  definidas por los puntos  $x$  y  $f_x(x) = f(x)$  tienen todas la misma dirección  $c \in H$ , es decir  $\tilde{R}_x \cap H = c$ .

Por tanto  $c, x, f(x)$  están situados sobre la misma recta proyectiva  $\tilde{R}_x$ . Esto concluye la demostración.

### 3. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA

La técnica de envío de puntos al infinito permite traducir al lenguaje proyectivo el segundo teorema fundamental de la geometría afin:

Se prueba que una biyección entre espacios proyectivos (de dimensión superior a la unidad) que conserve rectas, es automáticamente semi-homografía. Para rectas proyectivas se da una versión especial del teorema basada en la conservación de la separación armónica de puntos

#### 3.1 Segundo Teorema Fundamental (Versión general)

Probemos dos lemas auxiliares:

##### 3.1.1 Lema

Un subconjunto  $A$  de un espacio proyectivo  $E$  es subespacio proyectivo si y solo si contiene a cada recta definida por dos cualesquiera de sus puntos.

Demostración

Supongase que para cada  $a, b \in A$  se verifica que  $\langle a, b \rangle \subset A$  :

Si  $\hat{a}, \hat{b} \in \pi^{-1}(A)$  entonces  $a = \pi(\hat{a}), b = \pi(\hat{b})$  son puntos de  $A$ ; como  $\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \langle a, b \rangle$  y  $\langle a, b \rangle \subset A$  se concluye que  $\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle \subset \pi^{-1}(A) \cup \{0\}$ , y en consecuencia  $\pi^{-1}(A) \cup \{0\} = \hat{A}$  es subespacio vectorial de  $\hat{E}$ .

La otra implicación es trivial.

### 3.1.2 Lema

Sea  $H$  un subespacio proyectivo de  $E$ . Entonces son equivalentes las afirmaciones:

- i)  $H$  es hiperplano proyectivo de  $E$
- ii) Existe  $p \in E - H$  tal que  $\Delta \cap H \neq \emptyset$  para toda recta proyectiva  $\Delta$  tal que  $p \in \Delta$ .

Demostración

- i)  $\Rightarrow$  ii) Por el teorema de incidencia para subespacios proyectivos.
- ii)  $\Rightarrow$  i) Si  $\dim H < n-1$ , entonces para todo  $p \notin H$ ,  $p = [\hat{p}]$ , se verifica que  $\hat{p} \notin \hat{H}$  y existe  $\hat{A}$  subespacio vectorial de  $\hat{E}$  con  $\hat{p} \in \hat{A}$  y  $\hat{E} = \hat{H} \oplus \hat{A}$ . Así  $\dim \hat{A} \geq 2$ ,  $\dim A \geq 1$ , y  $H \cap A = \emptyset$ . Cada recta proyectiva contenida en  $A$ , que pasa por  $p$  no corta a  $H$ .

### 3.1.3 Teorema

Sea  $f: E \rightarrow E'$  una aplicación biyectiva entre espacios proyectivos, y  $\dim E' \geq 2$ . Supongase que  $f(\Delta)$  es una recta proyectiva de  $E'$  para cada recta proyectiva  $\Delta$  de  $E$ . Entonces  $f$  es una semihomografía.

Demostración:

Si  $A$  es un subespacio proyectivo de  $E$ , fijados dos puntos  $a', b' \in f(A)$ ,  $a' = f(a), b' = f(b)$ ,  $a, b \in A$ , por 3.1.1 se tiene:  $\langle a, b \rangle \subset A$  y así  $f(\langle a, b \rangle) = \langle a', b' \rangle \subset f(A)$ . Por 3.1.1  $f(A)$  es subespacio proyectivo de  $E'$ . Probemos que  $f$  transforma un hiperplano (cualquiera)  $H$  de  $E$  en un hiperplano  $f(H)$  de  $E'$ .

En efecto: por 3.1.2 se sabe que existe un punto  $p \in E - H$  tal que  $\Delta \cap H \neq \emptyset$  para toda recta proyectiva  $\Delta$  que contiene a  $p$ . Si  $\Delta'$  es una recta proyectiva de  $E'$  con  $f(p) \in \Delta'$ , es fácil ver que puede construirse  $\Delta$  recta proyectiva de  $E$  con  $f(\Delta) = \Delta'$  y  $p \in \Delta$ . Como  $\Delta \cap H \neq \emptyset$  se deduce que  $f(\Delta \cap H) = \Delta' \cap f(H) \neq \emptyset$ , y por 3.1.2  $f(H)$  es hiperplano de  $E'$ .

Sean  $X = E - H$ ,  $X' = E' - f(H)$  los espacios afines correspondientes a  $(E, H)$  y  $(E', f(H))$ . Veamos que  $f_X: X \rightarrow X'$  transforma rectas en rectas:

Si  $R$  es recta afin de  $X$ ,  $\tilde{R}$  es recta proyectiva de  $E$  y se tiene  $f_X(R) = \tilde{f}_X(\tilde{R} \cap X) = f(\tilde{R} \cap X) = f(\tilde{R}) \cap X'$  que es recta afin de  $X'$ , ya que por

hipótesis  $f(R)$  es recta proyectiva de  $E$ .

Por otra parte si  $R_1$  y  $R_2$  son rectas afines paralelas de  $X$ , entonces  $\tilde{R}_1 \cap H = \tilde{R}_2 \cap H = \alpha$  y  $f(\tilde{R}_1) \cap f(H) = f(\tilde{R}_2) \cap f(H) = f(\alpha)$ . Así  $f_X(R_1)$  es paralela a  $f_X(R_2)$ , y por la modificación introducida en 1.1.8 Cap V del teorema fundamental de la geometría afin, se concluye que  $f_X$  es aplicación semiafin (sin hipótesis adicional  $K \neq Z_2$ !). Aplicando ahora la teoría de extensiones proyectivas expuesta en 3.3 Cap VIII, y teniendo en cuenta el corolario 2.1.6 se concluye que  $\tilde{f}_X = f$  es semihomografía.

Estamos ahora en condiciones de probar el recíproco del teorema 3.2.7 Cap IX:

### 3.1.4 Corolario

Una biyección  $f$  de un espacio proyectivo  $E$  sobre un cuerpo  $K$  es transformación proyectiva si y solo si conserva la razón doble.

Demostración:

Si  $\dim E=1$ , el resultado es equivalente al corolario 3.2.5 Cap IX.

Supongase que  $\dim E \geq 2$ :

Si  $f$  conserva la razón doble (def. 3.2.6 Cap IX) verifica en particular la hipótesis de 3.1.3 y  $f$  es por tanto semihomografía.

Si  $K=Z_2$  entonces  $f$  es homografía (pues el único automorfismo del cuerpo  $Z_2$  es la identidad)

Si  $K \neq Z_2$ , tomando  $H$  hiperplano de  $E$ ,  $X=E-H$ ,  $X'=E-f(H)$ , se concluye fácilmente que  $f_X: X \rightarrow X'$  conserva la razón simple (utilícese 3.4.1 ii) Cap IX);  $f_X$  es por 4.3.4 Cap IV aplicación afin y así  $f = \tilde{f}_X$  es transformación proyectiva.

El resultado recíproco es justamente el corolario 3.2.7 Cap IX

## 3.2 Un Teorema Fundamental para rectas proyectivas

### 3.2.1 Definición

Cuatro puntos ordenados  $(a,b,c,d)$  de una recta proyectiva  $\Delta$  se dice que están en división armónica si  $[a,b;c,d] = -1$

### 3.2.2 Proposición

Si  $(a,b,c,d)$  son puntos en división armónica de una recta proyectiva  $\Delta$ , entonces también están en división armónica:

$(b,a,c,d)$  y  $(c,d,a,b)$

Dmostración:

Es consecuencia de que  $[a,b;c,d] = [b,a;c,d]^{-1} = [c,d;a,b]$ . (Véase

3.3.2 Cap IX).

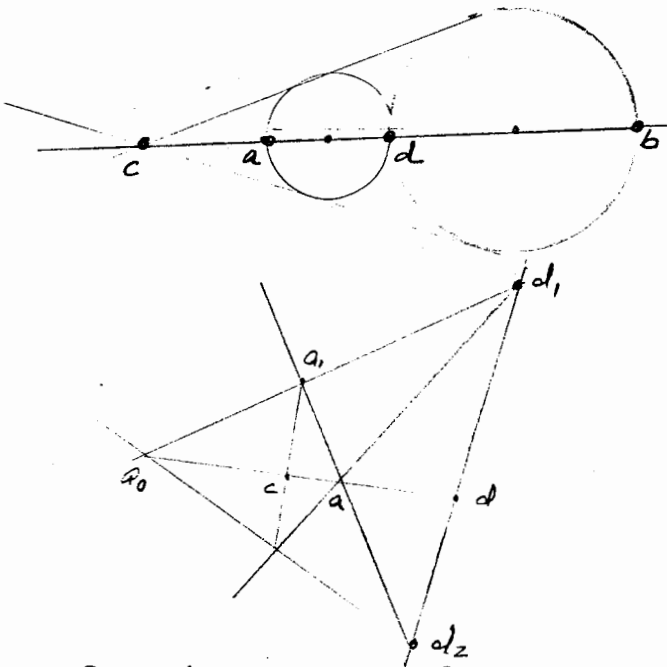
3.2.3 Observaciones

i) Si  $(a,b,c,d)$  son cuatro puntos en división armónica de la recta proyectiva  $\Delta$ , se dice también que  $\{a,b\}$  separa armónicamente a  $\{c,d\}$ . Nótese que en virtud de 3.3.2 no existe ambigüedad en la terminología, y la relación de separación armónica es simétrica

ii) Nótese que en virtud de 3.4.1 ii) Cap IX, si  $a,b,c,d$  son puntos de la recta proyectiva  $\Delta$  entonces  $\{a,b\}$  separa armónicamente a  $\{c,d\}$  si y solo si  $(a;c;d)_{\Delta-\{b\}} = -1$ , es decir,  $a$  es el punto medio entre  $c$  y  $d$  en la recta afin  $\Delta - b$

iii) Una idea intuitiva de la separación armónica de puntos viene dada

en la figura: Los puntos  $\{a,b\}$  separan armónicamente a  $\{c,d\}$  (compruébese)



iv) Utilizando la observación ii) puede verse en la figura de la izquierda que los puntos  $\{a_0, a_1\}$  separan armónicamente a  $\{c, d\}$ . Basta enviar al infinito la recta  $\langle d_1, d_2 \rangle$  y observar que  $\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_0, a \rangle$  son las diagonales del paralelogramo de vertices  $a_0, a_1, a, a_2$  así  $c$  es el punto medio del segmento definido por  $a_0$  y  $a$ .

Demostraremos que la conservación de la separación armónica caracteriza a las semihomografías entre rectas proyectivas. Probemos antes el siguiente lema de tipo técnico:

3.2.4 Lema

Si  $\sigma:K \rightarrow K'$  es un isomorfismo de cuerpos, entonces la aplicación  $\tilde{\sigma}:\tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$  tal que  $\tilde{\sigma}(\infty) = \infty'$  y  $\tilde{\sigma}/K = \sigma:K \rightarrow K'$ , es una semihomografía que verifica  $[a,b;c,d]^{\tilde{\sigma}} = [\tilde{\sigma}(a), \tilde{\sigma}(b); \tilde{\sigma}(c), \tilde{\sigma}(d)]$  para todo  $a,b,c,d \in \tilde{K}$ .

Demostración

Nótese que si  $a,b,c \in K$ ,  $\sigma((a;b;c)) = \sigma\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\sigma(b)-\sigma(a)}{\sigma(c)-\sigma(a)} = (\sigma(a); \sigma(b); \sigma(c))$ . Por 4.3.2 Cap IV se concluye que  $\sigma:K \rightarrow K'$  es semiafin, y  $\tilde{\sigma}$  su extensión es por tanto semihomografía. La última afirmación es ya evidente.



### 3.2.5 Definición

Sea  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  una aplicación biyectiva entre rectas proyectivas.

Se dice que  $f$  conserva la separación armónica de puntos si para todo  $a, b, c, d \in \Delta$  con  $[a, b; c, d] = -1$ , se verifica  $[f(a), f(b); f(c), f(d)] = -1$

### 3.2.6 Teorema

Sea  $f: \Delta \rightarrow \Delta'$  una biyección entre las rectas proyectivas  $\Delta$  y  $\Delta'$  sobre los cuerpos  $K$  y  $K'$ , entonces:

i) Si  $f$  es semihomografía respecto al isomorfismo de cuerpos  $\sigma: K \rightarrow K'$ , entonces  $[a, b; c, d]^{\tilde{\sigma}} = [f(a), f(b); f(c), f(d)]$  para todo  $a, b, c, d \in \Delta$ . En particular  $f$  conserva la división armónica.

ii) Recíprocamente, si  $f$  conserva la separación armónica, y  $K \neq \mathbb{Z}_2$ , entonces  $f$  es semihomografía.

Demostración:

i) Fijemos  $(a, b, c)$  tres puntos distintos de  $\Delta$  y sea  $f(a, b, c) = (a', b', c')$ . Tomando  $h: \Delta \rightarrow \tilde{K}$  (respectivamente  $h': \Delta' \rightarrow \tilde{K}'$ ) homografías tales que  $h(a, b, c) = (0, \infty, 1)$  (respectivamente  $h'(a', b', c') = (0, \infty', 1)$ ) se ve que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ \tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{K}' \end{array}$$

es conmutativo, ya que  $\tilde{\sigma}$  y  $h' \circ f \circ h^{-1}$  son semihomografías respecto al isomorfismo de cuerpos  $\sigma: K \rightarrow K'$  que transforman  $(0, \infty, 1)$  en  $(0, \infty', 1)$  (apliquese una versión ampliada de 2.1.7 Cap IX). Se tiene entonces para  $a, b, c, d \in \Delta$ :

$$[f(a), f(b); f(c), f(d)] = [h' \circ f(a), h' \circ f(b); h' \circ f(c), h' \circ f(d)]_{\tilde{K}'} = [a, b; c, d]^{\tilde{\sigma}}$$

ii) Supóngase que  $f$  conserva la separación armónica.

Construyamos  $h$  y  $h'$  como en i) a partir de un terna  $(a, b, c) \subset \Delta$  de tres puntos distintos, y como antes, sea  $\tilde{\sigma}$  la aplicación que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ \tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{K}' \end{array}$$

Nótese que  $\tilde{\sigma}(0, \infty, 1) = (0, \infty', 1)$ . Sea  $\sigma = \tilde{\sigma}/K: K \rightarrow K'$ . Es suficiente demostrar (a partir de 3.2.4) que  $\sigma: K \rightarrow K'$  es isomorfismo de cuerpos: Como  $\tilde{\sigma} = h' \circ f \circ h^{-1}$ , y  $h', f, h^{-1}$  conservan la separación armónica, se concluye que  $\tilde{\sigma}$  conserva la separación armónica, así si  $b, c$  son puntos

de  $K$  y  $a = \frac{-b-c}{2}$  es su punto medio, se verifica:

$(a; b; c) = -1 = [a, \infty; b, c]$  y por tanto  $[\sigma(a), \infty; \sigma(b), \sigma(c)] = -1$ , es decir  $(\sigma(a); \sigma(b); \sigma(c)) = -1$ . En consecuencia,  $\sigma(a) = \frac{\sigma(b) + \sigma(c)}{2} = \sigma\left(\frac{b+c}{2}\right)$ . En particular tomando  $c=0$  se tiene:

$\frac{\sigma(b)}{2} = \sigma\left(\frac{b}{2}\right)$  para cada  $b \in K$ . Esto permite concluir que  $\sigma$  es aditiva.

Si  $x \in K$ , teniendo en cuenta que  $[1, x^2; x, -x] = -1$  se deduce que  $[1, \sigma(x^2); \sigma(x), -\sigma(x)] = -1$  y por tanto  $\sigma(x^2) = \sigma(x)^2$ .

Si  $a, b \in K$  tomando  $a=x+y$   $b=x-y$  se deduce que:

$$\sigma(ab) = \sigma(x^2 - y^2) = \sigma(x)^2 - \sigma(y)^2 = (\sigma(x) + \sigma(y))(\sigma(x) - \sigma(y)) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Esto finaliza la demostración

Por último por 3.1.3 y 3.2.6 i) se tiene:

### 3.2.7 Teorema

Sea  $f: E \rightarrow E'$  una biyección entre espacios proyectivos sobre los cuerpos  $K$  y  $K'$  respectivamente. Supóngase  $\dim E \geq 2$ . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i)  $f$  transforma biyectivamente rectas proyectivas de  $E$  en rectas proyectivas de  $E'$

ii)  $f$  es semihomografía

iii) Existe  $\sigma: K \rightarrow K'$  isomorfismo de cuerpos, tal que cualquiera que sean los puntos alineados  $a, b, c, d$  de  $E$  se verifica que  $f(a), f(b), f(c), f(d)$  están alineados, y  $[f(a), f(b); f(c), f(d)] = [a, b; c, d]^\sigma$ .

Demostración:

i)  $\Rightarrow$  ii) Es el teorema fundamental 3.1.3

ii)  $\Rightarrow$  iii) Es consecuencia de 3.2.6 i)

iii)  $\Rightarrow$  i) Sea  $\Delta$  recta proyectiva de  $E$ ,  $(a, b, c)$  sistema de referencia proyectivo en  $\Delta$ . Los puntos  $(a', b', c') = f(a, b, c)$  están situados sobre una recta  $\Delta'$  de  $E'$ . Sean  $h: \Delta \rightarrow \hat{K}$ ,  $h': \Delta' \rightarrow \hat{K}'$  las homografías tales que  $h(a, b, c) = (0, \infty, 1)$ ,  $h'(a', b', c') = (0, \infty', 1)$ . Por hipótesis

el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ \hat{K} & \xrightarrow{\sigma} & \hat{K}' \end{array}$$

es conmutativo. Como  $h, h'$ , y  $\sigma$  son biyecciones, se concluye que  $f$  es biyectiva, es decir  $f(\Delta) = \Delta'$ .

#### 4. GEOMETRIA Y ESTRUCTURA PROYECTIVAS

Dos espacios proyectivos  $(E, E_1, \pi_1)$   $(E, E_2, \pi_2)$  definidos sobre el mismo conjunto de puntos  $E$  se dirá que inducen la misma estructura proyectiva (sobre  $E$ ) si definen la misma razón doble.

En general dos estructuras proyectivas distintas sobre  $E$  pueden inducir el mismo grupo de transformaciones proyectivas. El objeto final de éste epígrafe 4 es por una parte caracterizar las distintas estructuras proyectivas sobre el conjunto  $E$  que dan lugar a la misma geometría y por otra mostrar como la geometría proyectiva de un espacio viene determinada por la familia de sus rectas proyectivas.

El análisis de éstas cuestiones requieren ciertos preparativos que dan lugar a resultados con interés propio tales como algunos teoremas de extensión de homografías, y una caracterización de las semihomografías como biyecciones que conservan la geometría

$E$  y  $E'$  denotan espacios proyectivos de dimensión finita sobre los cuerpos  $K$  y  $K'$  respectivamente

##### 4.1 Teoremas de extensión de homografías .

El primer teorema fundamental de la geometría proyectiva (2.1.7 Cap IX) nos da un primer ejemplo de la posibilidad de construir transformaciones proyectivas a las que se exigen ciertas restricciones de partida. Utilizaremos el teorema para mostrar otros resultados de este tipo que nos serán de utilidad más adelante.

###### 4.1.1 Teorema

Sean  $A$  y  $A'$  subespacios proyectivos de  $E$ , y  $g: A \rightarrow A'$  una homografía. Existe entonces una transformación proyectiva  $f: E \rightarrow E$  tal que  $f/A = g$ .

Demostración: Supóngase  $A = P(\hat{A})$ ,  $A' = P(\hat{A}')$   $g = [\hat{g}]$ .

Sea  $\hat{\delta} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n)$  base de  $\hat{E}$  con  $\langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_r \rangle = \hat{A}$ . Entonces  $(\hat{g}(\hat{a}_0), \dots, \hat{g}(\hat{a}_r))$  es bse de  $\hat{A}'$  y puede extenderse a una base  $\hat{\delta}' = (\hat{g}(\hat{a}_0), \dots, \hat{g}(\hat{a}_r), \hat{a}'_{r+1}, \dots, \hat{a}'_n)$  de  $\hat{E}$ . Si  $\hat{f}$  es la única transformación lineal de  $\hat{E}$  tal que  $\hat{f}(\hat{\delta}) = \hat{\delta}'$  se concluye que  $\hat{f}/\hat{A} = \hat{g}$  y por tanto  $f/A = g$ , siendo  $f = [\hat{f}]$ .

###### 4.1.2 Teorema

Sean  $A_i$  (respectivamente  $A'_i$ )  $i=1, 2$ , subespacios proyectivos de  $E$  y  $f_i: A_i \rightarrow A'_i$   $i=1, 2$  homografías.

Supongase que  $A_1 \cap A_2 = A'_1 \cap A'_2 = \emptyset$ , existe entonces una transformación proyectiva  $f \in GP(E)$  tal que  $f/A_i = f_i$ ,  $i=1,2$ .

Demostración:

En virtud de 4.1.1 podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$A_1 + A_2 = A'_1 + A'_2 = E$ . Nótese que  $\dim A_i = \dim A'_i$   $i=1,2$ .

Si  $A_i = P(\hat{A}_i)$   $A'_i = P(\hat{A}'_i)$   $f_i = [\hat{f}_i]$   $i=1,2$ , utilizando una técnica parecida a 4.1.1, se puede construir  $\hat{f}$  transformación lineal en  $\hat{E}$  tal que  $\hat{f}/\hat{A}_i = \hat{f}_i$   $i=1,2$ , y tomando  $f = [\hat{f}]$  se tiene  $f/A_i = f_i$ .

Nótese que la transformación proyectiva  $f$  no es única (¿porqué?).

#### 4.1.3 Corolario

Si  $(a_0, a_1, a_2)$  son tres puntos distintos situados sobre una recta proyectiva  $\Delta$  de  $E$ , y  $a \in E - \Delta$ , entonces dada  $\tau: \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$  permutación, existe  $g_\tau \in GP(E)$  tal que  $g_\tau(a_i) = a_{\tau(i)}$ ,  $i=0,1,2$ , y  $g_\tau(a) = a$ .

Demostración:

Por el primer teorema fundamental de la geometría proyectiva (2.1.7 Cap IX) existe  $f \in GP(\Delta)$  con  $f(a_i) = a_{\tau(i)}$   $i=0,1,2$ . Como  $\Delta \cap \{a\} = \emptyset$ , se concluye por 4.1.2 que existe  $g_\tau \in GP(E)$  con  $g_\tau/\Delta = f$  y  $g_\tau(a) = a$ , y  $g_\tau$  verifica las condiciones pedidas.

#### 4.1.4 Corolario

Sean  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  cuatro puntos de  $E$  de los cuales no hay tres alineados. Fijada  $\tau$  permutación de  $\{0,1,2,3\}$ , existe  $g_\tau \in GP(E)$  tal que  $g_\tau(a_i) = a_{\tau(i)}$  para  $i=0,1,2,3$ .

Demostración:

Sea  $P = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$ . Si el sistema es proyectivamente dependiente, entonces  $P$  es un plano, y  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  es un sistema de referencia proyectivo en  $P$ . Por el primer teorema fundamental existe  $f$  transformación proyectiva en  $P$  tal que  $f(a_i) = a_{\tau(i)}$   $i=0,1,2,3$ . Aplicando ahora 4.1.1 se construye  $g_\tau$ .

Si  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  es proyectivamente independiente, entonces  $\dim P = 3$ , y podemos elegir  $a \in P$  tal que  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a)$  sea sistema de referencia proyectivo en  $P$ . La construcción de  $g_\tau$  es análoga al caso anterior: Sea toma  $f \in GP(P)$  con  $f(a_i) = a_{\tau(i)}$   $f(a) = a$ , y se extiende a  $g_\tau$ .

### 4.2 Bijecciones que conservan la geometría

#### 4.2.1 Definición

Una biyección  $f$  entre los espacios proyectivos  $E$  y  $E'$  se dice que es compatible con las geometrías (proyectivas de  $E$  y  $E'$ ) si  $f \circ g \circ f^{-1} \in GP(E')$  para todo  $g \in GP(E)$ , y  $f^{-1} \circ g' \circ f \in GP(E)$  para todo  $g' \in GP(E')$ .

Si  $E = E'$  se dice que  $f$  conserva la geometría

#### 4.2.2 Observaciones

i) Si  $f: E \rightarrow E'$  es una biyección compatible con las geometrías, entonces la aplicación  $f_*: GP(E) \ni g \mapsto f \circ g \circ f^{-1} \in GP(E')$  es un isomorfismo de grupos.

ii) El producto de dos biyecciones compatibles con las geometrías, también es del mismo tipo, y se verifica:  $(f \circ f')_* = f_* \circ f'_*$ ,  $id_* = id$ . En particular la familia de biyecciones de  $E$  que conservan la geometría tiene estructura de grupo, que contiene a  $GP(E)$  como subgrupo.

#### 4.2.3 Proposición

Si  $f: E \rightarrow E'$  es semihomografía entonces  $f$  es compatible con las geometrías.

Demostración:

Supongase  $f$  semihomografía respecto al isomorfismo  $\sigma: K \rightarrow K'$ . Por 2.2 cap IV, se concluye que si  $g \in GP(E)$ , el isomorfismo asociado a  $f \circ g \circ f^{-1}$  es  $\sigma \cdot id \cdot \sigma^{-1} = id$ , y así  $f \circ g \circ f^{-1} \in GP(E')$ . La otra condición se demuestra análogamente.

#### 4.2.4 Teorema

Supongase  $K$  con más de tres elementos:

Si  $f: E \rightarrow E'$  es una biyección compatible con las geometrías, entonces  $f$  es semihomografía.

Demostración:

Probaremos que  $f$  transforma puntos alineados en puntos alineados. Aplicando el mismo razonamiento a  $f^{-1}$ , se concluye que  $f$  transforma rectas en rectas, y por el segundo teorema fundamental (3.1.3 Cap X) que  $f$  es semihomografía.

Sean  $(a_0, a_1, a_2)$  tres puntos distintos situados sobre una recta proyectiva  $\Delta$  de  $E$ . Como  $K$  tiene más de tres elementos, es posible elegir

$a_3 \in \Delta - \{a_0, a_1, a_2\}$ , tal que  $\lambda = [a_0, a_1; a_2, a_3] \neq -1$ , y así

$\lambda \notin \{0, 1, 2, 3\}$  (pues los  $a_i$  son distintos).

Si en el sistema  $f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a'_0, a'_1, a'_2, a'_3)$  no hay tres puntos alineados, por 4.1.4 se concluye que fijada  $\tau$  permutación de  $\{0, 1, 2, 3\}$  existe  $g'_\tau \in GP(E')$  con  $g'_\tau(a'_i) = a'_{\tau(i)}$   $i=0, 1, 2, 3$ . Por hipótesis  $g = f^{-1} \circ g'_\tau \circ f \in GP(E)$ , y verifica  $g(a_i) = f^{-1} \circ g'_\tau \circ f(a_i) = f^{-1} \circ g'_\tau(a'_i) = f^{-1}(a'_{\tau(i)}) = a_{\tau(i)}$  para  $i=0, 1, 2, 3$ . Como  $g$  conserva la razón doble (3.2.7 Cap IX), se deduce tomando la permutación  $\tau$  conveniente que

$$\lambda = [a_0, a_1; a_2, a_3] = [a_1, a_0; a_2, a_3] = \frac{1}{\lambda}$$

y en particular  $\lambda^2 = 1$ . Esto contradice que  $\lambda \notin \{1, -1\}$ .

Así pues en el sistema  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  hay al menos tres puntos alineados. Si por ejemplo  $a_0'$  no está situado sobre la recta  $\Delta_1$  que contiene a  $(a_1', a_2', a_3')$ , por el corolario 4.1.3 se concluye utilizando un argumento similar al anterior que:

$$\lambda = [a_0, a_1; a_2, a_3] = [a_0, a_1; a_3, a_2] = \frac{1}{\lambda}$$

y esto conduce a la misma contradicción anterior.

#### 4.2.5 Observación

Nótese que en un espacio proyectivo sobre el cuerpo  $Z_3$ , la razón doble  $\lambda$  de los cuatro puntos distintos de una recta proyectiva  $\Delta$  es (por exclusión, ya que  $\lambda \neq 0, 1, \infty$ ) igual a  $-1$  cualquiera que sea el orden en que se toman. Por otra parte, en  $Z_3$  para  $\lambda = -1$  se verifican las igualdades  $\lambda = \frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = \frac{1}{1 - \lambda}$  por lo que el argumento de 4.1.4 no puede incluir el caso  $K=Z_3$  (ni por supuesto  $K=Z_2$ )

#### 4.3 Estructura proyectiva. Estructuras que inducen la misma Geometría.

4.3.1 Sea  $E$  un conjunto de puntos sobre el cual se han definido dos espacios proyectivos  $(E, E_1, \pi_1)$ ,  $(E, E_2, \pi_2)$  que denotamos abreviadamente por  $(E, \pi_1)$  y  $(E, \pi_2)$ . Sean  $K_1$  y  $K_2$  los correspondientes cuerpos base. Si  $a, b, c, d$  son cuatro puntos alineados en  $(E, \pi_i)$ , denotamos por  $[a, b; c, d]_i$  su razón doble ( $i=1, 2$ ).  $GP(E, \pi_i)$  denotan los correspondientes grupos proyectivos.

#### 4.3.2 Definición

En las condiciones 4.3.1 se dice que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definen la misma estructura proyectiva sobre  $E$  si  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definen la misma razón doble, es decir:

- i)  $(E, \pi_1)$  y  $(E, \pi_2)$  tienen las mismas rectas proyectivas
- ii) Si  $a, b, c, d$  son cuatro puntos alineados entonces

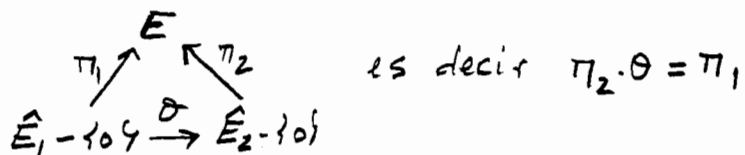
$$[a, b; c, d]_1 = [a, b; c, d]_2 \text{ (en particular } K_1 = K_2)$$

Como consecuencia la caracterización de homografías por medio de la razón doble (3.1.4 Cap X), y la propia definición de homografía, se tiene el siguiente resultado:

#### 4.3.3 Teorema

En las hipótesis de 4.3.1, son equivalentes las afirmaciones:

- i)  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definen la misma estructura proyectiva sobre  $E$
- ii) La aplicación identidad  $id: (E, \pi_1) \rightarrow (E, \pi_2)$  es homografía
- iii) Existe  $\theta: \hat{E}_1 \rightarrow \hat{E}_2$  isomorfismo lineal que hace conmutativo el diagrama:



#### 4.3.4 Corolario

Sean  $X_1=(X, X_1, \Delta_1)$ ,  $X_2=(X, X_2, \Delta_2)$  dos espacios afines sobre el mismo conjunto  $X$ , que inducen la misma estructura afín sobre  $X$  ( véase 1.2.6 Cap IV). Entonces las estructuras proyectivas sobre  $\tilde{X}=X \cup \infty_X$  inducidas por  $\tilde{X}_1$  y  $\tilde{X}_2$  coinciden.

Demostración:

Utilizando 4.3.5 b) Cap IV se deduce que  $\text{id}: X_1 \rightarrow X_2$  es aplicación afín, y su extensión proyectiva  $\tilde{\text{id}}: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  es por tanto homografía.

#### 4.3.5 Definición

En las condiciones de 4.3.1 se dice que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  inducen la misma geometría si  $\text{GP}(E, \pi_1) = \text{GP}(E, \pi_2)$

#### 4.3.6 Observación

Nótese que si  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definen la misma estructura proyectiva en  $E$  por ser la razón doble invariante característica ( 3.1.4 Cap X), se deduce que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definen la misma geometría proyectiva. Sin embargo como veremos, no se verifica al recíproco:

#### 4.3.7 Teorema ( Se supone que el cuerpo $K_1$ tiene más de tres elementos)

En las condiciones 4.3.1, las afirmaciones que siguen son equivalentes:

- i)  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definen la misma geometría proyectiva
- ii) La aplicación identidad,  $\text{id}: (E, \pi_1) \rightarrow (E, \pi_2)$  es semihomografía
- iii) Las rectas proyectivas de  $(E, \pi_1)$  y  $(E, \pi_2)$  coinciden

Demostración:

- i)  $\Leftrightarrow$  ii) Nótese que la afirmación i) equivale a decir que la aplicación  $\text{id}: (E, \pi_1) \rightarrow (E, \pi_2)$  es compatible con las geometrías. Basta aplicar entonces 4.2.3 y 4.2.4 para probar la equivalencia
- ii)  $\Leftrightarrow$  iii) es consecuencia inmediata del segundo Teorema Fundamental de la geometría proyectiva.

#### 4.3.8 Observación

En el caso de que  $(E, \pi_1)$  y  $(E, \pi_2)$  estén definidos sobre el mismo cuerpo  $K$  que no admita automorfismos distintos de la identidad, (por ejemplo  $K=\mathbb{R}$ ) los conceptos de Geometría y estructura se determinan entre si biunívocamente.

## CLASIFICACION DE CORRESPONDENCIAS EN UN ESPACIO PROYECTIVO

Dos correspondencias proyectivas en un espacio proyectivo  $E$  se consideran equivalentes, si su "expresión analítica" puede ser formalmente la misma, respecto a sistemas de coordenadas homogéneas adecuadamente elegidos. Esto significa que ambas correspondencias se ven actuar de la misma forma respecto a puntos de vista proyectivos adecuados. Así por ejemplo, se puede intuir fácilmente que dos homologías de la misma razón  $\lambda$  son proyectivamente equivalentes, ya que la actuación de este tipo de transformaciones puede describirse geoméricamente sin utilizar sistemas de coordenadas. (véase 2.2.5 Cap X)

El problema de clasificación proyectiva de correspondencias se resuelve a partir del Teorema de Jordan (4. Cap III), y es el objetivo final de este capítulo.

$E$  es un espacio proyectivo de dimensión  $n \geq 1$  sobre el cuerpo  $K$ .

### 1. EQUIVALENCIA PROYECTIVA DE CORRESPONDENCIAS. INVARIANTES

#### 1.1 Introducción

1.1.1 Denotamos como es habitual por  $CP(E)$  al espacio proyectivo de las correspondencias proyectivas de  $E$ . Recordemos que la estructura proyectiva de  $CP(E)$  viene definida por la aplicación

$$\pi: EL(\hat{E}) - \{0\} \ni \hat{f} \mapsto [\hat{f}] \in CP(E) \quad (\text{véase 3.1.6 Cap III})$$

En particular si  $E = P_n(K) = P_n$ ,  $CP(E)$  se identifica con  $CP(n) = P(EL(n+1)) = \{[\hat{A}] / \hat{A} \in EL(n+1)\}$  con su estructura proyectiva canónica.

#### 1.1.2 Proposición

Sea  $\hat{\epsilon}$  un sistema de referencia proyectivo, y  $\hat{\epsilon}$  la base de  $\hat{E}$  inducida por  $\hat{\epsilon}$ .

La aplicación  $M_{\hat{\epsilon}}: CP(E) \ni [\hat{f}] \mapsto [M_{\hat{\epsilon}}(\hat{f})] \in CP(n)$  depende solo de  $\hat{\epsilon}$ , y es una homografía con  $M_{\hat{\epsilon}} = [M_{\hat{\epsilon}}]$ .

Demostración

Basta comprobar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} CP(E) & \xrightarrow{M_{\hat{\epsilon}}} & CP(n) \\ \uparrow & & \downarrow \\ EL(\hat{E}) - \{0\} & \xrightarrow{M_{\hat{\epsilon}}} & EL(n+1) - 0 \end{array}$$

es conmutativo, y que para todo  $\lambda \in K - \{0\}$  se verifica  $M_{\hat{\epsilon}} = M_{\lambda \hat{\epsilon}}$

#### 1.1.3 Observación

Nótese que en las condiciones 1.1.2 si  $f \in CP(E)$  y  $M_{\hat{\epsilon}}(f) = [\hat{A}]$ , entonces

$$\left[ \hat{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{son las ecuaciones de } f \text{ en el sistema de coordenadas inducido por } \hat{\epsilon}.$$



Parece pues natural la siguiente definición:

#### 1.1.4 Definición

Dos correspondencias proyectivas  $f, f' \in CP(E)$  se dicen (proyectivamente) equivalentes (y escribimos  $f$  p.e  $f'$ ) si existen  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  sistemas de referencia proyectivos tales que  $M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$

#### 1.1.5 Teorema

Sean  $f = [\hat{f}]$ ,  $f' = [\hat{f}']$  correspondencias proyectivas de  $E$ , y  $\varepsilon$  sistema de referencia proyectivo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) Existe  $\varepsilon'$  sistema de referencia proyectiva con  $M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$
- ii)  $f$  p.e  $f'$
- iii) Existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{f}$  es l.e (linealmente equivalente) a  $\lambda \hat{f}'$ .
- iv) Existe  $g \in GP(E)$  tal que  $f' = g^{-1} f g$

Demostración

i)  $\Rightarrow$  ii) es trivial

ii)  $\Rightarrow$  iii) : Sean  $\delta$  y  $\delta'$  sistemas de referencia proyectivos con  $M_{\delta}(f) = M_{\delta'}(f')$ , y  $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$  las bases vectoriales correspondientes. Por 1.1.2 se tiene  $[M_{\hat{\delta}}(\hat{f})] = [M_{\hat{\delta}'}(\hat{f}')] = \lambda$  y existe  $\lambda \in K - 0$  tal que  $M_{\hat{\delta}}(\hat{f}) = \lambda M_{\hat{\delta}'}(\hat{f}') = M_{\hat{\delta}'}(\lambda \hat{f}')$ . Por tanto  $\hat{f}$  es l.e a  $\lambda \hat{f}'$ .

iii)  $\Rightarrow$  iv) : Como  $\hat{f}$  es l.e a  $\lambda \hat{f}'$  existe  $\hat{g} \in GL(\hat{E})$  tal que  $\hat{f} = \hat{g}^{-1} \lambda \hat{f}' \hat{g}$ .

Tomando  $g = [\hat{g}] \in GP(E)$  se tiene:

$$f' = [\hat{f}'] = [\lambda (\hat{g}^{-1} \hat{f} \hat{g})] = [\hat{g}^{-1} \hat{f} \hat{g}] = [\hat{g}^{-1}] [\hat{f}] [\hat{g}] = g^{-1} f g$$

iv)  $\Rightarrow$  i) :

Sea  $\hat{\varepsilon}$  base vectorial inducida por  $\varepsilon$ , y  $\hat{A} = M_{\hat{\varepsilon}}(\hat{f})$ . Por hipótesis existe  $g = [\hat{g}] \in GP(E)$  con  $f' = g^{-1} f g$ , y por tanto, existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{f}' = \lambda \hat{g}^{-1} \hat{f} \hat{g}$ . Tomemos  $\varepsilon' = g^{-1}(\varepsilon)$  (es decir  $\hat{\varepsilon}' = \hat{g}^{-1}(\hat{\varepsilon})$ ) Se tiene:  $\hat{f}'(\hat{\varepsilon}') = \hat{f}' \hat{g}^{-1}(\hat{\varepsilon}) = \lambda \hat{g}^{-1} \hat{f}(\hat{\varepsilon}) = \lambda \hat{g}^{-1}(\hat{\varepsilon} \hat{A}) = \lambda \hat{g}^{-1}(\hat{\varepsilon}) \hat{A} = \hat{\varepsilon}'(\lambda \hat{A})$ , y así  $M_{\hat{\varepsilon}'}(\hat{f}') = \lambda \hat{A}$ , por tanto  $M_{\varepsilon'}(f') = [\hat{A}] = M_{\varepsilon}(f)$ .

#### 1.1.6 Observación

Dos elementos  $[\hat{A}]$  y  $[\hat{A}'] \in CP(n)$  son proyectivamente equivalentes cuando existe  $\lambda \in K - \{0\}$  y  $\hat{P}$  matriz no singular tal que  $\hat{A}' = \lambda \hat{P}^{-1} \hat{A} \hat{P}$ .

#### 1.1.7 Corolario

Sean  $f, f' \in CP(E)$  y sean  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  sistemas de referencia proyectivos. Son equivalentes las afirmaciones

- i)  $f$  es p.e a  $f'$
- ii)  $M_{\varepsilon}(f)$  es p.e a  $M_{\varepsilon'}(f')$ .

Demostración:

i)  $\Rightarrow$  ii) sea  $\delta$  sistema de referencia proyectivo con  $M_{\varepsilon}(f) = M_{\delta}(f')$ .

( $\delta$  existe por la equivalencia i)  $\Leftrightarrow$  ii) de 1.1.5)

Así pues  $M_{\mathbb{E}}(f) = M_{\mathbb{E}}(f')$  y  $M_{\mathbb{E}}(f)$  son dos representaciones de  $f$  en  $CP(n)$ , y por tanto son proyectivamente equivalentes.

ii)  $\Rightarrow$  i) Recíprocamente, si  $M_{\mathbb{E}}(f) = [\hat{A}]$  es p.e a  $M_{\mathbb{E}}(f') = [\hat{A}']$  se ve, utilizando 1.1.6 que  $\hat{A}'$  es l.e a  $\lambda \hat{A}$  para cierto  $\lambda \in K - \{0\}$ , y teniendo ahora en cuenta 1.1.4 Cap III se concluye que  $f'$  y  $\lambda f$  son linealmente equivalentes.

### 1.1.8 Corolario

La relación de equivalencia proyectiva en  $CP(E)$  es relación de equivalencia.

Demostración:

Es consecuencia de la equivalencia ii)  $\Leftrightarrow$  iv) de 1.1.5

### 1.1.9 Ejemplo

Dos homologías  $f$  y  $f'$  en el espacio proyectivo  $E$  son proyectivamente equivalentes si y solo si tienen la misma razón.

En efecto: si  $f$  es homología de hiperplano central  $H$  razón  $\lambda \neq 0$ , y centro  $c$ ,  $c \notin H$ , tomando en el espacio afín  $X = E - H$  coordenadas cartesianas  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  con origen en  $c$ , la transformación afín  $f_H = f/X: X \rightarrow X$  es una homotecia de centro  $c$  que tiene por ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

y su extensión proyectiva  $\tilde{f}_H = f$ :

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  son las coordenadas homogéneas en  $E$  asociadas al sistema de coordenadas cartesianas de partida ( es decir  $x_i = \frac{x_i}{x_0}$  )

De ésta forma cualquier homología de razón  $\lambda \neq 0, 1$  puede expresarse analíticamente por las ecuaciones (1) respecto a ciertos sistemas de coordenadas homogéneas, y todas son proyectivamente equivalentes.

Si  $\lambda = 1$ , se prueba de forma análoga que puede obtenerse para  $f$  una expresión analítica de la forma:

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad (2)$$

respecto a cierto sistema de coordenadas homogéneas.

Recíprocamente, las ecuaciones (1) y (2) representan homologías de razones  $\lambda$  y 1 respectivamente. Así si  $f$  es homología de razón  $\lambda \neq 0$ , y  $f'$  es p.e a  $f$  entonces  $f'$  admite una representación analítica del tipo

(1) ó (2), y así  $f'$  es homología de razón  $\lambda$ . (Utilícese 1.1.7).

## 1.2 Invariantes proyectivos. Planteamiento del problema de clasificación

### 1.2.1 Definición

Un invariante proyectivo en  $CP(E)$  es una aplicación  $\Phi$  de  $CP(E)$  en un conjunto  $A$  de forma que  $\Phi(f) = \Phi(f')$  si  $f$  y  $f'$  son p.e

### 1.2.2 Ejemplo

La aplicación  $\lambda: CP(E) \rightarrow K$  tal que  $\lambda(f) = 0$  si  $f$  no es homología, y  $\lambda(f)$  es la razón de homología en caso contrario, es en virtud del ejemplo 1.1.9 un invariante proyectivo, que es suficiente para la clasificación de homologías de  $CP(E)$

### 1.2.3 Definición

Un sistema completo de invariantes (proyectivos) es una colección  $(\Phi_1, \dots, \Phi_s)$  de invariantes tales que  $\Phi_i(f) = \Phi_i(f')$   $i=1, \dots, s$  implica que  $f$  y  $f'$  son proyectivamente equivalentes. El sistema se dice irreducible, si  $(\Phi_1, \dots, \Phi_s) - (\Phi_i)$  ya no es sistema completo de invariantes para  $i=1, \dots, s$ .

### 1.2.4

La solución completa del problema de clasificación proyectiva de correspondencias consiste en determinar un sistema completo de invariantes  $(\Phi_1, \dots, \Phi_s)$  y una colección  $\hat{J}$  de matrices  $\hat{J}$  de Jordan de forma que: Dado  $f \in CP(E)$  pueda determinarse a partir de  $\Phi_1(f), \dots, \Phi_s(f)$  una matriz  $\hat{J}$  de Jordan tal que  $M_\varepsilon(f) = [\hat{J}]$  para cierto sistema de referencia proyectivo  $\varepsilon$  de  $E$ .

Por otra parte, en virtud de 1.1.7, si dos correspondencias proyectivas admiten representaciones de Jordan  $[\hat{J}]$  y  $[\hat{J}']$  entonces son proyectivamente equivalentes, si y solo si lo son  $[\hat{J}]$  y  $[\hat{J}']$ . Así pues interesará dar criterios prácticos para reconocer cuando  $[\hat{J}]$  y  $[\hat{J}']$  son p.e

Para establecer el teorema general de clasificación de correspondencias proyectivas, son aun necesarios algunos prerequisites:

## 1.3 Semejanza de polinomios

### 1.3.1 Preliminar

$K[t]$  denota como es habitual el anillo de polinomios sobre el cuerpo  $K$  en la variable  $t$ .

Si  $\varphi \in K[t] - \{0\}$  y  $\lambda \in K - \{0\}$  se denota por  $\lambda\varphi$  al polinomio

$\lambda\varphi(t) = \lambda^m \varphi(t/\lambda)$  siendo  $m$  el grado del polinomio.

Si por ejemplo  $\varphi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$ , entonces se tiene

$$\lambda\varphi(t) = t^m + \lambda a_{m-1} t^{m-1} + \dots + \lambda^{m-1} a_1 t + \lambda^m a_0$$

En particular, si  $\varphi = a_0$  es  $\lambda\varphi = a_0$ , si  $\varphi(t) = t + a_0$  es  $\lambda\varphi(t) = t + \lambda a_0$ .  
 No es difícil establecer las siguientes propiedades:

### 1.3.2 Teorema

Sea  $\varphi \in K[t] - \{0\}$ ,  $\lambda \in K - \{0\}$ . Se verifica entonces:

- i)  $\lambda\mu\varphi = \lambda(\mu\varphi)$  para  $\mu \in K - 0$ .  $1\varphi = \varphi$ .
- ii) Si  $\varphi$  es mónico de grado  $m$ , entonces  $\lambda\varphi$  es mónico de grado  $m$ .
- iii) Si  $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_r$  entonces  $\lambda\varphi = \lambda\varphi_1 \dots \lambda\varphi_r$ . En particular si  $p$  es polinomio primo, también lo es  $\lambda p$ .
- iv) Si  $\varphi = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$  es una descomposición de  $\varphi$  en factores primos, entonces  $\lambda\varphi = \lambda p_1^{m_1} \dots \lambda p_r^{m_r}$  es una descomposición de  $\lambda\varphi$  en factores primos.

Demostración:

Los apartados i) y ii) son evidentes. Probaremos iii): para  $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$  si  $m$ ,  $m_1$  y  $m_2$  son los grados respectivos de  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se tiene  $m = m_1 + m_2$  y  $\lambda\varphi_1(t) \lambda\varphi_2(t) = \lambda^{m_1} \varphi_1(t/\lambda) \lambda^{m_2} \varphi_2(t/\lambda) = \lambda^m \varphi(t/\lambda) = \lambda\varphi(t)$ .  
 La afirmación iv) se deduce ya trivialmente de iii).

### 1.3.3 Definición

Dos polinomios  $\varphi, \psi \in K[t]$  se dicen semejantes si existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\psi = \lambda\varphi$ . Se denomina a  $\lambda$  razón de semejanza.

### 1.3.4 Proposición

La relación de semejanza definida anteriormente, es relación de equivalencia en  $K[t] - \{0\}$ , se denota por  $\sim$  al conjunto cociente.

Demostración:

Es inmediata a partir de i) de 1.3.2

### 1.3.5 Observación

Si  $\varphi = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$ ,  $\psi = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \dots + b_1t + b_0$  son polinomios semejantes de razón  $\lambda \in K - \{0\}$ , entonces:

$$\lambda\varphi(t) = t^m + \lambda a_{m-1}t^{m-1} + \dots + \lambda^{m-1}a_1t + \lambda^m a_0 = \psi(t), \text{ y esto equivale a}$$

$$\lambda^j a_{m-j} = b_{m-j} \text{ para todo } j=1, \dots, m.$$

En particular los polinomios  $t - \lambda_1$ ,  $t - \lambda_2$  ( $\lambda_i \neq 0$ ) son semejantes con razón  $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$ .

### 1.3.6 Definición

Si  $S$  es un subconjunto de  $K[t] - \{0\}$ , y  $\lambda \in K - \{0\}$ , escribimos  $\lambda S = \{ \lambda\varphi / \varphi \in S \}$ . Dos familias  $S$  y  $S'$  de polinomios se dicen semejantes si existe  $\lambda \in K - 0$  tal que  $S' = \lambda S$ .

La relación anterior, es obviamente de equivalencia sobre las partes de  $K[t] - 0$ . Si  $S \subset K[t] - \{0\}$ , denotamos por  $\sim S$  su correspondiente clase de equivalencia.

## 2. TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE CORRESPONDENCIAS PROYECTIVAS

En este apartado se desarrollará el programa esbozado en 1.2.4

### 2.1 Sistema completo de invariantes

Se denotará como es habitual  $\chi_{\hat{f}}$  y  $\theta_{\hat{f}}$  al polinomio característico y mínimo respectivamente del endomorfismo lineal  $\hat{f}$  de  $\hat{E}$  (véase 2.3 y 3.2 cap III).

El siguiente resultado es crucial, y muestra la utilidad del concepto de semejanza de polinomios para conectar el problema que nos ocupa con el de clasificación lineal de endomorfismos resuelto en el Capítulo III.

#### 2.1.1 Teorema

Sea  $\hat{f}$  endomorfismo lineal de  $\hat{E}$  y  $\lambda \in K - \{0\}$ . Se tiene entonces:

$$i) \chi_{\lambda \hat{f}} = \lambda \chi_{\hat{f}} \quad ; \quad ii) \theta_{\lambda \hat{f}} = \lambda \theta_{\hat{f}} .$$

Demostración:

i) Si  $\hat{E}$  es base de  $\hat{E}$  y  $M_{\hat{E}}(\hat{f})=A$  se tiene:

$$\chi_{\lambda \hat{f}}(t) = \det(tI - \lambda A) = \det\left(\lambda \left(\frac{t}{\lambda} I - A\right)\right) = \lambda^{n+1} \det\left(\frac{t}{\lambda} I - A\right) = \lambda \chi_{\hat{f}}(t).$$

ii) Si  $\varphi \in K[t]$  y el grado de  $\varphi$  es  $m$  se verifican las equivalencias:

$$\varphi(\hat{f})=0 \Leftrightarrow \lambda^m \varphi\left(\frac{\lambda \hat{f}}{\lambda}\right)=0 \Leftrightarrow \lambda \varphi(\lambda \hat{f})=0 . \text{ En consecuencia, todo polinomio } \psi \in K[t] - \{0\} \text{ tal que } \psi(\lambda \hat{f})=0 \text{ verifica } \frac{1}{\lambda} \psi(\hat{f})=0, \text{ y } \frac{1}{\lambda} \psi = \sum \theta_{\hat{f}} \text{ para cierto } \xi \in K[t], \text{ y } \psi = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \psi\right) = \lambda \sum \theta_{\hat{f}} . \text{ En consecuencia } \lambda \theta_{\lambda \hat{f}} = \theta_{\lambda \hat{f}} .$$

#### 2.1.2 Corolario

Las aplicaciones  $\chi: CP(E) \ni f=[\hat{f}] \mapsto \chi_f = \chi_{\hat{f}} \in K[t]$ , y

$\theta: CP(E) \ni f=[\hat{f}] \mapsto \theta_f = \theta_{\hat{f}} \in K[t]$  son invariantes proyectivos de  $CP(E)$ .

Demostración:

Si  $f=[\hat{f}]$ ,  $f'=[\hat{f}']$  son correspondencias proyectivas de  $E$  tales que  $f$  es p.e a  $f'$ , entonces existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{f}$  es l.e  $\lambda \hat{f}'$  y por tanto  $\chi_f = \chi_{\lambda \hat{f}'} = \lambda \chi_{\hat{f}'}$  (respectivamente,  $\theta_f = \theta_{\lambda \hat{f}'} = \lambda \theta_{\hat{f}'}$ ), por tanto

$$\chi_f = \lambda \chi_{\hat{f}'} \quad ( \text{ y } \theta_f = \lambda \theta_{\hat{f}'} ) \text{ como queríamos demostrar.}$$

Para establecer el teorema de clasificación se necesita aun del siguiente lema técnico:

#### 2.1.3 Lema

Sea  $p \in K[t]$  de grado  $m$ ,  $f$  endomorfismo lineal de  $\hat{E}$  y  $\lambda \in K - \{0\}$ , entonces  $\text{rg}(p(\hat{f})) = \text{rg}(\lambda p(\lambda \hat{f}))$

Demostración

$$\text{rg}(\lambda p(\lambda \hat{f})) = \text{rg}(\lambda^m p(\hat{f})) = \text{rg}(p(\hat{f})).$$

2.1.4 Teorema

Sea  $f = [\hat{f}] \in CP(E)$  con  $\hat{f} = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$  (grado de  $p_i$  igual a  $\nu_i$ ) la descomposición en factores primos del polinomio mínimo de  $\hat{f}$ . Entonces:

- i)  $\{p_1, \dots, p_r\}$  depende solo de la correspondencia  $f$
- ii) Para cada  $p_j$  y cada  $i=0, \dots, \nu_j$ ,  $\rho_i(p_j) = \frac{\text{rg}(p_j(\hat{f})^i)}{\nu_j}$  definen invariantes proyectivos en  $CP(E)$ .
- iii) El sistema de invariantes descritos en ii) constituye un sistema completo de invariantes.

La correspondencia proyectiva  $f$  admite una representación analítica de la forma:  $[\hat{J} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} x_0' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$  respecto a cierto sistema de coordenadas homogéneas  $[x_i]$ , siendo  $\hat{J}$  una matriz de Jordan asociada al endomorfismo lineal  $\hat{f}$  de  $\hat{E}$  (vease 4.4.3 Cap III)

Demostración

i) Es una fácil consecuencia de 2.1.1 ii), 1.3.2 iii) y la definición 1.3.6.

ii) Se deduce del lema 2.1.3 y de que  $\frac{\text{rg}(p_j(\hat{f})^i)}{\nu_j}$  son invariantes lineales (véase 4.2.2 Cap III)

iii) Es consecuencia de que los invariantes  $\frac{\text{rg}(p_j(\hat{f})^i)}{\nu_j}$  constituyen un sistema completo de invariantes para la clasificación lineal de endomorfismos (4.2.2 Cap III).

Establezcamos por último un criterio práctico para reconocer cuando dos elementos de la forma  $[\hat{J}]$  y  $[\hat{J}']$  (donde  $\hat{J}$  y  $\hat{J}'$  son matrices de Jordan) son proyectivamente equivalentes:

2.1.5 Notación

Recordemos que una matriz  $\hat{J}$  de Jordan (correspondiente al endomorfismo  $\hat{f}$  de 3.1.4) es de la forma  $\hat{J} = \text{diag}(\hat{J}(p_1), \dots, \hat{J}(p_r))$ , donde para cada  $p_i = p$  ( $m = m_i$ ,  $\nu = \nu_i$ ) es  $\hat{J}(p) = \text{diag}(C(p, k_1), \dots, C(p, k_s))$  siendo

$$m = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s > 0, \text{ y } C(p, k) = \begin{pmatrix} A(p) & & \\ & \ddots & \\ N_\nu & & A(p) \end{pmatrix}$$

con  $A(p)$  y  $N_\nu$  como en 4.3.4 Cap III.

Denotando para cada  $\lambda \in K - \{0\}$ ,  $A(p) = A_\lambda(p)$ , convendremos en escribir  ${}_\lambda \hat{J}(p) = \text{diag}(C(\lambda p, k_1), \dots, C(\lambda p, k_s))$ , y  ${}_\lambda \hat{J} = \text{diag}({}_\lambda \hat{J}(p_1), \dots, {}_\lambda \hat{J}(p_r))$

En estas condiciones se tiene el siguiente criterio:

2.1.6 Proposición

Sea  $\hat{f}$  un endomorfismo lineal de  $\hat{E}$ , y  $\hat{J}$  una representación matricial reducida de Jordan para  $\hat{f}$ ,  $\lambda \in K - \{0\}$ . Entonces  ${}_\lambda \hat{J}$  es una representa-

son linealmente equivalentes.

Demostración:

Sea  $\phi_f = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$  ( $v_j = \text{grado de } p_j$ ) la descomposición en factores primos del polinomio mínimo de  $f$ . Utilizando 2.1.1 ii) y 1.3.2 iv) se ve que  $\phi_{\lambda \hat{f}} = \lambda \phi_{\hat{f}} = \lambda p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ , y para cada  $j=1, \dots, r$ ,  $i=1, \dots, v_j$  es

$$\frac{\text{rg}(p_j(\hat{f})^i)}{v_j} = \frac{\text{rg}(\lambda p_j(\lambda \hat{f})^i)}{v_j} \quad (\text{véase 2.1.3})$$

Así si  $\hat{J} = \text{diag}(\hat{J}(p_1), \dots, \hat{J}(p_r))$  es la representación matricial de Jordan de  $\hat{f}$  deducida (por 4.4.2 Cap III) de los invariantes de rango, se concluye que  $\lambda \hat{J} = \text{diag}(\hat{J}(\lambda p_1), \dots, \hat{J}(\lambda p_r))$  es la correspondiente a  $\lambda \hat{f}$ . La última afirmación es consecuencia de que  $\lambda \hat{J}$  y  $\lambda \hat{J}$  son dos representaciones matriciales de  $\lambda \hat{f}$ , y por tanto son linealmente equivalentes.

### 2.1.7 Corolario

Dadas dos matrices de Jordan  $J$  y  $J'$ , entonces  $[\hat{J}]$  es proyectivamente equivalente a  $[\hat{J}']$  si y solo si existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{J}'$  y  $\lambda \hat{J}$  son linealmente equivalentes. En particular  $\hat{J}'$  se obtiene a partir de  $\lambda \hat{J}$  por permutación de cajas.

Demostración

Es suficiente observar que  $[\hat{J}']$  es p.e. a  $[\hat{J}]$  si y solo si existe  $\lambda$  no nulo con  $\lambda \hat{J}$  l.e. a  $\hat{J}'$ . Aplíquese ahora la última afirmación de la proposición anterior.

La última afirmación del corolario es consecuencia del criterio de equivalencia lineal de matrices de Jordan dado en 4.3.6 Cap III.

### 2.1.8 Ejemplo

Si  $\hat{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $\hat{J}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  entonces  $\hat{J}$  y  $\hat{J}'$  son p.e.

de hecho se tiene que  $\hat{J}'$  es l.e. a la matriz  $\hat{J}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

y  $1/2 \hat{J} = \hat{J}'_1$  ya que  $\phi_{\hat{J}}(t) = (t-2)(t-1)$  y  $1/2 \phi_{\hat{J}} = (t-1)(t-1/2) = \phi_{\hat{J}'_1}$

### 2.1.9 Observación

En general, cuando los factores irreducibles del polinomio mínimo son lineales (por ejemplo si  $K$  es algebraicamente cerrado), el criterio práctico para reconocer cuando dos matrices de Jordan son proyectivamente equivalentes, es que salvo permutación de cajas se pueda obtener una de la otra multiplicando por un escalar no nulo los términos de la diagonal principal.

## 2.2 Subespacios invariantes de una transformación proyectiva

### 2.2.1 Definición

Sea  $f$  una transformación proyectiva de  $E$ . Un subespacio  $A$  de  $E$  se dice  $f$ -invariante (ó invariante si se sobreentiende  $f$ ) si  $f(A) \subset A$ .

Nótese que la condición anterior equivale a decir que  $f(A)=A$ , pues  $\dim f(A)=\dim A$ .

Se tiene la siguiente caracterización:

### 2.2.2 Proposición

Sea  $f=[\hat{f}] \in GP(E)$ , y  $A=P(\hat{A})$  subespacio proyectivo de  $E$ . Son equivalentes:

- i)  $A$  es  $f$ -invariante
- ii)  $\hat{A}$  es  $\hat{f}$ -invariante

Demostración

i)  $\Rightarrow$  ii) Supongase  $A$   $f$ -invariante, si  $\hat{a} \in \hat{A} - \{0\}$  entonces  $[\hat{a}] \in A$  y  $f([\hat{a}]) = [\hat{f}(\hat{a})] \in A$ , luego  $\hat{f}(\hat{a}) \in \hat{A}$ .

El recíproco se prueba de forma análoga.

### 2.2.3 Corolario

Sea  $f=[\hat{f}] \in GP(E)$ . Los puntos fijos de  $f$  son exactamente los puntos  $a=[\hat{a}]$  de  $E$  definidos por autovectores  $\hat{a}$  de  $\hat{f}$ .

### 2.2.4 Observación

a) La intersección de dos subespacios invariantes es siempre invariante, sin embargo no puede decirse lo mismo de la suma, como veremos mas adelante en algun ejemplo.

b) Para cuerpos algebraicamente cerrados, toda transformación lineal admite un autovector, es decir, toda transformación proyectiva admite algun punto fijo.

### 2.2.5 Calculo de hiperplanos invariantes

Los hiperplanos invariantes de una transformación proyectiva  $f=[\hat{f}]$  de  $E$  son los puntos invariantes de la transformación dual

$f^*: E^* \ni H \mapsto f(H) \in E^*$  ( vease 1.3 Cap X). En la practica el calculo se realiza de la siguiente forma:

Si  $\mathcal{E}=[\hat{\mathcal{E}}]$  es un sistema de referencia proyectivo con coordenadas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  las ecuaciones de  $f$  se escriben de la forma:  $\begin{bmatrix} \hat{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$  (1)

siendo  $\hat{A}=M_{\hat{\mathcal{E}}}(\hat{f})$ . Si  $u_0 x_0 + \dots + u_n x_n = 0$  es un hiperplano  $H$  de  $E$ , la ecuación de su transformado  $H'$  es de la forma  $u'_0 x'_0 + \dots + u'_n x'_n = 0$ , y se obtiene sustituyendo en la anterior ecuación cada  $x_i$  por su valor a partir de (1) en función de  $x'_j$ , es decir, tomando  $u=(u_0, \dots, u_n)$  y  $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$



se tiene:  $H: (u \cdot x = 0)$  y  $H': (u \cdot A^{-1}x' = 0)$  por tanto  $u' := u A^{-1}$  ó bien  $(A^{-1})^t \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_0 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$ . La invarianza de H se expresa  $(A^{-1})^t \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

ó de forma equivalente  $\hat{A}^t \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_0 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$  para cierto  $\lambda \in K - \{0\}$ .

Es decir los hiperplanos invariantes H se obtienen a partir de los autovectores de  $\hat{A}^t$ .

### 2.3 Clasificación de las homografías de una recta proyectiva

$\Delta = P(\hat{\Delta})$  es una recta proyectiva sobre el cuerpo K.

#### 2.3.1 Definición

Una transformación proyectiva  $f \in GP(\Delta)$ ,  $f \neq id$  se denomina:

- a) Hiperbólica, si tiene unicamente dos puntos fijos
- b) Eliptica, si no tiene puntos fijos
- c) Parabólica, si tiene unicamente un punto fijo.

#### 2.3.2 Observaciones

- a) Los conceptos de transformación hiperbólica elíptica y parabólica son invariantes proyectivos, es decir, si  $f$  es de alguno de estos tipos y  $f'$  es p.e. a  $f$  entonces  $f'$  es del mismo tipo que  $f$ . Esto es consecuencia de que si  $F$  es el conjunto de puntos fijos para  $f$ , y  $f' = g \circ f \circ g^{-1}$ ,  $g \in GP(\Delta)$ , entonces  $F' = g(F)$  es el conjunto de puntos fijos para  $f'$ .
- b) Si el cuerpo K es algebraicamente cerrado (por ejemplo  $K = \mathbb{C}$ ) entonces no existen transformaciones elípticas. Esto es consecuencia de 2.2.4
- c) La clasificación de homografías en la recta proyectiva  $\Delta$  descrita en 2.3.1 es exhaustiva si se excluye la aplicación identidad.

En efecto: Si una transformación proyectiva  $f$  de  $\Delta$  tiene mas de dos puntos fijos, por el primer teorema fundamental de la geometría proyectiva, se concluye que  $f$  es la identidad.

La clasificación de transformaciones proyectivas de  $\Delta$ , puede hacerse por tanto de forma exhaustiva estudiando la clasificación de cada uno de los tipos descritos en 2.3.1

#### 2.3.3 Teorema

Sea  $f = [\hat{f}] \in GP(\Delta)$  una transformación hiperbólica con puntos fijos  $\{a, b\}$ . Existe entonces una constante  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que si  $x \in \Delta - \{a, b\}$ , se

verifica la equivalencia:  $f(x)=x' \Leftrightarrow [a,b;x',x] = \lambda$ . Se denomina a  $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$  razón de la transformación hiperbólica.

Por otra parte dos transformaciones hiperbólicas son proyectivamente equivalentes, si y solo si coinciden sus razones respectivas.

**Demostración:**

Sea  $c \in \Delta - \{a,b\}$ . Sea  $(\hat{a}, \hat{b})$  la base de  $\hat{\Delta}$  asociada al sistema de referencia proyectivo  $(a,b;c)$  de  $\Delta$ . Se tiene entonces, por 2.2.3 que

$\hat{a}$  y  $\hat{b}$  son autovectores de  $\hat{f}$  asociados a autovalores no nulos.

Es posible elegir  $\hat{f}$  de forma que  $\hat{f}(\hat{a})=\hat{a}$  y  $\hat{f}(\hat{b})=\lambda\hat{b}$ , y las ecuaciones de  $f$  son:

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (1)$$

Mandando  $b: (x_0=0)$  a infinito, y tomando en la recta afin  $D = \Delta - \{b\}$  la coordenada cartesiana  $x = x_1/x_0$  (vease 2.1.8 Cap X), las ecuaciones de  $f/D$  son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix}$$

y se trata de una homotecia de centro  $a$  y razón  $\lambda$ , así para  $x \in \Delta - \{a,b\}$

es  $\lambda = [a; f(x); x]_D = [a; b; f(x), x]$ .

Intercambiando los papeles de  $a$  y  $b$  se tiene para  $x \in \Delta - \{a,b\}$

$\frac{1}{\lambda} = [b; a; f(x), x]$ , y respecto al sistema de referencia proyectivo  $(b,a;c)$   $f$  admite una expresión analítica de la forma:

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix}$$

La segunda parte es ahora evidente: Si  $f$  y  $f'$  son transformaciones hiperbólicas de razones respectivas  $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$ ,  $\{\lambda', \frac{1}{\lambda'}\}$ , y ambas razones coinciden, podemos suponer por ejemplo  $\lambda = \lambda'$  y concluir por lo anterior que  $f$  y  $f'$  admiten ecuaciones reducidas de la forma (1) respecto a ciertos sistemas de referencia; por 1.1.7 son proyectivamente equivalentes. El recíproco se deduce inmediatamente del criterio de equivalencia proyectiva de matrices de Jordan establecido en 2.1.7, y queda como ejercicio.

#### 2.3.4 Definición

Una transformación hiperbólica de  $\Delta$  se llama armónica si su razón

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1$$

#### 2.3.5 Corolario

Dos transformaciones hiperbólicas armónicas de  $\Delta$  son proyectivamente equivalentes.

Dos transformaciones parabólicas de  $\Delta$  son siempre proyectivamente equivalentes.

Demostración:

Si  $f$  es parabólica, y  $b$  es su único punto fijo, sea  $D$  la recta afin  $\Delta - \{b\}$ . Se ve que  $f/D: D \rightarrow D$  no tiene puntos fijos, y es por tanto una traslación que admite por ecuación  $x' = x + 1$  respecto a cierto sistema de

coordenadas cartesianas  $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ , es decir  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix}$

Tomando las coordenadas homogéneas  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$  correspondientes a  $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$  (es decir  $x = \frac{x_1}{x_0}$ ) las ecuaciones de  $f$  son  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$

El resultado se sigue ahora de 1.1.5

Estudiemos finalmente la clasificación proyectiva de transformaciones elípticas solo en el caso real:

### 2.3.7 Teorema

Si  $f \in GP(\Delta)$  es una transformación elíptica, existe un sistema de coordenadas homogéneas y un  $\alpha \geq 0$  único de forma que las ecuaciones de  $f$  se escriben:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad \text{denominamos a } \alpha \text{ parámetro de } f.$$

En particular, dos transformaciones elípticas son proyectivamente equivalentes, si y solo si tienen el mismo parámetro.

Demostración:

Tomando  $f = [\hat{f}]$ , como  $f$  no tiene puntos fijos,  $\hat{f}$  no tiene autovalores, y el polinomio característico de  $\hat{f}$  es de la forma:

$$\chi_{\hat{f}}(t) = (t-a)^2 + b^2 = t^2 - 2at + (a^2 + b^2) \quad \text{donde } b \text{ es no nulo. Para } \lambda \in K - 0 \text{ es } \lambda \chi_{\hat{f}}(t) = \chi_{\lambda \hat{f}}(t) = t^2 - 2\lambda at + \lambda^2(a^2 + b^2), \text{ y podemos elegir } \lambda \text{ de forma que } \lambda^2(a^2 + b^2) = 1, \text{ y } -2\lambda a = \alpha \geq 0. \text{ Tomando } \hat{f} = \lambda \hat{f}', \text{ por el teorema de clasificación lineal de endomorfismos se concluye que existe una base } \hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_0, \hat{\epsilon}_1) \text{ con coordenadas } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ tal que las ecuaciones de } \hat{f} \text{ son de la forma } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así las ecuaciones de } f \text{ respecto a } \hat{\epsilon} = [\hat{\epsilon}] \text{ son } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

que es lo que queríamos probar.

El resto del teorema es ya trivial.

Una transformación proyectiva  $f$  en un espacio proyectivo  $E$  se llama involución, si  $f^2 = \text{id}$ .

la clasificación proyectiva de transformaciones involutivas en la rec-  
vión descrita en la siguiente proposición

### 2.3.9 Proposición

Sea  $f \in \text{GP}(\Delta)$  involutiva, entonces:

- i) Si  $f$  es hiperbólica, entonces es necesariamente armónica
- ii) Si  $f$  es elíptica, su parámetro  $\alpha$  es nulo.
- iii) No existen transformaciones parabólicas involutivas en  $\Delta$ .

**Demostración**

El resultado es evidente a partir de las representaciones analíticas reducidas dadas en (las demostraciones de ) 2.3.3 2.3.6 y 2.3.7

La condición  $f^2 = \text{id}$  impone:

a) En el caso hiperbólica, existe  $k \in K - \{0\}$  con  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y esto implica que  $\lambda = \pm 1$ .

b) En el caso elíptico,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}^2 = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  para  $k \in K - \{0\} \Rightarrow \alpha = 0$

la afirmación iii) es evidente

Nótese en particular, que las involuciones distintas de la identidad se clasifican proyectivamente en hiperbólicas y elípticas

### 2.4 Clasificación de transformaciones proyectivas en el plano.

Sea  $E = P(E)$  un plano proyectivo sobre el cuerpo  $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ . Particularizando a esta situación el teorema de clasificación 2.1.4 y los criterios de equivalencia proyectiva de matrices de Jordan dados en 2.1.7 se puede concluir que para  $f \in \text{GP}(E) - \{\text{id}\}$ , existe un sistema de referencia proyectivo  $\hat{E} = (e_0, e_1, e_2; e)$  con coordenadas  $[x_i]$  respecto al cual

las ecuaciones de  $f$  son  $\left[ \hat{J} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$  donde  $\hat{J}$  puede tomar los si-

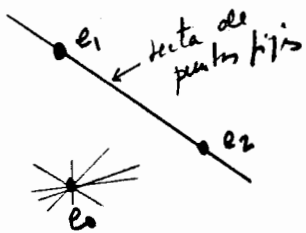
guientes valores:

#### 2.4.1

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

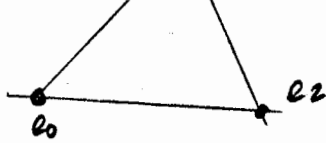
$f$  es homología de base  $\langle e_1, e_2 \rangle$  centro  $e_0$  y razón  $\lambda \neq 0$ .

los puntos fijos (vease figura) son el punto  $e_0$ , y los de la recta base  $\langle e_1, e_2 \rangle$ . Las rectas invariantes son las que pasan por  $e_0$ , y además, la recta base.



2.4.2

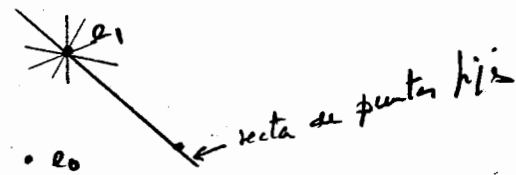
$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$



f es una transformación proyectiva con puntos fijos  $e_0, e_1, e_2$ , y rectas invariantes, las determinadas por dichos puntos

2.4.3

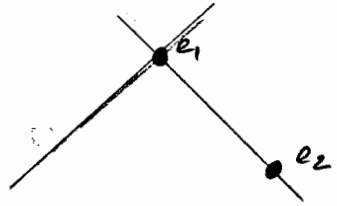
$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



f es homología de base la recta  $B = \langle e_1, e_2 \rangle$  y centro  $e_1$ . Los puntos fijos son los de la recta B, y son rectas invariantes, todas las que pasan por el centro  $e_1$ .

2.4.4

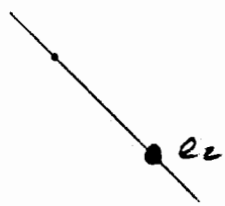
$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 1$$



f tiene unicamente dos puntos fijos  $e_1, e_2$  y dos rectas invariantes  $\langle e_1, e_2 \rangle$ , y  $\langle e_0, e_1 \rangle$ .

2.4.5

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



f tiene un único punto fijo,  $e_2$  y una única recta invariante  $e_1, e_2$  (que contiene al punto fijo)

2.4.6

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$



La transformación f tiene un unico punto fijo  $e_0$  y una única recta invariante,  $\langle e_1, e_2 \rangle$  ( que no contiene al punto fijo)

2.4.7 Observación

Nótese que la configuración geométrica del conjunto de puntos fijos, cuando consta de más de un punto, detremina el tipo proyectivo de la transformación (2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 )  
 Cuando solo hay un punto fijo, es preciso recurrir a su posición relativa respecto a la única recta invariante (2.4.5, 2.4.6 )

En este Capítulo  $\hat{E}$  denota un espacio vectorial de dimensión  $n+1$  sobre un cuerpo  $K$  de característica distinta de dos.  $E=P(\hat{E})$  es el correspondiente espacio proyectivo.

Fijado el sistema de coordenadas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  en  $\hat{E}$ , una expresión del tipo

$\hat{\alpha} = \sum_{i=0}^n a_i x_i$  ( $a_i \in K$ ) representa una forma lineal que - si no es idénticamente nula - da lugar a un hiperplano proyectivo  $H$  de  $E$  de ecuación  $\sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$ . Dicho hiperplano determina la forma lineal  $\hat{\alpha}$  salvo constantes multiplicativas no nulas, y la identificación  $H \leftrightarrow [\hat{\alpha}]$  permite establecer una estructura proyectiva canónica sobre la familia  $E^*$  de hiperplanos de  $E$ .

El objetivo de este capítulo consiste inicialmente en desarrollar un esquema análogo para expresiones de la forma  $\hat{q} = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j$  ( $a_{ij} \in K$ ) denominadas formas cuadráticas. La ecuación  $\sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j = 0$  representará ahora lo que será denominada una cuádrica en el espacio proyectivo  $E$ , y será posible dar estructura proyectiva al conjunto  $Q(E)$  de todas ellas.

El estudio de la relación de ortogonalidad (polaridad) inducida por una forma cuadrática (cuádrica) es el ingrediente geométrico fundamental de esta teoría, y prepara el camino para determinar expresiones analíticas reducidas. Este será el último tema del capítulo, que estará planteado de la forma habitual, es decir, como un problema de clasificación geométrica.

## 1. DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS

### 1.1 Formas bilineales y cuadráticas. Cuádricas

#### 1.1.1 Definición

Una forma bilineal en  $\hat{E}$ , es una aplicación  $\hat{Q}: \hat{E} \times \hat{E} \rightarrow K$  que es lineal respecto a cada componente, es decir, para  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{v} \in \hat{E}$ ,  $\lambda, \mu \in K$ :

- i)  $\hat{Q}(\lambda \hat{x} + \mu \hat{y}, \hat{v}) = \lambda \hat{Q}(\hat{x}, \hat{v}) + \mu \hat{Q}(\hat{y}, \hat{v})$
- ii)  $\hat{Q}(\hat{v}, \lambda \hat{x} + \mu \hat{y}) = \lambda \hat{Q}(\hat{v}, \hat{x}) + \mu \hat{Q}(\hat{v}, \hat{y})$

La forma bilineal se dice simétrica si  $\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{Q}(\hat{y}, \hat{x})$  para todo  $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ .

### 1.1.2 Ejemplos

Tomando  $\hat{E} = \hat{P}_n$ , para  $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\hat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  se define:

a)  $\hat{Q}_0^\rho : \hat{P}_n \times \hat{P}_n \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \sum_{i=1}^{\rho} x_{i-1} y_{i-1} \in K$ ,  $0 < \rho \leq n+1$

$\hat{Q}_\rho^\rho : \hat{P}_n \times \hat{P}_n \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto - \sum_{i=1}^{\rho} x_{i-1} y_{i-1} \in K$ ,  $0 < \rho \leq n+1$

$\hat{Q}_\nu^\rho : \hat{P}_n \times \hat{P}_n \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto - \sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1} y_{i-1} + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1} y_{j-1} \in K$ , donde ahora es  $0 < \rho \leq n+1$ , y  $0 < \nu < \rho$ .

Se prueba inmediatamente que  $\hat{Q}_\nu^\rho$  ( $0 < \rho \leq n+1$ ,  $0 \leq \nu \leq \rho$ ) son formas bilineales simétricas.

Se denota a  $\hat{Q}_\nu^{n+1}$ , directamente por  $\hat{Q}_\nu$ .

b) Fijada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  con coeficientes en  $K$ , la aplicación  $\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = (x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  es una forma bilineal, y es simétrica si y solo si la matriz  $A$  es simétrica.

Nótese que  $\hat{Q}_\nu^\rho(x, y) = (x_0, \dots, x_n) \Lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  siendo  $\Lambda$  la matriz diagonal  $\Lambda = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$

### 1.1.3 Definición

Dada la forma bilineal simétrica  $\hat{Q}$  de  $\hat{E}$ , se denomina forma cuadrática asociada a la aplicación  $\hat{q} : \hat{E} \ni \hat{x} \mapsto \hat{Q}(\hat{x}, \hat{x}) \in K$ .

### 1.1.4 Ejemplo (continuación de 1.1.2)

La forma cuadrática asociada a  $\hat{Q}_\nu^\rho$  es  $\hat{q}_\nu^\rho(x) = - \sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2$

### 1.1.5 Proposición

Si  $\hat{q}$  es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica  $\hat{Q}$  de  $\hat{E}$ , se verifica la siguiente identidad de polaridad:

$$\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2} (\hat{q}(\hat{x} + \hat{y}) - \hat{q}(\hat{x}) - \hat{q}(\hat{y})) \text{ para todo } \hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$$

En particular, dos formas bilineales simétricas en  $\hat{E}$  coinciden si y solo si inducen la misma forma cuadrática.

Demostración:

$$\hat{Q}(\hat{x} + \hat{y}) = \hat{Q}(\hat{x} + \hat{y}, \hat{x} + \hat{y}) = \hat{Q}(\hat{x}, \hat{x}) + 2\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{Q}(\hat{y}, \hat{y}) = \hat{q}(\hat{x}) + 2\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{q}(\hat{y})$$

y de aquí, despejando  $\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y})$  se obtiene la fórmula pedida.

La última afirmación ya es inmediata.

Teniendo en cuenta que  $\hat{q}(\lambda \hat{x}) = \hat{Q}(\lambda \hat{x}, \lambda \hat{x}) = \lambda^2 \hat{Q}(\hat{x}, \hat{x}) = \lambda^2 \hat{q}(\hat{x})$  ( $\lambda \in K$ )

y la identidad de polaridad, puede establecerse de forma intrínseca el concepto de forma cuadrática:

### 1.1.6 Definición

Una aplicación  $\hat{q}: \hat{E} \rightarrow K$  se dice que es una forma cuadrática si

i) Para todo  $\lambda \in K$ ,  $\hat{x} \in \hat{E}$  es  $\hat{q}(\lambda \hat{x}) = \lambda^2 \hat{q}(\hat{x})$

ii) La aplicación  $\hat{Q}: \hat{E}, \hat{E} \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \frac{1}{2} (\hat{q}(\hat{x} + \hat{y}) - \hat{q}(\hat{x}) - \hat{q}(\hat{y})) \in K$  es una forma bilineal.

La forma bilineal  $\hat{Q}$  -simétrica por construcción- se denomina forma polar asociada a la forma cuadrática  $\hat{q}$ .

### 1.1.7 Proposición

Si  $\hat{q}$  es forma cuadrática y  $\hat{Q}$  su forma polar, entonces  $\hat{q}$  es la forma cuadrática asociada a  $\hat{Q}$ .

Demostración

$$\hat{Q}(\hat{x}, \hat{x}) = \frac{1}{2} (\hat{q}(2\hat{x}) - \hat{q}(\hat{x}) - \hat{q}(\hat{x})) = \frac{1}{2} (4\hat{q}(\hat{x}) - 2\hat{q}(\hat{x})) = \hat{q}(\hat{x})$$

### 1.1.8 Proposición

Si  $\hat{q}$  es una forma cuadrática en  $\hat{E}$  con forma polar  $\hat{Q}$ , y  $\hat{F}$  es subespacio vectorial de  $\hat{E}$ , entonces la aplicación  $\hat{q}_F = \hat{q}|_{\hat{F}}: \hat{F} \ni \hat{x} \mapsto \hat{q}(\hat{x}) \in K$ , es una forma cuadrática en  $\hat{F}$  con forma polar  $\hat{Q}_F: \hat{F}, \hat{F} \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) \in K$ .

Demostración:

Notese que para  $\hat{x} \in \hat{F}$ ,  $\lambda \in K$  es  $\hat{q}_F(\lambda \hat{x}) = \hat{q}(\lambda \hat{x}) = \lambda^2 \hat{q}(\hat{x}) = \lambda^2 \hat{q}_F(\hat{x})$ .

Por otra parte, si  $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{F}$  se verifica:

$$\frac{1}{2} (\hat{q}_F(\hat{x} + \hat{y}) - \hat{q}_F(\hat{x}) - \hat{q}_F(\hat{y})) = \hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}). \text{ Esto concluye la demostración.}$$

### 1.1.9 Observación

Si  $\lambda, \mu \in K$ ,  $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$  son formas bilineales simétricas en  $\hat{E}$ , y  $\hat{q}_1, \hat{q}_2$  son las correspondientes formas cuadráticas asociadas, se define:

$$\hat{Q} = \lambda \hat{Q}_1 + \mu \hat{Q}_2 \text{ de la forma } \hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda \hat{Q}_1(\hat{x}, \hat{y}) + \mu \hat{Q}_2(\hat{x}, \hat{y})$$

$$q = \lambda \hat{q}_1 + \mu \hat{q}_2 \text{ es tal que } \hat{q}(\hat{x}) = \lambda \hat{q}_1(\hat{x}) + \mu \hat{q}_2(\hat{x})$$

Se prueba de manera totalmente trivial que  $\hat{Q}$  es una forma bilineal simétrica con forma cuadrática asociada  $\hat{q}$ .

Por otra parte, con estas operaciones el conjunto de formas bilineales simétricas, y el de formas cuadráticas sobre  $E$ , son espacios vectoriales, y se denota a ambos por el símbolo  $Q(\hat{E})$ . La razón de ésta ambigüedad está en la siguiente proposición, cuya demostración está contenida en este mismo epígrafe:

### 1.1.10 Proposición

La aplicación  $\hat{q} \rightarrow \hat{Q}$  que hace corresponder a cada forma cuadrática su forma polar, es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales.



### 1.1.11 Definición

Una cuádrica  $q$  de  $E$  es un elemento de la forma  $q=[\hat{q}]$  donde  $\hat{q}$  es una forma cuadrática (no nula) de  $\hat{E}$ .

El conjunto de cuádricas de  $E$ , es el espacio proyectivo  $P(Q(\hat{E}))$  construido sobre el espacio vectorial  $Q(\hat{E})$ , y lo denotaremos por  $Q(E)$ .

Nótese que una cuádrica viene determinada por una forma cuadrática no nula, y dos formas cuadráticas determinan la misma cuádrica si y solo si son proporcionales.

## 1.2 Cono isótropo. Puntos de una cuádrica

### 1.2.1 Definición

Un vector  $\hat{x} \in \hat{E}$  se denomina isótropo respecto a la forma cuadrática  $\hat{q} \in Q(\hat{E})$  si  $\hat{q}(\hat{x})=0$ .

### 1.2.2 Proposición

Si  $\hat{x} \in \hat{E}$  es un vector isótropo respecto a  $\hat{q} \in Q(\hat{E})$ , entonces  $\lambda \hat{x}$  es isótropo respecto a la forma cuadrática  $\mu \hat{q}$ , para todo  $\lambda, \mu \in K$ .

Demostración:

Nótese que  $(\mu \hat{q})(\lambda \hat{x}) = \mu \lambda^2 \hat{q}(\hat{x})$

### 1.2.3 Definición

i) Se denomina cono isótropo  $\hat{C}$  de la forma cuadrática  $\hat{q} \in Q(\hat{E})$  al conjunto de sus vectores isotropos. Es decir  $\hat{C} = \{\hat{x} \in \hat{E} / \hat{q}(\hat{x})=0\}$ .

ii) Se denomina imagen de la cuádrica  $q=[\hat{q}] \in Q(E)$  al conjunto  $\text{im } q = C = \{\hat{x} \in E / \hat{q}(\hat{x})=0\}$ . Los puntos de  $\text{im } q$  se denominan puntos de la cuádrica.

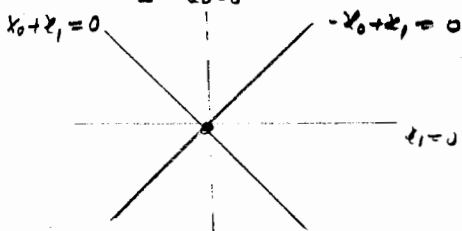
### 1.2.4 Observación

Nótese que en virtud de 1.2.2 la definición 1.2.3 ii) carece de ambigüedad, es decir, el criterio para decidir si un punto  $x=[\hat{x}] \in E$  es punto de la cuádrica  $q=[\hat{q}]$  es independiente del vector  $\hat{x}$  elegido tal que  $x=[\hat{x}]$ , y de la forma cuadrática  $\hat{q}$  que verifique  $q=[\hat{q}]$ .

### 1.2.5 Ejemplos

En el espacio proyectivo  $P_1(\mathbb{R})$ , determinemos el cono isótropo de la forma cuadrática  $\hat{q}$  (en  $\hat{P}_1$ ) y la imagen de la cuádrica  $q=[\hat{q}]$  en los siguientes casos:

i)  $\hat{q} \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix} = -x_0^2 + x_1^2$ . La ecuación del cono isótropo es  $-x_0^2 + x_1^2 = 0$ , es decir  $(-x_0 + x_1)(x_0 + x_1) = 0$ . Así el cono isótropo es la unión de las rectas vectoriales  $-x_0 + x_1 = 0$  y  $x_0 + x_1 = 0$ . La imagen de la cuádrica es



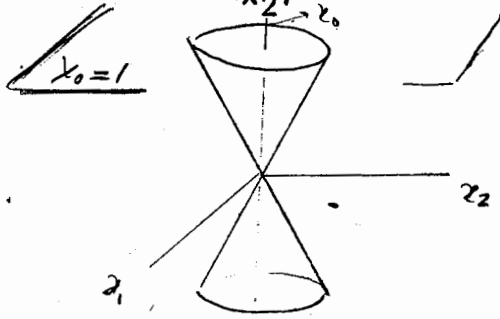
$$\text{im } q = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

ii) Tomemos  $\hat{q} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_0^2 + x_1^2$ . La ecuación  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  da lugar únicamente al vector nulo, y por tanto  $\text{im } q = \emptyset$ .

iii)  $\hat{q} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_0^2$ . El cono isotrópico está formado por la recta vectorial  $x_0 = 0$ , que da lugar a un único punto  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  para  $\text{im } q$ .

b) Analicemos ahora la cuestión análoga en  $P_2(\mathbb{R})$  para  $q = [\hat{q}]$  en los siguientes casos:

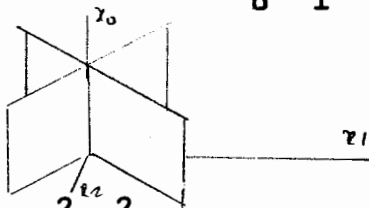
i)  $\hat{q}(x) = q \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$



La ecuación del cono isotrópico y de los puntos de la cuádrica es  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ , y están representados en el cono de la figura. Nótese que si mandamos al infinito la recta  $x_0 = 0$  la representación de  $\text{im } q$  en el correspondiente plano afin ( $x_0 = 1$ ) es una "circunferencia".

ii) Si  $q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ , claramente  $\text{im } q = \emptyset$

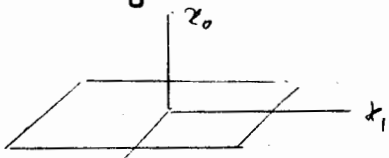
iii) Pongamos  $q(x) = -x_0^2 + x_1^2$ . La ecuación  $(-x_0 + x_1)(x_0 + x_1) = 0$  da lugar al par de planos vectoriales representados en la figura, que definen dos rectas proyectivas



en  $E$ , cuya unión es  $\text{im } q$

iv)  $q(x) = x_0^2 + x_1^2$ . El único punto de la cuádrica es el punto  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

v)  $q(x) = x_0^2$ .  $\text{im } q$  es la recta de ecuación  $x_0 = 0$ , que da lugar a un plano vectorial (doble) en  $\hat{E}$  como cono isotrópico de  $\hat{q}$ .



### 1.3 Expresiones analíticas

1.3.1 Sea  $\hat{E} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  una base de  $\hat{E}$  y  $\mathcal{E} = [\hat{E}]$  el sistema de referencia proyectivo inducido en  $E$ . Se denota por  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  los correspondientes

sistemas de coordenadas inducidos sobre  $\hat{E}$  y  $E$  respectivamente.

Fijemos  $\hat{q}$  forma cuadrática no nula en  $E$ , y sea  $\hat{Q}$  su forma polar.  $q = [\hat{q}]$  es la correspondiente cuádrica en  $E$

### 1.3.2 Proposición

En las hipótesis 1.3.1, si  $\hat{Q}(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = a_{ij}$   $i, j = 0, \dots, n$ , se verifica para

$$\hat{a} = \sum_{i=0}^n a_i \hat{e}_i, \quad \hat{b} = \sum_{j=0}^n b_j \hat{e}_j :$$

$$\hat{Q}(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} a_i b_j = (a_0, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Demostración

Utilizando la bilinealidad de  $\hat{Q}$  se verifica:

$$\hat{Q}(\hat{a}, \hat{b}) = \hat{Q}\left(\sum_{i=0}^n a_i \hat{e}_i, \sum_{j=0}^n b_j \hat{e}_j\right) = \sum_{i,j=0}^n a_i b_j \hat{Q}(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \sum_{i,j=0}^n a_i b_j a_{ij}.$$

### 1.3.3 Corolario

La forma bilineal  $\hat{Q}$  queda unívocamente determinada por la matriz (simétrica)  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = \hat{Q}(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$   $i, j = 0, \dots, n$ . Se denomina a  $A$  matriz de  $Q$  respecto a la base  $\hat{E}$ , y se escribe  $A = M_{\hat{E}}(\hat{Q})$ .

Denotando por  $Q(\hat{P}_n)$  al espacio vectorial de las matrices simétricas de orden  $n+1$ , resulta que la aplicación  $M_{\hat{E}}: Q(\hat{E}) \rightarrow Q(\hat{P}_n)$  es un isomorfismo lineal. En particular  $\dim Q(\hat{E}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

Demostración:

La linealidad de  $M_{\hat{E}}$  es evidente; si  $M_{\hat{E}}(\hat{Q}) = 0$ , la fórmula de la proposición 1.3.2 muestra que  $\hat{Q}$  es idénticamente nula.

Por otra parte, fijada  $A \in Q(\hat{P}_n)$ , la fórmula de 1.3.2 define una forma bilineal simétrica  $\hat{Q}$  que tiene a  $A$  por matriz asociada (Respecto a  $\hat{E}$ ). Finalmente la dimensión de  $Q(\hat{P}_n)$  (igual a la de  $Q(\hat{E})$ ) se calcula teniendo en cuenta que si  $S_{ij}$  ( $i \leq j$ ) es la matriz de  $Q(\hat{P}_n)$  que tiene todos los coeficientes nulos excepto el que ocupa el lugar  $(i, j)$  y el  $(j, i)$  que tiene valor la unidad, entonces la familia  $\{S_{ij} / i \leq j\}$  constituye una base de  $Q(\hat{P}_n)$  que consta de  $1+2+\dots+n+1 = (n+1)(n+2)/2$

### 1.3.4 Corolario

En las condiciones 1.3.1, si  $M_{\hat{E}}(\hat{Q}) = A = (a_{ij})$ , entonces para cada  $\hat{a} \in \hat{E}$

$$\text{se tiene } \hat{Q}(\hat{a}) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i(a) x_j(a).$$

Se conviene en escribir entonces  $\hat{Q} = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j$  ó también:

$$\hat{Q} = (x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 1.3.5 Observación

La expresión analítica anterior  $\hat{Q} = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j$  puede escribirse en la

$$\text{forma } q = 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=0}^n a_{ii} x_i^2 = \sum_{i \leq j} q_{ij} x_i x_j, \text{ donde}$$

$$q_{ij} = 2 a_{ij} \text{ si } i \neq j, \text{ y } q_{ii} = a_{ii}.$$

Recíprocamente, fijada la forma cuadrática por su expresión analítica

$$q = \sum_{i \leq j} q_{ij} x_i x_j, \text{ su matriz } A \text{ respecto a } \hat{E} \text{ es de la forma:}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01}/2 \cdots & q_{0n}/2 \\ q_{01}/2 & q_{11} \cdots & q_{1n}/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{0n}/2 & q_{1n}/2 \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

### 1.3.6 Definición

En las condiciones 1.3.4 y 1.3.5 se dice que  $(x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

ó bien  $\sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j = 0$  es la ecuación de la cuádrica  $q = [\hat{q}]$ .

Nótese que dicha ecuación representa la ecuación implícita de los puntos de la cuádrica, y viene determinada salvo constantes multiplicativas no nulas.

### 1.3.7 Ejemplos

Tomando  $E = P_n(K)$  y siguiendo la notación establecida en 1.1.2 y 1.1.4 podemos denotar por  $q_v^p$  a la cuádrica  $[\hat{q}_v^p]$  ( $0 < p \leq n+1$ ,  $0 < v \leq \frac{p}{2}$ ) y tiene por ecuación:  $-\sum_{i=1}^v x_{i-1}^2 + \sum_{j=v+1}^p x_{j-1}^2 = 0$ .

Nótese que  $q_v^p = q_{p-v}^p$ .

## 1.4 Cambios de coordenadas

1.4.1 En las condiciones de 1.3.1, sea ahora  $\hat{\varepsilon}' = (\hat{\varepsilon}'_0, \dots, \hat{\varepsilon}'_n)$  otra base de  $E$  con coordenadas  $\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ , y  $\varepsilon' = [\hat{\varepsilon}']$  el sistema de referencia proyectivo inducido con coordenadas  $\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ . Supongase  $\hat{\varepsilon}' = \hat{\varepsilon} P$  siendo  $P$  la ma-

triz cuadrada no singular de cambio de base. En éstas condiciones se tiene:

### 1.4.2 Teorema

Fijadas las hipótesis 1.4.1, si  $M_{\hat{\varepsilon}}(\hat{q}) = \hat{A}$ , entonces  $M_{\hat{\varepsilon}'}(\hat{q}) = P^t A P$ .

Demostración:

Por una parte se tiene:  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  y además  $\hat{q} = (x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

sustituyendo formalmente en ésta última igualdad las  $x_j$  en función de las  $x'_j$  por el cambio de coordenadas se obtiene:

$$(x'_0, \dots, x'_n) P^t A P \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \hat{q} \text{ de donde se concluye la tesis.}$$

Como consecuencia inmediata se obtiene el siguiente resultado:

### 1.4.3 Corolario

En las hipótesis de 1.4.1, si  $(x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$  es la ecuación de una cuádrica en el sistema de coordenadas  $(x_i)$ , entonces

$(x'_0, \dots, x'_n) P^t A P \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = 0$  son las ecuaciones de la misma cuádrica en el sistema de coordenadas  $\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

### 1.4.4 Comentario

Más adelante probaremos que cualquier cuádrica real admite una ecuación reducida de la forma  $\hat{q}'_v := (-\sum_{i=1}^v x_{i-1}^2 + \sum_{i=v+1}^r x_{j-1}^2 = 0)$  respecto a cierto sistema de coordenadas homogéneas.

### 1.4.5 Definición

En las hipótesis 1.4.1, una forma cuadrática  $\hat{q}$  se dice no degenerada si  $\det A \neq 0$ , siendo  $A = M_{\hat{e}}(\hat{q})$ .

Si  $\hat{q}$  es no degenerada, se dice que  $q = [\hat{q}]$  es cuádrica propia.

### 1.4.6 Observación

La definición anterior es consistente ya que el carácter no degenerado de  $q$  no depende de la base concreta  $\hat{e}$  utilizada: Si  $\hat{e}' = \hat{e} P$  como en 1.4.1 y  $M_{\hat{e}'}(q) = A'$ , se verifica por 1.4.2 que  $A' = P^t A P$ , y  $\det A' = (\det P)^2 \det A$ , así  $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$ .

### 1.4.5 Ejemplo

La forma cuadrática  $\hat{q}'_v$  de 1.1.4 es no degenerada si y solo si  $v = n+1$ .

## 2. ORETOGONALIDAD. POLARIDAD

En este epígrafe se trabaja con una forma cuadrática fija  $\hat{q}$  sobre  $E$ .  $\hat{Q}$  denota su forma polar.

### 2.1 Rango

#### 2.1.1 Proposición (definición)

A partir de la forma cuadrática  $\hat{q}$ , y fijado  $\hat{a} \in \hat{E}$  se define

$\hat{Q}^v(\hat{a}): \hat{E} \ni \hat{x} \mapsto \hat{Q}(\hat{a}, \hat{x}) \in K$ . Se tiene:

- i) La aplicación  $\hat{Q}^v(\hat{a})$  es lineal para todo  $\hat{a} \in \hat{E}$
- ii) La aplicación  $\hat{Q}^v: \hat{E}^v \ni \hat{a} \mapsto \hat{Q}^v(\hat{a}) \in \hat{E}^v$  es lineal. Se denomina aplicación lineal asociada a la forma cuadrática  $\hat{q}$ .

La demostración es elemental si se tiene en cuenta la definición

1.1.1 de forma bilineal.

### 2.1.2 Observación

Aplicando la notación "ambigua" para espacio dual (1.1.5 Cap II), se verifica la identidad:

$$\hat{Q}(\hat{a}, \hat{b}) = (\hat{Q}^*(\hat{a})/\hat{b}) = (\hat{a}/\hat{Q}^*(\hat{b}))$$

para todo  $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{E}$ .

### 2.1.3 Teorema

i) La aplicación  $Q(\hat{E}) \ni \hat{q} \mapsto \hat{Q}^* \in FL(\hat{E}, \hat{E}^*)$  es una aplicación lineal

ii) Si  $\hat{E} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  es base de  $\hat{E}$ , y  $\hat{E}^*$  es su base dual entonces

$$M_{\hat{E}}(\hat{q}) = M_{\hat{E}, \hat{E}^*}(\hat{Q}^*).$$

Demostración

i) Si  $\hat{q}_1, \hat{q}_2 \in Q(\hat{E})$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ , y  $\hat{Q}_i$  denota la forma polar correspondiente, para todo  $\hat{a} \in \hat{E}$  se tiene:

$$\begin{aligned} ((\lambda_1 \hat{q}_1 + \lambda_2 \hat{q}_2)(\hat{a})/\hat{b}) &= (\lambda_1 \hat{Q}_1 + \lambda_2 \hat{Q}_2)(\hat{a}, \hat{b}) = \lambda_1 \hat{Q}_1(\hat{a}, \hat{b}) + \lambda_2 \hat{Q}_2(\hat{a}, \hat{b}) = \\ &= (\lambda_1 \hat{Q}_1^*(\hat{a}) + \lambda_2 \hat{Q}_2^*(\hat{a})/\hat{b}) \text{ para todo } \hat{b} \in \hat{E}. \text{ De aquí se concluye i).} \end{aligned}$$

ii) Teniendo en cuenta la identidad de 1.1.11 Cap II referente a bases

duales, si  $\hat{E}^* = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , se tiene para  $A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_{\hat{E}}(\hat{q})$ :

$$\hat{Q}^*(\hat{e}_j) = \sum_{i=0}^n (\hat{Q}^*(\hat{e}_j)/\hat{e}_i) x_i = \sum_{i=0}^n Q(\hat{e}_j/e_i) x_i = \sum_{i=0}^n Q(e_i/e_j) x_i = \sum_{i=0}^n a_{ij} x_i$$

Como consecuencia de este resultado, resulta consistente la siguiente definición:

### 2.1.4 Definición

Supongase  $\hat{q} \neq 0$ , y  $q = [\hat{q}]$ :

i) Se llama radical de  $\hat{q}$  y se denota por  $\text{rad } \hat{q}$  al núcleo de la aplicación lineal  $\hat{Q}^*$  asociada.

ii) Al conjunto  $P(\text{rad } \hat{q}) = \text{rad } q$  se denomina conjunto de puntos singulares de la cuádrica.

iii) Se denomina rango de la forma cuadrática  $\hat{q}$  ( $\text{rg } \hat{q}$ ) y de la cuádrica  $q$  ( $\text{rg } q$ ) al rango de la aplicación lineal  $\hat{Q}^* : \hat{E} \rightarrow \hat{E}^*$ .

iv) A la correspondencia proyectiva  $Q^* = [\hat{Q}^*] : E - \text{rad } q \rightarrow E$ , se denomina correspondencia de polaridad inducida por la cuádrica  $q$ .

### 2.1.5 Consecuencias inmediatas

i) Si  $\hat{E}$  es base de  $\hat{E}$  y  $M_{\hat{E}}(\hat{q})=A$ ,  $q=[\hat{q}]$  entonces  $rg\ q = rg\ \hat{q} = rg\ A$

En particular se tienen las equivalencias:

$\hat{q}$  no degenerada  $\Leftrightarrow q$  cuádrica propia  $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \hat{q}^*$  isomorfismo lineal  $\Leftrightarrow rg\ q = rg\ \hat{q} = n+1 \Leftrightarrow rad\ \hat{q} = 0 \Leftrightarrow rad\ q = \emptyset$ .

ii) Si  $(x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$  son las ecuaciones de una cuádrica  $q$  en las

coordenadas  $[x_i]$ , las ecuaciones del conjunto de puntos singulares son

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

iii) Como  $rg\ \hat{q}^* + \dim(\text{Ker}\ \hat{q}^*) = n+1$  se tiene la fórmula:

$$rg\ \hat{q} + \dim(\text{rad}\ \hat{q}) = n+1 \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que  $rad\ q = P(\text{rad}\ \hat{q})$  y  $\dim(\text{rad}\ q) = \dim(\text{rad}\ \hat{q}) - 1$ :

$$rg\ q + \dim(\text{rad}\ q) = n \quad (2)$$

iv) Nótese que  $rad\ q \subset im\ q$  ya que si  $a = [\hat{a}] \in rad\ q$ , es  $\hat{a} \in rad\ \hat{q}$  y se tiene  $\hat{q}^*(\hat{a}) = 0$ , por tanto  $\hat{q}(\hat{a}) = \hat{q}(\hat{a}, \hat{a}) = (\hat{q}^*(\hat{a})/\hat{a}) = (0/\hat{a}) = 0$ , y  $a \in im\ q$ .

### 2.1.6 Ejemplo

El rango de la cuádrica  $q_{\rho}^{\rho} = [q_{\rho}^{\rho}]$  (1.3.7) es igual a  $\rho$ , ya que  $\rho$  es el rango de la matriz  $\Lambda = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

Nótese que las ecuaciones de  $rad\ q$  y  $rad\ \hat{q}$  son  $x_{j+1} = 0 \quad \left. \vphantom{x_{j+1}} \right\} j = \rho, \dots, n$

## 2.2. Ortogonalidad y polaridad. Definiciones

### 2.2.1 Definición

i) Si  $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{E}$  se dice que  $\hat{a}$  es ortogonal a  $\hat{b}$  (respecto a  $\hat{q}$ ) si  $\hat{q}(\hat{a}, \hat{b}) = 0$ , y escribimos  $\hat{a} \perp \hat{b}$ .

ii) Si  $a = [\hat{a}]$ ,  $b = [\hat{b}] \in E$ , se dice que  $a$  y  $b$  son conjugados (respecto a la cuádrica  $q$ ) si  $\hat{a} \perp \hat{b}$  (respecto a  $\hat{q}$ ) y se escribe  $a \perp b$ .

### 2.2.2 Observación

Nótese que la parte ii) de la definición carece de ambigüedad, pues si  $\hat{a}$  es ortogonal a  $\hat{b}$  respecto a  $\hat{q}$ , entonces  $\lambda \hat{a}$  es ortogonal a  $\mu \hat{b}$  respecto a  $\hat{q}$  para todo  $\lambda, \mu, \mu \neq 0$ .

### 2.2.3 Definición (proposición)

i) Si  $\hat{S}$  es subconjunto de  $\hat{E}$ , el conjunto  $\hat{S}^{\perp} = \{\hat{a} \in \hat{E} / \hat{a} \perp \hat{s} \text{ para todo } \hat{s} \in \hat{S}\}$  es subespacio vectorial de  $\hat{E}$  y se denomina subespacio ortogonal a  $\hat{S}$ .

ii) Si  $S$  es subconjunto de  $E$ , el conjunto  $S^{\perp} = \{a \in E / a \perp s \text{ para todo } s \in S\}$  es subespacio proyectivo de  $E$ , y se denomina subespacio polar de  $S$ .

Si  $\hat{a}, \hat{b} \in S$ ,  $\lambda, \mu \in K$  se tiene para todo  $\hat{s} \in \hat{S}$ :

$$Q(\lambda \hat{a} + \mu \hat{b}, \hat{s}) = \lambda \hat{Q}(\hat{a}, \hat{s}) + \mu \hat{Q}(\hat{b}, \hat{s}) = 0 + 0 = 0, \text{ luego } \lambda \hat{a} + \mu \hat{b} \in \hat{S}$$

ii) Nótese que si  $S \subset E$  se puede construir un único  $\hat{S} \subset \hat{E}$  tal que  $S = \{[\hat{s}] / \hat{s} \in \hat{S} - 0\}$  (brevemente,  $S = P(\hat{S})$ ), y se verifica  $S^\perp = P(\hat{S}^\perp)$ .

#### 2.2.4 Proposición

i)  $\hat{E}^\perp = \text{rad } \hat{q}$     ii)  $E^\perp = \text{rad } q$

Demostración

i) Nótese que  $\text{rad } \hat{q} = \text{Ker } \hat{Q}^* = \{ \hat{a} \in \hat{E} / (\hat{Q}^*(\hat{a})/\hat{x}) = 0 \ \forall \hat{x} \in \hat{E} \} = \{ \hat{a} \in \hat{E} / \hat{Q}(\hat{a}, \hat{x}) = 0 \ \forall \hat{x} \in \hat{E} \} = \{ \hat{a} \in \hat{E} / \hat{a} \perp \hat{x} \ \forall \hat{x} \in \hat{E} \}$ .

ii) Es inmediata a partir de i)

El siguiente resultado relaciona la ortogonalidad respecto a la forma cuadrática  $q$  con la ortogonalidad dual establecida en 3.1 Cap II:

#### 2.2.5 Teorema

Sea  $\hat{S}$  subconjunto de  $E$ , y  $\hat{Q}^*: \hat{E} \rightarrow \hat{E}^*$  la aplicación lineal asociada a  $\hat{q}$  se tiene entonces:  $\hat{S}^\perp = \hat{Q}^*(S)^\omega = (\hat{Q}^*)^{-1}(S^\omega)$

Demostración

Sea  $\hat{a} \in \hat{E}$ , se tienen las equivalencias:

$$\hat{a} \in \hat{S}^\perp \Leftrightarrow \hat{Q}(\hat{a}, \hat{s}) = 0 \ \forall \hat{s} \in \hat{S} \Leftrightarrow (\hat{a}/\hat{Q}^*(\hat{s})) = 0 \ \forall \hat{s} \in \hat{S} \Leftrightarrow \hat{a} \in \hat{Q}^*(\hat{S})^\omega$$

$$\hat{a} \in \hat{S}^\perp \Leftrightarrow Q(\hat{a}, \hat{s}) = (\hat{Q}^*(\hat{a})/\hat{s}) = 0 \ \forall \hat{s} \in \hat{S} \Leftrightarrow \hat{Q}^*(\hat{a}) \in S^\omega \Leftrightarrow \hat{a} \in (\hat{Q}^*)^{-1}(S^\omega)$$

#### 2.2.6 Corolario

Sea  $A$  subespacio proyectivo de  $E$ . Entonces:

$$A^\perp = Q^*(A)^\omega = (Q^*)^{-1}(A^\omega)$$

Demostración

Sea  $A = P(\hat{A})$ , se verifica:

$$A^\perp = P(\hat{A}^\perp) = P(\hat{Q}^*(\hat{A})^\omega) = P(\hat{Q}^*(\hat{A}))^\omega = [Q^*(P(\hat{A}))]^\omega = Q^*(A)^\omega.$$

La otra igualdad se prueba de forma análoga

### 2.3 Propiedades operativas de las relaciones de ortogonalidad y polaridad.

#### 2.3.1 Convenio de notaciones

Para simplificar la exposición, describiremos de forma simultánea las propiedades de la relación de ortogonalidad y de la de polaridad según el siguiente convenio de notaciones:

Según el siguiente convenio de notaciones:

$X$  denota indistintamente al espacio vectorial  $\hat{E}$  ó al proyectivo  $E$ .

Si  $S$  es subconjunto de  $X$ , se denotará por  $S^\perp$  al subespacio ortogonal respecto a  $\hat{q}$ , si  $X = \hat{E}$ , ó al subespacio polar respecto a la cuadrática  $q$  si  $X = E$ .

En general las demostraciones se efectuarán solo para el caso



Las reglas de manipulación del operador  $\perp$  pueden sistematizarse en los siguientes puntos:

2.3.2 Si  $S$  y  $T$  son subconjuntos de  $X$ , entonces  $S \subset T \implies S^\perp \supset T^\perp$

Demostración: inmediata

2.3.3 Si  $S$  es subconjunto de  $X$ , entonces  $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$

Demostración:

Tomemos  $X = \hat{E}$ . Como  $S \subset \langle S \rangle$  por 2.3.2 es  $S^\perp \supset \langle S \rangle^\perp$ .

Recíprocamente, si  $a \in S^\perp$ , entonces para  $s \in S$  existen  $s_1, \dots, s_r \in S$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  con  $s = \sum_{i=1}^r \lambda_i s_i$ , y se tiene

$$\hat{Q}(a, s) = \hat{Q}(a, \sum_{i=1}^r \lambda_i s_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \hat{Q}(a, s_i) = 0. \text{ Luego } a \in \langle S \rangle^\perp.$$

2.3.4 Si  $U$  y  $V$  son subespacios de  $X$ , entonces  $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$

Demostración:

Como  $U \subset U+V$  y  $V \subset U+V$  se concluye por 2.3.2 que  $U^\perp \cap V^\perp \supset (U+V)^\perp$

Por otra parte (tomando  $X = \hat{E}$ ) si  $a \in U^\perp \cap V^\perp$  entonces para  $u \in U, v \in V$ ,  $\hat{Q}(a, u+v) = \hat{Q}(a, u) + \hat{Q}(a, v) = 0 + 0 = 0$ . Así  $a \in (U+V)^\perp$ .

2.3.5 Si  $U$  y  $V$  son subespacios de  $X$  entonces  $(U \cap V)^\perp \supset U^\perp + V^\perp$ .

Demostración: Elemental

2.3.6 Si  $U$  es subespacio de  $X$  entonces  $U \subset U^{\perp\perp}$

Demostración: Elemental

2.3.7 Si  $U$  es subespacio de  $X$  entonces se verifica la fórmula:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim X + \dim(X^\perp \cap U)$$

Demostración:

Supongase  $X = \hat{E}$ . Aplicando la fórmula de dimensiones a la aplicación li-

near  $\hat{Q}^*/U : U \rightarrow \hat{Q}^*(U)$ , y teniendo en cuenta que

$\ker(\hat{Q}^*/U) = (\ker \hat{Q}^*) \cap U = \hat{E}^\perp \cap U$ , se tiene:

$$\dim \hat{Q}^*(U) + \dim(\hat{E}^\perp \cap U) = \dim U \quad (1)$$

Por 3.1.4 Cap II se verifica:  $\dim \hat{Q}^*(U) + \dim \hat{Q}^*(U)^\omega = \dim \hat{E}$

y por 2.2.5 es  $\hat{Q}^*(U)^\omega = U^\perp$ , así se tiene:

$$\dim \hat{Q}^*(U) = \dim \hat{E} - \dim U \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene la fórmula pedida.

(La demostración al caso  $X = E$  se obtiene ya de forma automática)

Las propiedades que siguen, de 2.3.8 a 2.3.11 son válidas solo cuando la forma cuadrática  $q$  es no degenerada, es decir, la cuádrica  $q$  es propia.

2.3.8 Para  $U$  subespacio de  $E$ :  $\dim U + \dim U^\perp = \dim E$

2.3.9 Para  $U$  subespacio de  $E$ :  $\dim U + \dim U^\perp = \dim E - 1$

Las demostraciones son inmediatas a partir de 2.3.7, si se tiene en cuenta que en este caso  $\hat{E}^\perp = 0$  y  $E^\perp = \emptyset$ , pues entonces se verifica  $\dim(U \cap \hat{E}^\perp) = 0$  y  $\dim(U \cap E^\perp) = -1$ .

2.3.10 Para  $U$  subespacio de  $X$ , es  $U = U^{\perp\perp}$ .

Demostración:

Nótese que por 2.3.6  $U \subset U^{\perp\perp}$ , y por 2.3.9  $U$  y  $U^{\perp\perp}$  tienen la misma dimensión.

2.3.11 Si  $U$  y  $V$  son subespacios de  $X$  se tiene:  $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$

Demostración:

Aplicamos 2.3.4 a los subespacios  $U^\perp$  y  $V^\perp$ , se tiene entonces:

$(U^\perp + V^\perp)^\perp = U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp} = U \cap V$  (por 2.3.10). Aplicando a los dos miembros el operador  $\perp$  queda, nuevamente por 2.3.10:

$$(U^\perp + V^\perp)^{\perp\perp} = (U^\perp + V^\perp)^\perp = (U \cap V)^\perp.$$

El resultado iv) del siguiente teorema es conocido con el nombre de teorema fundamental de la polaridad:

### 2.3.12 Teorema

i) Si  $a$  es un punto de  $E$  no singular para la cuádrica  $q$  (es decir  $a \in E - \text{rad } q$ ) entonces  $a^\perp$  es un hiperplano  $H$  de  $E$ . Se dice entonces que  $a$  es el polo de  $H$ , ó que  $H$  es la polar de  $a$ .

ii) La aplicación  $E - \text{rad } q \ni a \mapsto a^\perp \in E^*$  es una correspondencia proyectiva y coincide con  $Q^* = [\hat{Q}^*]: E - \text{rad } q \rightarrow E^*$ .

iii) Si  $A$  es subespacio proyectivo de  $E$  entonces  $Q^*(A) = (A^\perp)^\omega$ .

iv) En particular si la cuádrica  $q$  es propia y  $a \in E$  es el polo del hiperplano  $H$ , entonces  $Q^*(H) = a^\omega$ , es decir:

"Las polares de los puntos de un hiperplano  $H$  son justamente el conjunto de hiperplanos que pasan por el polo de  $H$ "

Demostración:

i) Es consecuencia inmediata de 2.3.7:

Como  $a \in E - \text{rad } q$ , es  $\dim(\{a\} \cap E) = -1$  y se tiene

$$\dim a + \dim a^\perp = \dim E - 1, \text{ y } \dim a^\perp = \dim E - 1.$$

ii) Si  $a = [\hat{a}]$ , la forma lineal  $\hat{Q}^*(\hat{a})$  tiene por subespacio anulador  $\hat{Q}^*(\hat{a})^\omega = a^\perp$  ya que  $(\hat{Q}^*(\hat{a})/\hat{a}) = 0 \Leftrightarrow Q(a, e) = 0 \Leftrightarrow e \perp a$ . Esto prueba ii)

iii) Es consecuencia de 2.1.5 y de la propiedad  $\omega^2 = \text{id}$

iv) Nótese que si  $a^\perp = H$ , por 2.2.10 es  $a = a^{\perp\perp} = H^\perp$ , y por tanto

$$Q^*(H) = \{x^\perp / x \in H\} = a^\omega = \{H \in E^* / a \in H\}.$$

Dos formas cuadráticas ( ó cuádricas) se dirán equivalentes si admiten una misma expresión analítica formal respecto a sendos sistemas de coordenadas adecuadamente elegidos.

Plantaremos el correspondiente problema de clasificación desde el punto de vista de la actuación del grupo de transformaciones, y lo resolveremos en el caso real y complejo.

### 3.1 Equivalencia lineal y proyectiva

Sea  $\hat{E}'$  espacio vectorial y  $E' = P(\hat{E}')$  el correspondiente espacio proyectivo

#### 3.1.1 Proposición

Sea  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  una aplicación lineal.

i) Si  $\hat{q}'$  es una forma cuadrática en  $\hat{E}'$  con forma polar  $\hat{Q}'$ , entonces  $\hat{q} = \hat{f}^\#(\hat{q}') = \hat{q}' \circ \hat{f}$ , es una forma cuadrática en  $\hat{E}$  cuya forma polar es  $\hat{Q}: \hat{E} \times \hat{E} \ni (\hat{a}, \hat{b}) \mapsto \hat{Q}'(\hat{f}(\hat{a}), \hat{f}(\hat{b})) \in K$ .

ii) La aplicación  $\hat{f}^\#: Q(\hat{E}') \rightarrow Q(\hat{E})$  es lineal

Demostración:

i) La aplicación  $\hat{Q}$  definida en i) es claramente forma bilineal simétrica y  $\hat{Q}(\hat{a}, \hat{a}) = \hat{Q}'(\hat{f}(\hat{a}), \hat{f}(\hat{a})) = (\hat{q}' \circ \hat{f})(\hat{a})$ .

ii) Si  $\hat{q}'_1, \hat{q}'_2 \in Q(\hat{E}')$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  entonces

$$\hat{f}^\#(\lambda_1 \hat{q}'_1 + \lambda_2 \hat{q}'_2)(\hat{a}) = (\lambda_1 \hat{q}'_1 + \lambda_2 \hat{q}'_2)(\hat{f}(\hat{a})) = \lambda_1 (\hat{q}'_1 \circ \hat{f})(\hat{a}) + \lambda_2 (\hat{q}'_2 \circ \hat{f})(\hat{a}) = (\lambda_1 \hat{f}^\#(\hat{q}'_1) + \lambda_2 \hat{f}^\#(\hat{q}'_2))(\hat{a})$$

#### 3.1.2 Proposición

Si  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$ ,  $\hat{g}: \hat{E}' \rightarrow \hat{E}''$  son aplicaciones lineales, entonces  $(\hat{g} \circ \hat{f})^\# = \hat{f}^\# \circ \hat{g}^\#$ . Además  $(\lambda \hat{f})^\# = \lambda^2 \hat{f}^\#$  para todo  $\lambda \in K$ .

En particular si  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  es isomorfismo lineal se verifica que  $\hat{f}^\#: Q(\hat{E}') \rightarrow Q(\hat{E})$  es isomorfismo lineal con  $(\hat{f}^\#)^{-1} = (\hat{f}^{-1})^\#$

La demostración es elemental.

Traduciendo estas ideas al lenguaje proyectivo se tiene:

#### 3.1.3 Corolario

Si  $f = [\hat{f}]: E \rightarrow E'$  es una homografía, la aplicación

$f^\# = [\hat{f}^\#]: Q(E') \ni q' = [\hat{q}'] \mapsto f^\#(q') = [\hat{f}^\#(\hat{q}')] \in Q(E)$  es homografía.

Además si  $g: E' \rightarrow E''$  es otra homografía entre espacios proyectivos se verifica  $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$ . En particular  $(f^\#)^{-1} = (f^{-1})^\#$ .

Demostración:

Como  $(\lambda \hat{f})^\# = \lambda^2 \hat{f}^\#$ , la definición de  $f$  carece de ambigüedad. Las demás afirmaciones son triviales a partir de 3.1.2

Volviendo a la notación 2.3.1, y escribiendo  $G(X)$  Para expresar el grupo  $GL(\hat{E})$  ó  $GP(E)$  según sea  $X=\hat{E}$  ó  $X=E$ , se tiene la siguiente definición común:

### 3.1.4 Corolario (definición)

La aplicación  $G(X), Q(X) \ni (f, q) \mapsto f^\#(q) \in Q(X)$  establece una actuación por la derecha del grupo de transformaciones sobre el conjunto  $Q(X)$  (de formas cuadráticas de  $\hat{E}$ , si  $X=\hat{E}$  ó de cuádricas de  $E$  si  $X=E$ ). Dos elementos  $q, q' \in Q(X)$  se dirán equivalentes si existe  $f \in G(X)$  tal que  $q' = f^\#(q)$ . La relación es de equivalencia; Si  $X=\hat{E}$  se llama equivalencia lineal de formas cuadráticas, si  $X=E$ , equivalencia proyectiva de cuádricas.

La demostración es inmediata.

### 3.1.5 Proposición

Dos cuádricas  $q = [\hat{q}]$ ,  $q' = [\hat{q}']$  son proyectivamente equivalentes si y solo si existe  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $\hat{q}$  es linealmente equivalente a  $\lambda \hat{q}'$ .

Demostración:

Si  $f = [\hat{f}] \in GP(E)$  se tienen las equivalencias:

$$f^\#(q) = q' \Leftrightarrow [\hat{f}^\#(\hat{q})] = [\hat{q}'] \quad \text{Existe } \lambda \in K - \{0\} \text{ con } \hat{f}^\#(\hat{q}) = \lambda \hat{q}'.$$

El criterio analítico para reconocer la equivalencia lineal de formas cuadráticas es el siguiente:

### 3.1.6 Proposición

Sea  $\hat{E}$  base de  $E$ . Dos formas cuadráticas  $\hat{q}$  y  $\hat{q}'$  con matrices  $M_{\hat{E}}(\hat{q}) = A$ ,  $M_{\hat{E}}(\hat{q}') = A'$  son linealmente equivalentes, si y solo si existe  $P$  matriz no singular tal que  $A = P^t A' P$ .

Demostración:

Sea  $\hat{f} \in GL(\hat{E})$  tal que  $\hat{f}^\#(\hat{q}') = \hat{q}$ . Las ecuaciones de  $\hat{f}$  en el sistema de coordenadas  $(x_i)$  inducido por  $\hat{E}$  es de la forma:

$$P \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde  $P$  es una matriz cuadrada no singular. Escribiendo:

$$\hat{q}' = (x'_0, \dots, x'_n) A' \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \text{la composición } q \circ f \text{ se obtiene sustituyendo}$$

en la expresión de  $\hat{q}'$  anterior las  $x'_j$  en función de las  $x_i$  por medio de (1), y queda:

$$\hat{q} = \hat{f}^\#(\hat{q}') = (x_0, \dots, x_n) P^t A' P \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{así } M_{\hat{E}}(\hat{q}) = A = P^t A' P$$

El recíproco se prueba análogamente.

Desde el punto de vista analítico formal, dos formas cuadráticas  $\hat{q} = \sum_{i \leq j} q_{ij} x_i x_j$  y  $\hat{q}' = \sum_{i \leq j} q'_{ij} x'_i x'_j$  son linealmente equivalentes, cuando existe un cambio lineal de coordenadas  $x'_i = \sum_{j=0}^n p_{ij} x_j$   $i=0, \dots, n$  de manera que la sustitución formal de las  $x'_i$  en función de las  $x_j$  a través del cambio de coordenadas en la expresión de  $q'$  da lugar a la expresión analítica de  $q$ .

Si se trata de equivalencia proyectiva de cuádricas el criterio es análogo si se hace caso omiso de las constantes multiplicativas no nulas.

### 3.1.8 Corolario

Dos formas cuadráticas  $\hat{q}$  y  $\hat{q}'$  de  $\hat{E}$  son linealmente equivalentes si y solo si existe  $\Lambda$  matriz simétrica,  $\hat{\xi}$  y  $\hat{\xi}'$  bases de  $\hat{E}$  tales que  $M_{\hat{\xi}}(\hat{q}) = M_{\hat{\xi}'}(\hat{q}') = \Lambda$ .

Demostración

Se obtiene de forma inmediata a partir de 1.4.2 y el criterio analítico de equivalencia lineal 3.1.6

### 3.1.9 Corolario

Dos formas cuadráticas en  $\hat{E}$  linealmente equivalentes, tienen el mismo rango

Demostración:

Si  $\Lambda$  es una representación matricial común para las formas cuadráticas  $q$  y  $q'$ , es  $\text{rg } \hat{q} = \text{rg } \Lambda = \text{rg } \hat{q}'$ .

## 3.2 Bases ortogonales. Representación matricial diagonal

La primera aproximación a la resolución del problema de clasificación que nos ocupa, consiste como es habitual en la obtención de representaciones analíticas reducidas respecto a sistemas de coordenadas adecuadamente elegidos. En éste epígrafe se probará la existencia de representación matricial diagonal para una forma cuadrática

### 3.2.1 Definición

Un sistema  $(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_r)$  de vectores de  $\hat{E}$  se denomina sistema ortogonal (respecto a  $\hat{q}$ ) si  $\hat{u}_i \perp \hat{u}_j$  para cada  $i \neq j$ . Si el sistema es además base de  $\hat{E}$ , se denomina base ortogonal

La existencia de bases ortogonales queda garantizada en el siguiente

### 3.2.2 Teorema

Fijada la forma cuadrática  $\hat{q}$  en  $\hat{E}$ , existe  $(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_n)$  base ortogonal.

Se hace por inducción sobre la dimensión  $n+1$  del espacio vectorial  $\hat{E}$ :

Si  $\dim \hat{E} = 1$  el resultado es evidente

Supongase  $\dim \hat{E} = n+1$  ( $n > 0$ ). Si  $\hat{q}=0$  entonces por 1.1.5,  $\hat{q}=0$  y cualquier base de  $\hat{E}$  es ortogonal. Si  $\hat{q} \neq 0$ , existe  $\hat{u}_0 \in \hat{E}$  con  $\hat{q}(\hat{u}_0) \neq 0$ , y  $\hat{q}^*(\hat{u}_0)$  es una forma lineal no nula (pues  $(\hat{q}^*(\hat{u}_0)/\hat{u}_0) = \hat{q}(\hat{u}_0) \neq 0$ ) cuyo hiperplano anulador  $\hat{H} = \hat{u}_0^\perp$  no contiene al vector  $\hat{u}_0$ .

Considerese la forma cuadrática  $\hat{q}/\hat{H}:\hat{H} \ni \hat{a} \mapsto \hat{q}(\hat{a}) \in K$ , por 1.1.8 su forma polar es  $\hat{q}/\hat{H},\hat{H} = \hat{q}_{\hat{H}}$ . Como  $\dim H = n < n+1$ , aplicando la hipótesis de inducción se deduce la existencia de una base ortogonal  $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$  para la forma cuadrática  $\hat{q}/\hat{H}$ , y es evidentemente sistema ortogonal respecto a  $\hat{q}$ . Como  $\hat{H} = \hat{u}_0^\perp$  es  $\hat{u}_0 \perp \hat{u}_i$  para  $i=1, \dots, n$ , y así como  $\hat{u}_0 \notin \hat{H}$ ,  $(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_n)$  es base ortogonal de  $\hat{E}$  respecto a  $\hat{q}$ .

### 3.2.3 Corolario

Sea  $\hat{q}$  forma cuadrática no nula de  $\hat{E}$  y  $q = [\hat{q}]$ . Existe entonces un sistema de coordenadas  $(x_i)$  en  $E$  de manera que la forma cuadrática  $\hat{q}$  se escribe  $\hat{q} = \lambda_0 x_0^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ . La ecuación de la cuádrica respecto al sistema  $(x_i)$  será  $\lambda_0 x_0^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 0$ .

Demostración:

Sea  $(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_n)$  base ortogonal de  $\hat{E}$  respecto a  $\hat{q}$ . Entonces  $\hat{q}(\hat{u}_i, \hat{u}_j) = 0$  si  $i \neq j$  y  $q(\hat{u}_i, \hat{u}_i) = \lambda_i$   $i=0, \dots, n$ . La matriz de  $\hat{q}$  es por tanto de la forma  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ . El resultado se deduce ahora de 1.3.4

### 3.2.4 Definición

Una base  $(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  de  $\hat{E}$  se dice ortonormal (respecto a la forma cuadrática  $\hat{q}$ ), si es base ortogonal, y  $\hat{q}(\hat{e}_j) = \lambda_j$ , siendo  $\lambda_j = +1, -1$ , ó  $0$ . La base ortonormal  $(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  se dice bien ordenada si todos los  $\hat{e}_j$  tales que  $\hat{q}(\hat{e}_j) = -1$  corresponden a los primeros elementos de la base, y los  $\hat{e}_j$  con  $q(\hat{e}_j) = 0$  corresponden a los últimos, es decir:

$$(\hat{q}(\hat{e}_0), \dots, \hat{q}(\hat{e}_n)) = (-1, \dots, -1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

### 3.2.5 Corolario

Si  $K = \mathbb{R}$  ó  $K = \mathbb{C}$ , el espacio vectorial  $\hat{E}$  admite una base ortonormal respecto a cualquier forma cuadrática  $\hat{q}$ .

En el caso complejo, la base ortonormal  $(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  puede tomarse de forma que  $\hat{q}(\hat{e}_j) = 0$  ó  $1$ .

demostración

Supongase  $K=\mathbb{R}$ . Por 3.2.2 existe una base ortogonal de  $\hat{E}$  ( $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_n$ ) respecto a  $\hat{q}$  con  $\hat{q}(\hat{u}_j) = \lambda_j$ . Es fácil ordenar adecuadamente los elementos de la base para conseguir que

$$\hat{q}(\hat{u}_i) = \lambda_i < 0 \quad \text{para } i=0, \dots, \nu-1$$

$$\hat{q}(\hat{u}_j) = \lambda_j > 0 \quad \text{para } j=\nu, \dots, \rho-1$$

$$\hat{q}(\hat{u}_k) = \lambda_k = 0 \quad \text{para } k=\rho, \dots, n.$$

Tomando:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} \hat{u}_i \quad \text{para } i=0, \dots, \nu-1, \text{ es } \hat{q}(\hat{e}_i) = -1$$

$$\hat{e}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \hat{u}_j \quad \text{para } j=\nu, \dots, \rho-1, \text{ es } \hat{q}(\hat{e}_j) = 1$$

$$\hat{e}_k = \hat{u}_k \quad \text{para } k=\rho, \dots, n, \text{ es } \hat{q}(\hat{e}_k) = 0$$

y la base  $(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  es base ortonormal bien ordenada.

En el caso  $K=\mathbb{C}$ , utilizando un procedimiento análogo puede conseguirse una base ortonormal  $(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  con  $\hat{q}(\hat{e}_j) = 1$  para  $j=0, \dots, \rho-1$  y  $\hat{q}(\hat{e}_k) = 0$  para  $k=\rho, \dots, n$ .

### 3.2.6 Corolario

Supongase  $\hat{E}$  espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los complejos:

- i) Dos formas cuadráticas de  $E$  son linealmente equivalentes si y solo si tienen el mismo rango
- ii) Dos cuádricas en  $E = P(\hat{E})$  son proyectivamente equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

Demostración:

i) Si  $\hat{q}$  y  $\hat{q}'$  son formas cuadráticas en  $\hat{E}$  con el mismo rango  $\rho$ , por 3.2.5 existen sistemas de coordenadas lineales  $(x_i), (x'_i)$  tales que  $q = x_0^2 + \dots + x_{\rho-1}^2$ ,  $q' = x'_0{}^2 + \dots + x'_{\rho-1}{}^2$ . Por 3.1.8 las formas cuadráticas son linealmente equivalentes.

Recíprocamente, si  $\hat{q}$  y  $\hat{q}'$  son linealmente equivalentes, por 3.1.9 tienen el mismo rango.

ii) Se prueba de forma inmediata a partir de i):

Si  $q = [\hat{q}]$  y  $q' = [\hat{q}']$  se verifica:

$$q \text{ proy. eq. a } q' \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ con } \hat{q} \text{ lin eq. a } \lambda \hat{q}' \Leftrightarrow \text{rg } q = \text{rg}(\lambda \hat{q}') = \text{rg } \hat{q}' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{rg } q = \text{rg } q'.$$

El espacio vectorial  $E$  y el proyectivo  $E=P(\hat{E})$  están definidos sobre el cuerpo  $R$  de los números reales.

Establezcamos algunos conceptos preliminares

### 3.3.1 Definición

Sea  $q$  una forma cuadrática de  $\hat{E}$  y  $\hat{F}$  subespacio vectorial de  $\hat{E}$ .

- i) Se dice que  $\hat{q}$  es definida positiva en  $\hat{F}$  si  $\hat{q}(\hat{x}) > 0 \quad \forall \hat{x} \in \hat{F} - \{0\}$
- ii)  $\hat{q}$  es definida negativa en  $\hat{F}$  si  $\hat{q}(\hat{x}) < 0 \quad \forall \hat{x} \in \hat{F} - \{0\}$
- iii)  $\hat{q}$  es nula en  $\hat{F}$  si  $\hat{q}(\hat{x}) = 0 \quad \forall \hat{x} \in \hat{F}$
- iv)  $\hat{q}$  es definida en  $\hat{F}$  si es definida positiva ó negativa en  $\hat{F}$
- v)  $\hat{q}$  es definida, definida positiva, ó definida negativa, si lo es en  $\hat{E}$ .

### 3.3.2 Ejemplos

- a) En  $P_n(R)$   $\hat{q}_0 = x_0^2 + \dots + x_n^2$  es definida positiva, y  $\hat{q}_{n+1} = -\hat{q}_0$  es definida negativa
- b) En  $P_3(R)$  la forma cuadrática  $\hat{q}_1 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  no es definida, sin embargo, es definida positiva en el subespacio  $(x_0=0)$  y definida negativa en la recta vectorial  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

### 3.3.3 Comentarios y notaciones

Si  $\hat{q}$  es una forma cuadrática en  $\hat{E}$ , aplicando el corolario 3.2.5 se deduce la existencia en  $\hat{E}$  de una base ortonormal bien ordenada  $(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$  y la expresión analítica de  $\hat{q}$  en el correspondiente sistema de coordenadas  $(x_i)$  es

$$\hat{q} = - \sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2 \quad (1)$$

Denotando por  $\hat{E}^+ = \langle \hat{e}_0, \dots, \hat{e}_{\nu-1} \rangle$ ,  $\hat{E}^- = \langle \hat{e}_{\nu}, \dots, \hat{e}_{\rho-1} \rangle$ ,  $E^0 = \langle \hat{e}_{\rho}, \dots, \hat{e}_n \rangle$  se ve que:

- $\hat{q}$  es definida negativa en  $\hat{E}^-$  y  $\dim \hat{E}^- = \nu$ .
- $\hat{q}$  es definida positiva en  $E^+$  y  $\dim E^+ = \rho - \nu$ .
- $\hat{q}$  es nula en  $\hat{E}^0$  y  $\dim \hat{E}^0 = n+1 - \rho$ .

En estas condiciones se tiene el siguiente resultado:

### 3.3.4 Proposición

- i)  $\hat{E}^0 = \text{rad } \hat{q}$
- ii) Cualquier sistema  $(x^-, x^+, x^0)$  con  $\hat{x}^\alpha \in E^\alpha$  ( $\alpha = -, +, 0$ ) es un sistema ortogonal



demostración

i) Nótese que para  $i \geq 0$ ,  $\hat{e}_{\rho+i} \in \hat{E}^\perp = \langle \hat{E} \rangle^\perp = \hat{E}^\perp = \text{rad } \hat{q}$ , por ser  $\hat{E}$  base ortogonal y  $\hat{q}(\hat{e}_{\rho+i})=0$ .

Por otra parte  $\dim(\text{rad } \hat{q})=n+1-\rho$  (por 2.1.5 ii)) con lo que  $(\hat{e}_\rho, \dots, \hat{e}_n)$  es base de  $\text{rad } \hat{q}$ .

ii) es inmediato a partir de la ortogonalidad de la base  $\hat{E}$ .

### 3.3.5 Observación

El rango  $\rho$  de la forma cuadrática indica el número de sumandos de su expresión reducida (1) de 3.3.3. Probaremos ahora que el número de sumandos negativos no depende más que de la forma cuadrática, y no de la base ortonormal elegida

### 3.3.6 Definición

Sea  $\hat{q}$  una forma cuadrática en  $\hat{E}$ . Se denomina índice de  $\hat{q}$  al número  $\text{ind}(\hat{q})=\nu = \max \{ \dim \hat{F} / \hat{F} \subset \hat{E}, \text{ y } \hat{q} \text{ es definida negativa en } \hat{F} \}$ . Nótese que  $0 \leq \text{ind}(\hat{q}) \leq n+1$

### 3.3.7 Teorema

Sea  $\nu_0$  el índice de la forma cuadrática  $\hat{q}$  de  $E$ . Si  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  son las

coordenadas correspondientes a una base ortonormal bien ordenada cualquiera, entonces  $\hat{q} = -\sum_{i=1}^{\nu_0} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu_0+1}^n x_{j-1}^2$ .

Demostración:

Sea  $\hat{E}$  una base ortonormal bien ordenada de  $\hat{E}$ , y  $\hat{E}^-, \hat{E}^+, \hat{E}^0$  como en 3.3.3. Probemos que  $\nu = \nu_0$ .

En efecto, como  $\dim \hat{E}^- = \nu$  y  $\hat{q}$  es definida negativa en  $\hat{E}^-$  se deduce por la definición de  $\nu_0$  que  $\nu_0 \geq \nu = \dim \hat{E}^-$ .

Por otra parte, si  $\hat{q}$  es definida negativa en  $\hat{F} \subset \hat{E}$ , probemos que  $\dim \hat{F} \leq \nu$ , con lo cual será  $\nu_0 \leq \nu$ . En efecto:

Por 3.3.4 ii) cada vector  $\hat{x}$  de  $\hat{E}$  se descompone de forma única en suma  $\hat{x} = \hat{x}^- + \hat{x}^+ + \hat{x}^0$  con  $\hat{x}^\alpha \in \hat{E}^\alpha$  ( $\alpha = -, +, 0$ ), y la aplicación

$\hat{E} \ni \hat{x} \mapsto \hat{x}^- \in \hat{E}^-$  es una proyección lineal. Si  $\hat{F} \subset \hat{E}$  y  $\hat{q}$  es definida negativa en  $\hat{F}$ , probemos que  $\hat{F} \ni \hat{x} \mapsto \hat{x}^- \in \hat{E}^-$  es inyectiva: Si  $\hat{x} \in \hat{F}$  y  $\hat{x}^- = 0$  entonces  $\hat{x} = \hat{x}^+ + \hat{x}^0$  y como  $\hat{x}^+ \perp \hat{x}^0$  se verifica

$\hat{q}(\hat{x}) = \hat{q}(\hat{x}^+) + \hat{q}(\hat{x}^0) = q(x^+) \geq 0$ , y como  $q$  es definida negativa en  $F$  es necesariamente  $\hat{q}(\hat{x})=0$  y  $\hat{x}=0$ . De ésta forma es  $\dim \hat{F} \leq \dim \hat{E}^- = \nu$ .

De aquí se deduce el siguiente teorema de clasificación para formas cuadráticas reales:

### 3.3.8 Teorema

Dos formas cuadráticas en  $E$  son linealmente equivalentes si y solo si tienen el mismo rango y el mismo índice.

Demostración:

Si  $\nu$  y  $\rho$  son el índice y el rango comunes de las formas cuadráticas  $\hat{q}$  y  $\hat{q}'$ , entonces por 3.3.7 y 3.3.5 existen en  $\hat{E}$  sistemas de coordenadas  $(x_i)$ ,  $(x'_i)$  de forma que:

$$q = - \sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2, \quad \hat{q}' = - \sum_{i=1}^{\nu} x'_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x'_{j-1}^2$$

Por 3.1.8, las formas cuadráticas son linealmente equivalentes.

Recíprocamente:

Supongase  $\hat{q}$  y  $\hat{q}'$  formas cuadráticas linealmente equivalentes. Existe entonces  $\hat{f} \in GL(\hat{E})$  tal que  $\hat{f}^{\#}(\hat{q}') = \hat{q}$  (es decir  $\hat{q}' \cdot \hat{f} = \hat{q}$ ). Se prueba trivialmente que si  $\hat{q}$  es definida negativa sobre un subespacio  $\hat{F}$  de  $\hat{E}$ ,

entonces  $\hat{q}'$  también lo es sobre  $\hat{f}(\hat{F})$ . En particular se deduce que

si  $\hat{F}$  tiene dimensión máxima  $\dim \hat{F} = \text{ind}(\hat{q})$  entonces es

$$\text{ind}(\hat{q}) = \dim \hat{F} = \dim \hat{f}(\hat{F}) \leq \text{ind}(\hat{q}')$$

De forma análoga se prueba que  $\text{ind}(\hat{q}') \leq \text{ind}(\hat{q})$ .

Los rangos de  $q$  y  $q'$  coinciden en virtud de 3.1.9

### 3.3.9 Observaciones:

a) El teorema 3.3.8 se puede enunciar también diciendo que fijado en  $\hat{E}$  el sistema de coordenadas  $(x_i)$ , entonces la familia de formas cuadráticas:  $\hat{q}_\nu^\rho = - \sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2$  con  $0 \leq \rho \leq n+1$ ,  $0 \leq \nu \leq \rho$

describe de forma biunívoca todos los tipos de formas cuadráticas en  $\hat{E}$ : es decir, si  $\hat{q}$  es forma cuadrática en  $\hat{E}$  de rango  $\rho$  e índice  $\nu$ , la forma cuadrática  $\hat{q}_\nu^\rho$  es la única linealmente equivalente a  $\hat{q}$  de la familia anterior.

b) En buena parte de la bibliografía, al índice  $\nu$  de la forma cuadrática  $q$  se denomina índice de negatividad, y si  $\rho = \text{rg } \hat{q}$ ,  $\rho - \nu$  se denomina índice de positividad que viene definido de forma intrínseca por  $\rho - \nu = \max \{ \dim \hat{F} / \hat{F} < \hat{E}, \text{ y } q \text{ es definida positiva en } \hat{F} \}$ .

A la pareja  $(\nu, \rho - \nu)$  se denomina *signatura* de la forma cuadrática.

La *signatura* es, en virtud de 3.3.8 el invariante lineal completo para la clasificación lineal de formas cuadráticas.

### 3.4 Clasificación proyectiva de las cuádricas reales.

$E = P(\hat{E})$  es un espacio proyectivo sobre el cuerpo  $R$  de los números reales.

Para establecer el concepto de índice (de Witt) de una cuádrica (que junto con el rango determina un sistema completo de invariantes) se precisa del siguiente lema técnico:

#### 3.4.1 Lema

Sea  $\hat{q}$  una forma cuadrática en  $\hat{E}$  y  $\lambda \in R - \{0\}$ . Entonces:

- a) si  $\lambda > 0$  es  $\text{Ind}(\lambda \hat{q}) = \text{Ind}(\hat{q})$
- b) si  $\lambda < 0$  es  $\text{Ind}(\lambda \hat{q}) = \text{rg}(\hat{q}) - \text{Ind}(\hat{q})$

Demostración:

Llamando  $\rho = \text{rg}(\hat{q})$  y  $\nu = \text{Ind}(\hat{q})$ , por 3.3.7 existe un sistema de coordenadas  $(x_i)$  en  $E$  tal que:

$$\hat{q} = - \sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2 \quad \text{y por tanto } \lambda \hat{q} = - \sum_{i=1}^{\nu} \lambda x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} \lambda x_{j-1}^2 \quad (1)$$

Si  $\lambda > 0$  tomando  $y_j = \sqrt{\lambda} x_j$   $j=0, \dots, n$  se tiene sustituyendo en (1):

$$\hat{q} = - \sum_{i=1}^{\nu} y_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} y_{j-1}^2 \quad \text{Por tanto } \text{Ind}(\lambda \hat{q}) = \nu.$$

Si  $\lambda < 0$  se toma  $y_j = \sqrt{-\lambda} x_j$   $j=0, \dots, n$ , y se tiene sustituyendo en (1):

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^{\nu} y_{i-1}^2 - \sum_{j=\nu+1}^{\rho} y_{j-1}^2 \quad \text{y tiene obviamente índice } \rho - \nu.$$

#### 3.4.2 Definición

Se llama índice (de Witt) de la cuádrica  $q = [\hat{q}]$  al número  $\text{Ind}(q) = \min(\text{Ind}(\hat{q}), \text{rg}(\hat{q}) - \text{Ind}(\hat{q}))$ .

#### 3.4.3 Observación

En virtud del lema 3.4.1 el índice de la cuádrica  $q = [\hat{q}]$  no depende de la forma cuadrática utilizada para definirla ya que para  $\lambda < 0$  se tiene:  $(\text{Ind}(\lambda \hat{q}), \text{rg}(\lambda \hat{q}) - \text{Ind}(\lambda \hat{q})) = (\text{rg}(\hat{q}) - \text{Ind}(\hat{q}), \text{Ind}(\hat{q}))$ .

Si  $\lambda > 0$  es  $\text{Ind}(\hat{q}) = \text{Ind}(\lambda \hat{q})$ , y la conclusión se obtiene de forma trivial.

#### 3.4.4 Teorema de Clasificación

Dos cuádricas  $q$  y  $q'$  de  $E$  son proyectivamente equivalentes si y solo si tienen el mismo índice y el mismo rango.

Demostración:

Sea  $q = [\hat{q}]$ ,  $q' = [\hat{q}']$  dos cuádricas de  $E$ . Si  $\text{rg } q = \text{rg } q'$  y  $\text{Ind}(q) = \text{Ind}(q')$ , por el lema 3.4.1, es posible suponer— quizás cambiando el signo a

son linealmente equivalentes, y por tanto las cuádricas  $q$  y  $q'$  son proyectivamente equivalentes.

Recíprocamente, si  $q = [\hat{q}]$  y  $q' = [\hat{q}']$  son proyectivamente equivalentes por 3.1.5 existe  $\lambda \in R - \{0\}$  tal que  $\hat{q}$  es linealmente equivalente a  $\lambda \hat{q}'$  y por 3.3.8 se tiene  $\rho = \text{rg}(\hat{q}) = \text{rg}(\lambda \hat{q}')$ ,  $\text{Ind}(\hat{q}) = \text{Ind}(\lambda \hat{q}') = \nu$ . Así  $\text{Ind}(q) = \text{Ind}(q') = \min(\nu, \rho - \nu)$ , pues  $q' = [Hq]$ .

### 3.4.5 Comentarios

Todos los tipos de cuádricas en  $P_n(R)$  pueden describirse por la familia

$$\hat{q}_\nu^\rho = -\sum_{i=1}^{\nu} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2 \quad \text{con } 1 \leq \rho \leq n+1 \quad 0 \leq \nu \leq \frac{\rho}{2}$$

donde  $\nu$  es justamente el índice de la cuádrica y  $\rho$  su rango

En los ejemplos 1.2.5 se describen todos los tipos correspondientes a  $P_1(R)$  y  $P_2(R)$ .

Describamos los tipos de cuádricas en  $P_3(R)$ . Dejamos al lector la tarea de interpretar los nombres y hacer los dibujos sobre un modelo afin adecuadamente elegido:

| Range      | Indice    | Ecuación                             | Nombre                                |
|------------|-----------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| $\rho = 1$ | $\nu = 0$ | $x_0^2 = 0$                          | Plano doble                           |
| $\rho = 2$ | $\nu = 0$ | $x_0^2 + x_1^2 = 0$                  | par de planos imaginarios             |
| $\rho = 2$ | $\nu = 1$ | $-x_0^2 + x_1^2 = 0$                 | par de planos reales                  |
| $\rho = 3$ | $\nu = 0$ | $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$          | cono imaginario                       |
| $\rho = 3$ | $\nu = 1$ | $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$         | cono real                             |
| $\rho = 4$ | $\nu = 0$ | $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  | cuádrica propia imaginaria (euclidea) |
| $\rho = 4$ | $\nu = 1$ | $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ | cuádrica propia real no reglada       |
| $\rho = 4$ | $\nu = 2$ | $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ | cuádrica propia reglada               |

#### 4. ESPACIOS VECTORIALES METRICOS. CLASIFICACION

Una forma cuadrática  $q$  induce en el espacio vectorial  $E$  en donde está definida una estructura adicional ya implícitamente estudiada en epígrafes precedentes. Explicitaremos inicialmente este estudio por medio del concepto de espacio vectorial métrico, con idea de crear un contexto adecuado para analizar las geometrías inducidas por una forma cuadrática y por una cuádrica.

##### 4.1 Espacio vectorial métrico. Sumas ortogonales

###### 4.1.1 Definición

Un espacio vectorial métrico es una pareja  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$  donde  $\hat{E}$  es un espacio vectorial y  $\hat{q}$  es una forma cuadrática en  $\hat{E}$ .

La forma polar  $\hat{Q}$  de  $\hat{q}$  (véase 1.1.6) se denomina producto escalar en  $\hat{E}$ , y escribimos para  $\hat{a},\hat{b}\in\hat{E}$  :  $\hat{Q}(\hat{a},\hat{b})=(\hat{a}/\hat{b})$ .

###### 4.1.2 Convenio

Haremos frecuentemente referencia a los invariantes geométricos de la forma cuadrática  $\hat{q}$  como invariantes geométricos del espacio vectorial métrico  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$ , así escribiremos  $\text{rg } \hat{E}$ ,  $\text{Ind } \hat{E}$ ,  $\text{rad } \hat{E}$  ...etc. para referirnos a los correspondientes conceptos relativos a  $\hat{q}$ .

###### 4.1.3 Definición

El espacio vectorial métrico  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$  induce sobre cada subespacio vectorial  $\hat{F}$  de  $\hat{E}$  una estructura métrica  $\hat{F}=(\hat{F},\hat{q}_{\hat{F}})$ , donde  $\hat{q}_{\hat{F}}$  es la restricción de  $\hat{q}$  a  $\hat{F}$ . El producto escalar en  $\hat{F}$  viene entonces definido también por restricción:  $\hat{F},\hat{F}\ni(\hat{a},\hat{b})\mapsto(\hat{a}/\hat{b})\in K$ . (Véase 1.1.8)

###### 4.1.4 Definición

Un espacio vectorial métrico  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$  se dice no singular, si la forma cuadrática  $\hat{q}$  es no degenerada, es decir,  $\text{rad } \hat{E} = 0$ .

Más genetal : Un subespacio  $\hat{F}$  de  $\hat{E}$  se dice no singular si

$\text{rad } \hat{F} = \{\hat{a}\in\hat{F} / (\hat{a}/\hat{x})=0 \text{ para todo } \hat{x}\in\hat{F}\} = \hat{F}\cap\hat{F}^{\perp}$  es idénticamente nulo.

Si todos los vectores de  $\hat{F}$  son isotropos ( $\hat{q}(\hat{x})=0$  para todo  $\hat{x}\in\hat{F}$ ) se dice que  $\hat{F}$  es subespacio isótropo. En este caso es  $\text{rad } \hat{F} = \hat{F}$ .

###### 4.1.5 Definición

i) Dos subconjuntos del espacio vectorial métrico  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$ ,  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  se dicen ortogonales, y escribimos  $\hat{A}\perp\hat{B}$ , si  $\hat{a}\perp\hat{b}$  para todo  $\hat{a}\in\hat{A}$  y todo  $\hat{b}\in\hat{B}$ .

ii) Supongase  $\hat{E}=\hat{U}_1\oplus\cdots\oplus\hat{U}_r$ . Si  $\hat{U}_i\perp\hat{U}_j$  para todo  $i\neq j$  escribimos

$E=U_1\perp\cdots\perp U_r$ . Se dice entonces que  $\hat{E}$  se descompone en suma ortogonal

de los subespacios  $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_r$ .

#### 4.1.6 Comentario

La existencia de una base ortogonal  $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$  para el espacio vectorial métrico  $\hat{E}=(\hat{E}, \hat{q})$  establecida en 3.2.2 garantiza una descomposición de  $\hat{E}$  en suma ortogonal de rectas vectoriales de la forma:

$$E = \langle \hat{u}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \hat{u}_r \rangle$$

El producto escalar en un espacio vectorial métrico descompuesto en suma ortogonal de la forma  $\hat{E} = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$  adquiere una expresión analítica sencilla en función de las componentes de la descomposición, tal como muestra el siguiente lema cuya demostración es elemental:

#### 4.1.7 Lema

Si  $\hat{E}$  es espacio vectorial métrico y  $\hat{E} = \hat{U}_1 \oplus \dots \oplus \hat{U}_r$ , entonces para

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^r \hat{x}_i \quad \hat{y} = \sum_{j=1}^r \hat{y}_j \quad \text{con } \hat{x}_i, \hat{y}_i \in \hat{U}_i \quad \text{se verifica:}$$

$$(\hat{x}/\hat{y}) = \sum_{i=1}^r (\hat{x}_i/\hat{y}_i)$$

#### 4.1.8 Proposición

Sea  $E$  un espacio vectorial métrico:

- i) Si  $\hat{E} = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ , es  $\text{rad } \hat{E} = \text{rad } \hat{U}_1 \oplus \dots \oplus \text{rad } \hat{U}_r$
- ii) En particular si  $\hat{U}$  es subespacio no singular de  $\hat{E}$ , se tiene la descomposición  $\hat{E} = \hat{U} \oplus \hat{U}^\perp$ . Por otra parte si además  $\hat{E}$  es no singular, entonces  $\hat{U}^\perp$  es no singular.

Demostración:

Probemos primero que  $\text{rad } \hat{E} = \text{rad } \hat{U}_1 + \dots + \text{rad } \hat{U}_r$ :

- i) Si  $\hat{x} \in \text{rad } \hat{E}$ , supongase  $\hat{x} = \sum_{i=1}^r \hat{x}_i$  con  $\hat{x}_i \in \hat{U}_i$ , utilizando 4.1.7 es para todo  $\hat{u}_i \in \hat{U}_i$   $(\hat{x}_i/\hat{u}_i) = (\hat{x}/\hat{u}_i) = 0$  (pues  $\hat{x} \in \text{rad } \hat{E}$ ). Así  $\hat{x}_i \in \text{rad } \hat{U}_i$  y  $\text{rad } \hat{E} \subset \text{rad } \hat{U}_1 + \dots + \text{rad } \hat{U}_r$ . La otra inclusión se prueba de forma análoga. Por otra parte como  $\text{rad } \hat{U}_i \subset \hat{U}_i$  y  $\hat{E} = \hat{U}_1 \oplus \dots \oplus \hat{U}_r$  se deduce inmediatamente la ortogonalidad de la suma de radicales.
- ii) Si  $\hat{U}$  es subespacio no singular de  $\hat{E}$ , es  $\text{rad } \hat{U} = \hat{U} \cap \hat{U}^\perp = 0 = \hat{U} \cap \text{rad } \hat{E}$ . Por la fórmula de dimensiones 2.3.7 se deduce que  $\dim \hat{U} + \dim \hat{U}^\perp = \dim \hat{E}$  y así es  $\hat{E} = \hat{U} \oplus \hat{U}^\perp$ . Si además  $\text{rad } \hat{E} = \{0\}$ , por i) se tiene:  $\{0\} = \text{rad } \hat{U} \oplus \text{rad } \hat{U}^\perp$ . En particular,  $\text{rad } \hat{U}^\perp = \{0\}$ .

#### 4.2 Isometrías

Las aplicaciones naturales entre espacios vectoriales métricos serán aquellas que conservan la estructura vectorial y métrica simultáneamente:

4.2.1 Definición

Sean  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$   $\hat{E}'=(\hat{E}',\hat{q}')$  espacios vectoriales métricos. Un isomorfismo lineal  $\hat{f}:\hat{E}\rightarrow\hat{E}'$  se llama isometría, si  $\hat{f}^*(\hat{q}')=\hat{q}$  (véase 3.1.1 para la definición de  $\hat{f}^*$ ). Si existe una isometría de  $\hat{E}$  en  $\hat{E}'$  se dice que ambos espacios son isométricos.

4.2.2 Proposición

La composición de isometrías es una isometría. En particular la relación de "ser isométricos" es relación de equivalencia.

Demostración:

Vease 3.1.2

4.2.3 Teorema

Sean  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$   $\hat{E}'=(\hat{E}',\hat{q}')$  espacios vectoriales métricos,  $\hat{f}:\hat{E}\rightarrow\hat{E}'$  un isomorfismo lineal, y  $\hat{e}=(\hat{e}_0,\dots,\hat{e}_n)$  base de  $\hat{E}$ . Son entonces equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i)  $\hat{f}$  es isometría
- ii)  $(\hat{f}(\hat{a})/\hat{f}(\hat{b}))=(\hat{a}/\hat{b})$  para todo  $\hat{a},\hat{b}\in\hat{E}$
- iii)  $(\hat{f}(\hat{e}_i)/\hat{f}(\hat{e}_j))=(\hat{e}_i/\hat{e}_j)$  para todo  $i,j=0,\dots,n$

Demostración:

i)  $\Rightarrow$  ii) es consecuencia de 3.1.1 i)

ii)  $\Rightarrow$  iii) es trivial

iii)  $\Rightarrow$  i) : Si  $\hat{x} = \sum_{i=0}^n x_i \hat{e}_i \in \hat{E}$  se tiene:

$$(\hat{f}^*(\hat{q}'))(\hat{x}) = \hat{q}'(\hat{f}(\hat{x})) = \left( \sum_{i=0}^n x_i \hat{f}(\hat{e}_i) / \sum_{j=0}^n x_j \hat{f}(\hat{e}_j) \right) = \sum_{i,j=0}^n (\hat{f}(\hat{e}_i) / \hat{f}(\hat{e}_j)) x_i x_j = \sum_{i,j=0}^n (\hat{e}_i / \hat{e}_j) x_i x_j = (\hat{x} / \hat{x}) = \hat{q}(\hat{x}).$$

4.2.4 Observación

Si los espacios vectoriales métricos  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$   $\hat{E}'=(\hat{E}',\hat{q}')$  tienen la misma dimensión finita y son no singulares, entonces toda aplicación lineal  $\hat{f}:\hat{E}\rightarrow\hat{E}'$  que conserve la estructura métrica ( es decir  $\hat{f}^*(\hat{q}')=\hat{q}$ ) es automáticamente isometría, ya que si  $\hat{f}(\hat{a})=0$ , se verifica  $(\hat{f}(\hat{a})/\hat{f}(\hat{x}))=(\hat{a}/\hat{x})=0$  para todo  $\hat{x}\in\hat{E}$ . En consecuencia  $\hat{a}\in\text{rad } \hat{E} = 0$ .

Establezcamos por último el concepto de suma ortogonal de isometrías:

4.2.5 Definición (proposición)

Sean  $\hat{E}=\hat{U}_1 \oplus \dots \oplus \hat{U}_r$   $\hat{E}'=\hat{U}'_1 \oplus \dots \oplus \hat{U}'_r$  espacios vectoriales métricos descompuestos en suma ortogonal. Sea  $\hat{f}_i:\hat{U}_i\rightarrow\hat{U}'_i$  una isometría para  $i=1,\dots,r$ . Entonces la aplicación:

$$\hat{f}=\hat{f}_1 \oplus \dots \oplus \hat{f}_r: \hat{E} \ni \hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_r \mapsto \hat{f}_1(\hat{x}_1) + \dots + \hat{f}_r(\hat{x}_r) \in \hat{E}'$$

es una isometría, y se denomina suma ortogonal de las  $\hat{f}_i$  ( $\hat{x}_i \in \hat{U}_i$ )

Demostración:

Si  $\hat{x} = \sum_{i=1}^r \hat{x}_i$   $\hat{y} = \sum_{i=1}^r \hat{y}_i$   $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in \hat{U}_i$ , se tiene por 4.1.7 :  
 $(\hat{f}(\hat{x})/\hat{f}(\hat{y})) = (\sum_{i=1}^r \hat{f}_i(\hat{x}_i) / \sum_{j=1}^r \hat{f}_j(\hat{y}_j)) = \sum_{i=1}^r (\hat{f}_i(\hat{x}_i) / \hat{f}_i(\hat{y}_i)) = \sum_{i=1}^r (\hat{x}_i / \hat{y}_i) = (\hat{x} / \hat{y})$

#### 4.2.6 Proposición

Con las mismas hipótesis de la definición anterior, si se tiene

$E'' = U_1' \oplus \dots \oplus U_r'$  y  $\hat{g}_i: U_i' \rightarrow U_i'$  isometría  $i=1, \dots, r$ , es

$$(\hat{g}_1 \oplus \dots \oplus \hat{g}_r)(\hat{f}_1 \oplus \dots \oplus \hat{f}_r) = (\hat{g}_1 \hat{f}_1) \oplus \dots \oplus (\hat{g}_r \hat{f}_r).$$

La demostración es elemental.

### 4.3 Clasificación de espacios vectoriales métricos

La clasificación por la relación de isometría de espacios vectoriales métricos reales y complejos constituye una reinterpretación del correspondiente teorema de clasificación para formas cuadráticas dado en 3.3 y 3.2.6

#### 4.3.1 Teorema

Sean  $\hat{E} = (\hat{E}, \hat{q})$   $\hat{E}' = (\hat{E}', \hat{q}')$  espacios vectoriales métricos sobre el mismo cuerpo  $K$  y con la misma dimensión  $n+1$ :

- i) Si  $K = \mathbb{R}$  los espacios  $\hat{E}$  y  $\hat{E}'$  son isométricos si y solo si tienen el mismo rango e índice
- ii) Si  $K = \mathbb{C}$ , los espacios  $\hat{E}$  y  $\hat{E}'$  son isométricos si y solo si tienen el mismo rango.

Demostración:

i) Sea  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  una isometría. Para probar que  $\text{rg } \hat{E} = \text{rg } \hat{E}'$  y  $\text{Ind } \hat{E} = \text{Ind } \hat{E}'$  debe observarse que  $\hat{f}$  transforma una base ortonormal bien ordenada de  $\hat{E}$  (véase 3.2.4 y 3.2.5) en una base ortonormal bien ordenada de  $\hat{E}'$  con el mismo número de vectores isotropos, y el mismo número de vectores  $\hat{e}$  con  $(\hat{e}/\hat{e}) = -1$ .

Recíprocamente, si  $\text{rg } \hat{E} = \text{rg } \hat{E}' = \rho$ , y  $\text{Ind } \hat{E} = \text{Ind } \hat{E}' = \nu$ , tomando bases ortonormales bien ordenadas  $\hat{E}$  y  $\hat{E}'$  en  $\hat{E}$  y  $\hat{E}'$ , el único isomorfismo lineal  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  tal que  $\hat{f}(\hat{E}) = \hat{E}'$  es una isometría por 4.2.3 iii)

ii) se prueba de forma análoga

Para las cuádricas proyectivas se tiene la siguiente réplica:

#### 4.3.2 Definición

Dos cuádricas  $q$  y  $q'$  definidas sobre los espacios proyectivos  $E$  y  $E'$  se dicen proyectivamente equivalentes si existe  $f$  homografía de  $E$  en  $E'$  tal que  $f^\#(q') = q$  (vease 3.1.3 para la definición de  $f^\#$ )



#### 4.3.3 Proposición

La relación definida en 4.3.2 es relación de equivalencia

Demostración : Véase 3.1.3

#### 4.3.4 Teorema

Sean  $q$  y  $q'$  dos cuádricas definidas en los espacios proyectivos  $E$  y  $E'$  sobre el mismo cuerpo  $K$  y con la misma dimensión  $n$ :

- i) Si  $K=R$  las cuádricas son proyectivamente equivalentes si y solo si  $q$  y  $q'$  tienen el mismo rango e índice
- ii) Si  $K=C$  las cuádricas son proyectivamente equivalentes si y solo si  $q$  y  $q'$  tienen el mismo rango.

Demostración:

Nótese que si  $q=[\hat{q}]$  y  $q'=[\hat{q}']$  se verifica la equivalencia  $q$  proyectivamente equivalente a  $q' \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$  tal que  $(\hat{E}, \hat{q})$  es isométrico a  $(\hat{E}', \lambda \hat{q}')$ .

La conclusión se obtiene ahora inmediatamente de 4.3.1 y de 3.4.1

#### 4.3.5 Modelos Analíticos

Fijado el cuerpo  $K$  (de característica distinta de dos) denotamos:

a)  $K_{(\rho, \nu)}^{n+1} = (P_n(K), q_\nu^\rho)$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq \rho \leq n+1$ ,  $0 \leq \nu \leq \rho$  siendo

$$q = - \sum_{i=1}^{\rho} x_{i-1}^2 + \sum_{j=\nu+1}^{\rho} x_{j-1}^2 \quad (\text{véase 1.1.2, 1.1.4})$$

b)  $K_{(n+1, \nu)}^{n+1} = K_\nu^{n+1}$  para  $0 \leq \nu \leq n+1$ .

#### 4.3.6 Corolario

- i) Los distintos tipos de espacios vectoriales métricos reales de dimensión  $n+1$  vienen dados por la familia  $R_{(\rho, \nu)}^{n+1}$  con  $0 \leq \rho \leq n+1$ ,  $0 \leq \nu \leq \rho$
- ii) Los distintos tipos de espacios vectoriales métricos complejos de dimensión  $n+1$  vienen dados por la familia  $C_{(\rho, 0)}^{n+1}$  con  $0 \leq \rho \leq n+1$ .

Demostración : Véase 4.3.1 y 3.3.9

#### 4.3.7 Definición

Algunos tipos

de espacios vectoriales métricos reales tienen denominaciones especiales, así:

- i) Los de la forma  $R_0^{n+1}$  se denominan euclideos positivos, y están caracterizados por que su forma cuadrática es definida positiva
- ii) Los del tipo  $R_{n+1}^{n+1}$  son los euclideos negativos. Su forma cuadrática es definida negativa
- iii) Los de la forma  $R_1^{n+1}$  se denominan espacios de Lorentz, y tienen interés en la teoría de la relatividad.

Un espacio vectorial métrico real es euclideo (positivo ó negativo) si y solo si no posee vectores isotropos no nulos.

Demostración:

Sea  $\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$  espacio vectorial métrico real. Supongase que existen vectores  $\hat{a},\hat{b}\in\hat{E}$  tales que  $\hat{q}(\hat{a})>0$  y  $\hat{q}(\hat{b})<0$ ; La ecuación de segundo grado en  $\lambda$  :  $\hat{q}(\hat{a}+\lambda\hat{b})=\hat{q}(\hat{a})+2\lambda(\hat{a}/\hat{b})+\lambda^2\hat{q}(\hat{b})=0$  tiene discriminante  $4(a/b)^2-4q(a)q(b)>0$ , y esto implica la existencia de vectores isotropos no nulos. Así, si no existen tales vectores entonces  $\hat{E}$  es necesariamente euclideo.

## 5. GRUPO ORTOGONAL. GRUPO DE UNA CUADRICA

$\hat{E}=(\hat{E},\hat{q})$  denotará un espacio vectorial métrico de dimensión finita  $n+1$  ( $n\geq 0$ ) definido sobre un cuerpo  $K$  de caractristica distinta de dos. Cuando  $\hat{q}$  sea no nula,  $q=[\hat{q}]$  es la cuadratica definida por  $\hat{q}$  en  $E=P(\hat{E})$ .

### 5.1 Ideas preliminares

Estableceremos inicialmente los grupos naturales de transformaciones que inducen una forma cuadrática y una cuadratica, y estudiaremos las relaciones entre ambos grupos en el caso real y comolejo.

#### 5.1.1 Definición

i) Llamamos grupo ortogonal de  $\hat{E}$ , y lo denotamos por  $O(\hat{q})$ ,  $O(\hat{E})$ ,  $O(\hat{E},\hat{q})$  indistintamente, al grupo de las isometrías de  $E$  en si mismo, es decir:

$$O(\hat{q})=\{ \hat{f}\in GL(\hat{E}) / \hat{f}^\#(\hat{q})=\hat{q} \}.$$

ii) Se llama grupo reducido de la cuadratica  $q$  al grupo

$$PO(q)=\{ [\hat{f}] / \hat{f}\in O(\hat{q}) \}.$$

iii) El grupo de la cuadratica  $q$ , es el grupo de las transformaciones proyectivas que dejan invariante la cuadratica, es decir:

$$O(q)=\{ f\in GP(E) / f^\#(q)=q \}$$

Nótese que  $PO(q)$  es subgrupo de  $O(q)$

#### 5.1.2 Proposición

Si  $f\in O(q)$  entonces  $f(im\ q)=im\ q$ . por tanto  $O(q)$  actua sobre  $im\ q$

Demostración

si  $f=[\hat{f}]$  y  $x=[\hat{x}]\in im\ q$  se verifica  $\hat{f}^\#(\hat{q})=\lambda\hat{q}$  para cierto  $\lambda\neq 0$ , y  $\hat{q}(\hat{f}(\hat{x}))=\lambda\hat{q}(\hat{x})=0$ , así  $f(x)=[\hat{f}(\hat{x})]\in im\ q$ .

y complejo:

### 5.1.3 Teorema

Si el cuerpo  $K=C$  ó bien si  $K=R$  y  $2\text{Ind}(\hat{q}) \neq \text{rg}(\hat{q})$  entonces  $\text{PO}(q) = \text{O}(q)$ .

Demostración

Sea  $f = [\hat{f}] \in \text{O}(q)$ . Entonces  $\hat{f}^\#(\hat{q}) = \lambda \hat{q}$  para cierto  $\lambda \neq 0$ . Si existe  $\mu \in K - 0$  con  $\mu^2 = \lambda$ , tomando  $\hat{f}_1 = \frac{1}{\mu} \hat{f}$  queda:

$$\hat{f}_1^\#(\hat{q}) = \left(\frac{1}{\mu} \hat{f}\right)^\# \hat{q} = \frac{1}{\mu^2} (\hat{f}^\# \hat{q}) = \frac{1}{\lambda} \lambda \hat{q} = \hat{q}, \text{ y } \hat{f}_1 \in \text{O}(\hat{q}). \text{ Como } f = [\hat{f}_1] \text{ es } f \in \text{PO}(q)$$

Probemos pues que en las hipótesis del teorema siempre existe el escalar  $\mu$  raíz cuadrada de  $\lambda$ :

Cuando  $K=C$  la afirmación es ciertamente válida

Cuando  $K=R$ , necesariamente  $\lambda > 0$  (por tanto admite raíz cuadrada) ya que si  $\lambda < 0$ , como  $\hat{q}$  y  $\lambda \hat{q}$  son linealmente equivalentes es  $\text{Ind}(q) = \text{Ind}(\lambda q)$  y por el lema 3.4.1 es  $\text{Ind}(\lambda \hat{q}) = \text{rg } \hat{q} - \text{Ind } \hat{q}$ . Así es  $2 \text{Ind } \hat{q} = \text{rg } \hat{q}$  en contradicción con la hipótesis.

Estudiemos ahora el caso:  $2 \text{Ind } \hat{q} = \text{rg } \hat{q}$

### 5.1.4 Lema

Si  $K=R$  y  $2 \text{Ind } \hat{q} = \text{rg } \hat{q}$  entonces  $\hat{E}$  se descompone en suma directa

$$\hat{E} = \hat{U} \oplus \hat{V} \oplus \text{rad } \hat{E}, \text{ donde } \hat{U} \text{ y } \hat{V} \text{ son subespacios isótropos.}$$

Demostración:

Una base ortonormal bien ordenada para  $E$  es de la forma

$$\hat{E} = (\hat{e}_0^-, \dots, \hat{e}_{\nu-1}^-, \hat{e}_0^+, \dots, \hat{e}_{\nu-1}^+, \hat{e}_0^0, \dots, \hat{e}_r^0) \text{ con } (\hat{e}_i^\alpha / \hat{e}_i^\beta) = \alpha, \alpha = -1, 1, 0 \text{ y}$$

por 3.3.4 es  $\text{rad } \hat{E} = \langle \hat{e}_0^0, \dots, \hat{e}_r^0 \rangle$ . Tomando  $\hat{u}_i = \hat{e}_i^- + \hat{e}_i^+$ ,  $\hat{v}_i = \hat{e}_i^- - \hat{e}_i^+$

$i=0, \dots, \nu-1$ , se deduce inmediatamente que  $(\hat{u}_i / \hat{u}_j) = (\hat{v}_i / \hat{v}_j) = 0$  para todo  $i, j=0, \dots, \nu-1$ , y por tanto  $\hat{U} = \langle \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{\nu-1} \rangle$ ,  $\hat{V} = \langle \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{\nu-1} \rangle$

son subespacios isótropos de  $\hat{E}$ . La descomposición de  $\hat{E}$  enunciada es ahora consecuencia de que  $(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{\nu-1}, \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{\nu-1}, \hat{e}_0^0, \dots, \hat{e}_r^0)$  es base.

### 5.1.5 Teorema

Supongase  $K=R$  y  $2 \text{Ind } \hat{q} = \text{rg } \hat{q}$ . Si  $\hat{E} = \hat{U} \oplus \hat{V} \oplus \text{rad } \hat{E}$  es la descomposición del lema anterior entonces:

i) La simetría vectorial  $\hat{\sigma}; \hat{E} \rightarrow \hat{E}$  con base en  $\hat{U}$  y dirección  $\hat{V} \oplus \text{rad } \hat{E}$  verifica  $\hat{\sigma}^\#(\hat{q}) = -\hat{q}$ .

ii) El grupo  $\text{O}(q)$  puede escribirse como unión disjunta

$\text{O}(q) = \text{PO}(q) \cup \sigma \text{PO}(q)$ . Dicho de otra forma,  $\text{PO}(q)$  es subgrupo de  $\text{O}(q)$  con índice dos.

Demostración:

i) Un vector  $\hat{x} \in \hat{E}$  se escribe de forma única como  $\hat{x} = \hat{u} + \hat{v} + \hat{w}$  con  $\hat{u} \in \hat{U}$   $\hat{v} \in \hat{V}$   $\hat{w} \in \text{rad } \hat{E}$ , y se tiene  $\hat{q}(\hat{x}) = (\hat{x}/\hat{x}) = 2(\hat{u}/\hat{v})$ . Como  $\hat{q}(\hat{x}) = \hat{u} - \hat{v} - \hat{w}$ , se verifica  $(\hat{q}^* \hat{q})(\hat{x}) = \hat{q}(\hat{u} - \hat{v} - \hat{w}) = -2(\hat{u}/\hat{v}) = -\hat{q}(\hat{x})$

ii) Sea  $f = [\hat{f}] \in O(q)$ . Entonces  $\hat{f}^* \hat{q} = \lambda \hat{q}$  para cierto  $\lambda \neq 0$ .

si  $\lambda > 0$  por la demostración de 5.1.3 se sigue que  $\hat{f} \in PO(\hat{q})$

si  $\lambda < 0$  tomando  $\hat{f}_1 = \hat{q} \cdot \hat{f}$  se verifica:

$\hat{f}_1^* \hat{q} = (\hat{q} \cdot \hat{f})^* \hat{q} = \hat{f}^* (\hat{q}^* \hat{q}) = \hat{f}^* (-q) = -\hat{f}^* q = (-\lambda)q$ . Como  $-\lambda > 0$ , por lo anterior se concluye que  $f_1 = [\hat{f}_1] = \sigma \cdot f \in PO(q)$  y así  $\sigma f_1 = f \in PO(q)$ .

### 5.2 Teorema de Cartan-Dieudonné

Estudiaremos las simetrías vectoriales de  $\hat{E}$  que son además transformaciones ortogonales (simetrías ortogonales) y probaremos que las simetrías ortogonales respecto a hiperplanos constituyen un sistema generador del grupo ortogonal (Teorema de Cartan-Dieudonné). De forma simultánea se irán analizando las incidencias de estos resultados en la geometría de una cuádrica.

#### 5.2.1 Definición

Una simetría vectorial de  $\hat{E}$  que es además transformación ortogonal, se denomina simetría ortogonal.

#### 5.2.2 Proposición

Sea  $\hat{q} : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$  una simetría vectorial con base  $\hat{B}$  y dirección  $\hat{D}$ . Entonces  $\hat{q}$  es simetría ortogonal si y solo si  $\hat{B} \perp \hat{D}$

Demostración

Por hipótesis es  $\hat{E} = \hat{B} \oplus \hat{D}$ . Fijado  $\hat{b} \in \hat{B}$  y  $\hat{d} \in \hat{D}$  se tiene  $\hat{q}(\hat{b} + \hat{d}) = \hat{b} - \hat{d}$  y

$$\text{por tanto } \hat{q}(\hat{q}(\hat{b} + \hat{d})) = \hat{q}(\hat{b} - \hat{d}) = \hat{q}(\hat{b}) + \hat{q}(\hat{d}) - 2(\hat{b}/\hat{d}) \quad (1)$$

$$\text{Por otra parte: } \hat{q}(\hat{b} + \hat{d}) = \hat{q}(\hat{b}) + \hat{q}(\hat{d}) + 2(\hat{b}/\hat{d}) \quad (2)$$

Comparando (1) y (2) se concluye que

$$\hat{q}(\hat{q}(\hat{b} + \hat{d})) = \hat{q}(\hat{b} + \hat{d}) \iff \hat{b} \perp \hat{d}$$

Esto permite concluir fácilmente la demostración.

#### 5.2.3 Observación

Nótese que si  $\hat{E}$  es no singular, la base  $\hat{B}$  y la dirección  $\hat{D}$  de una simetría ortogonal son subespacios no singulares: De hecho por 5.2.2 se verifica  $\hat{E} = \hat{B} \oplus \hat{D}$  y por 4.1.8,  $\{0\} = \text{rad } \hat{E} = \text{rad } \hat{B} + \text{rad } \hat{D}$ , es decir  $\text{rad } \hat{B} = \text{rad } \hat{D} = \{0\}$

Recíprocamente, si  $\hat{E}$  es no singular, y  $\hat{D}$  es subespacio no singular de  $\hat{E}$ , entonces  $\hat{E} = \hat{D} \oplus \hat{D}^\perp$ , y la simetría vectorial de base  $\hat{B} = \hat{D}^\perp$  y dirección  $\hat{D}$  es simetría ortogonal.

5.2.4 Corolario (definición)

Si  $\hat{a} \in \hat{E}$  es un vector no isotropo, entonces  $\hat{E} = \langle \hat{a} \rangle + \hat{a}^\perp$  y la simetría vectorial  $\hat{\sigma}$  con base  $\hat{H} = \hat{a}^\perp$  y dirección  $\langle \hat{a} \rangle$  es simetría ortogonal. Se le denomina simetría hiperplano.

El siguiente teorema muestra la traducción de este resultado a la geometría de una quadrica:

5.2.5 Teorema

Sea  $a \in E = \text{im } q$  :

i) Si  $\dim E \geq 2$ , la homología armónica  $\sigma$  de centro  $a$  y hiperplano central  $H = a^\perp$  está en el grupo reducido de la quadrica  $PQ(q)$

ii) Si  $E$  es recta proyectiva, la transformación hiperbólica armónica con puntos fijos  $a$  y  $a^\perp$  deja invariante la quadrica.

En particular si  $\text{im } q = \langle c_1, c_2 \rangle$   $c_1 \neq c_2$  es  $[c_1, c_2; a, a^\perp] = -1$  para todo  $a \in \langle c_1, c_2 \rangle$ .

Demostración:

i) Como  $a \in \text{im } q$  es  $a \neq a^\perp = H$ ; Si  $a = [\hat{a}]$  y  $H = P(\hat{H})$  se verifica  $\hat{a}^\perp = \hat{H}$  y  $\hat{E} = \langle \hat{a} \rangle \oplus \hat{H}$ . Por 5.2.4 la simetría vectorial  $\hat{\sigma}$  de base  $\hat{H}$  y dirección  $\langle \hat{a} \rangle$  es simetría ortogonal y  $\sigma = [\hat{\sigma}] \in PQ(q)$ . Nótese que  $H \cup \{a\}$  es el conjunto de puntos fijos para  $\sigma$ , que es por tanto homología de razón  $k$ . Como  $\sigma^2 = \text{id}$  es  $k^2 = 1$  y  $(\sigma \neq \text{id})$   $k = -1$ .

ii) La primera parte se prueba de forma análoga. Para probar la última afirmación basta observar que como  $\sigma(\text{im } q) = \text{im } q$  y  $\sigma \neq \text{id}$ , necesariamente es  $\sigma(c_1) = c_2$ .

El siguiente lema es crucial para la demostración del Teorema de Cartan:

5.2.6 Lema

Sean  $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{E}$  vectores no isotropos con  $\hat{q}(\hat{a}) = \hat{q}(\hat{b})$ . Existe entonces una transformación ortogonal  $\hat{\tau}$ , producto de una ó dos simetrías hiperplano, que aplica  $\hat{a}$  en  $\hat{b}$ .

Demostración:

Como  $(\hat{a}/\hat{a}) - (\hat{b}/\hat{b}) = (\hat{a} + \hat{b}/\hat{a} - \hat{b}) = 0$ , es  $\hat{a} + \hat{b} \in (\hat{a} - \hat{b})^\perp$  y  $\hat{a} - \hat{b} \in (\hat{a} + \hat{b})^\perp$ :

i) Si  $\hat{a} - \hat{b}$  es no isotropo, la simetría hiperplano  $\hat{\sigma}$  con dirección  $\langle \hat{a} - \hat{b} \rangle$  transforma  $\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{b}) + \frac{1}{2}(\hat{a} - \hat{b})$  en  $\hat{\sigma}(\hat{a}) = -\frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{b}) - \frac{1}{2}(\hat{a} - \hat{b}) = \hat{b}$

ii) Si  $\hat{a} + \hat{b}$  es no isotropo, análogamente la simetría hiperplano con dirección  $\langle \hat{a} + \hat{b} \rangle$ ,  $\hat{\sigma}$  transforma  $\hat{a}$  en  $\hat{\sigma}(\hat{a}) = -\hat{b}$ , y la simetría hiperplano  $\hat{\tau}$  con dirección  $\langle \hat{b} \rangle$  transforma  $-\hat{b}$  en  $\hat{\tau}(-\hat{b}) = \hat{b}$ . Así se tiene:

$$\hat{\tau} \cdot \hat{\sigma}(\hat{a}) = \hat{\tau}(-\hat{b}) = \hat{b}.$$

... que no puede darse simultáneamente  $q(a+b)=q(a-b)=0$ ,  
 pues si así fuera, el subespacio  $\langle \hat{a}+\hat{b}, \hat{a}-\hat{b} \rangle$  sería isótropo y en parti-  
 cular  $\hat{q}(\hat{a})=\hat{q}(\hat{b})=0$  en contra de la hipótesis.

### 5.2.7 Teorema (Cartan-Dieudonné)

Si  $\hat{E}$  es no singular, entonces el grupo  $O(\hat{q})$  está generado por las  
 simetrías hiperplano.

Demostración:

Se hace por inducción sobre la dimensión  $n+1$  de  $E$ :

Si  $n=0$  ( $\dim \hat{E}=1$ ) el resultado es trivial, ya que se prueba fácilmente  
 que en este caso  $O(\hat{q})=\{id, -id\}$ , y  $-id$  es simetría hiperplano en  $\hat{E}$ .

Supuesto cierto el resultado para dimensión inferior a  $n+1$ , sea  $E$  de  
 dimensión  $n+1$  y  $\hat{f} \in O(\hat{E})$ :

a) Si existe e vector no isótropo de  $\hat{E}$  con  $\hat{f}(\hat{e})=\hat{e}$ , entonces  $\hat{H}=\langle \hat{e} \rangle^\perp$   
 es hiperplano invariante por  $\hat{f}$  ( $(\hat{x}/\hat{e})=0 \Rightarrow (\hat{f}(\hat{x})/\hat{e})=(\hat{f}(\hat{x})/\hat{f}(\hat{e}))=(\hat{x}/\hat{e})=0$ )  
 Además  $\hat{E}=\langle \hat{e} \rangle \oplus \hat{H}$  y  $\hat{H}$  es no degenerado (por 4.1.8).

Aplicando la hipótesis de inducción a  $\hat{f}_1 = \hat{f}|_{\hat{H}} \in O(\hat{H})$ , se deduce la  
 existencia de simetrías hiperplano  $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_r$  en  $H$  con bases  
 $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_r$  tales que  $\hat{f}_1 = \hat{\tau}_1 \dots \hat{\tau}_r$ . Tomando  $\hat{\sigma}_1 = id_{\langle \hat{e} \rangle} \oplus \hat{\tau}_1$ , se  
 concluye que  $\hat{\sigma}_1$  es simetría hiperplano en  $\hat{E}$  con base  $\hat{H}_1 = \langle \hat{e} \rangle \oplus \hat{L}_1$  y  
 por 4.2.6 es  $\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_r = (id_{\langle \hat{e} \rangle} \oplus \hat{\tau}_1) \dots (id_{\langle \hat{e} \rangle} \oplus \hat{\tau}_r) = id_{\langle \hat{e} \rangle} \oplus (\hat{\tau}_1 \dots \hat{\tau}_r) =$   
 $= id_{\langle \hat{e} \rangle} \oplus \hat{f}_1 = \hat{f}$ .

b) En cualquier otro caso, tomando e vector no isotropo, por el lema  
 5.2.6, existe  $\hat{g} \in O(\hat{q})$  producto de una ó dos simetrías hiperplano  
 con  $\hat{g}(\hat{f}(\hat{e}))=\hat{e}$ , y  $\hat{g} \cdot \hat{f}$  se descompone por a) en producto de simetrías hi-  
 perplano  $\hat{g} \cdot \hat{f} = \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_r$ . Si por ejemplo  $g = \hat{\sigma} \cdot \hat{\tau}$  ( $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$  simetrías hiper-  
 plano) se verifica  $f = \hat{\tau} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_r$ .

### 5.2.8 Nota

Puede probarse que cada  $\hat{f} \in O(\hat{q})$  puede descomponerse en producto de a  
 lo más  $\dim \hat{E}$  simetrías hiperplano. Véase [BE].

### 5.2.9 Corolario

El grupo reducido de la cuadrada  $q$ ,  $PO(q)$  está generado por las homolo-  
 gías armónicas que dejan invariante la cuadrada.

Demostración:

Si  $f \in PO(q)$ , existe  $\hat{f} \in O(\hat{q})$  con  $f = [\hat{f}]$ . por 5.2.7 es  $\hat{f} = \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_r$   
 con  $\hat{\sigma}_1$  simetría hiperplano, así  $f = [\hat{f}] = [\hat{\sigma}_1] \dots [\hat{\sigma}_r]$  y  $[\hat{\sigma}_1]$  es homolo-  
 gía armónica que deja invariante la cuadrada (por 5.2.5)

Como apuntábamos en 5.1.2 el grupo  $O(q)$  actúa sobre  $\text{im } q$ . Se probará que en el caso real ó complejo esta actuación es transitiva sobre el conjunto de puntos no singulares  $\text{im } q - \text{rad } q$ , y también sobre el conjunto de puntos singulares,  $\text{rad } q$ . Esto geoméricamente significa que dos puntos no singulares (resp. singulares) de la cuádrica son equivalentes. Es decir, el estudio geométrico-proyectivo de la cuádrica en uno de sus puntos no singulares, puede hacerse automáticamente extensivo a los demás puntos no singulares de la misma.

### 5.3.1 Definición

Dos puntos  $a, b \in \text{im } q$  se dicen (proyectivamente) equivalentes, si existe  $f \in O(q)$  con  $f(a)=b$ . Esta relación es obviamente de equivalencia.

Probaremos que las clases de equivalencia correspondientes son exactamente  $\text{im } q - \text{rad } q$  y  $\text{rad } q$ . Se requieren algunos resultados previos:

### 5.3.2 Lema

Si  $f \in O(q)$  y  $U$  es subespacio de  $E$ , es  $f(U)^\perp = f(U^\perp)$ . En particular es  $f(\text{rad } q) = \text{rad } q$  y  $f(\text{im } q - \text{rad } q) = \text{im } q - \text{rad } q$ .

Demostración:

Sea  $f = [\hat{f}]$ . Entonces  $\hat{f}^* \hat{q} = \lambda \hat{q}$  para cierto  $\lambda \neq 0$ . Si  $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{E}$ , y  $(\hat{a}/\hat{b}) = 0$  es  $(\hat{f}(\hat{a})/\hat{f}(\hat{b})) = \lambda (\hat{a}/\hat{b}) = 0$ , es decir,  $a \perp b \Leftrightarrow f(a) \perp f(b)$ . Utilizando la biyectividad de  $f$  se verifica:

$$f(a) \in f(U^\perp) \Leftrightarrow a \in U^\perp \Leftrightarrow a \perp u \text{ para todo } u \in U \Leftrightarrow f(a) \perp f(u) \text{ para todo } u \in U \\ \Leftrightarrow f(a) \in f(U)^\perp.$$

Las demás afirmaciones también son inmediatas.

### 5.3.3 Lema

Si  $\hat{a} \in \hat{E}$  es un vector isótropo no nulo,  $\hat{a} \in \text{rad } \hat{E}$ , entonces existe  $\hat{b} \in \hat{E}$  vector isotropo con  $(\hat{a}/\hat{b}) = 1$ .

Demostración:

Como  $\hat{a} \notin \text{rad } \hat{E}$ , existe  $\hat{e} \in \hat{E}$  con  $(\hat{a}/\hat{e}) \neq 0$ . Busquemos en el plano  $\langle \hat{a}, \hat{e} \rangle$  el vector  $\hat{b} = \lambda \hat{a} + \mu \hat{e}$  verificando las condiciones del teorema:

$$(\hat{b}/\hat{b}) = \lambda \mu (\hat{a}/\hat{e}) + \mu^2 (\hat{e}/\hat{e}), \quad (\hat{a}/\hat{b}) = \mu (\hat{a}/\hat{e}) = 1. \text{ se tiene así:}$$

$$\mu = \frac{1}{(\hat{a}/\hat{e})}, \quad \lambda = -\mu^2 (\hat{e}/\hat{e}).$$

### 5.3.4 Observación

Nótese que en el lema anterior el plano vectorial métrico  $\hat{p} = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle$  es no singular, pues la matriz de la forma cuadrática  $\hat{q}_{\hat{p}}$  respecto a la base  $(\hat{a}, \hat{b})$  es:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Por otra parte, si  $K=R$ , tomando  $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}-\hat{b})$ ,  $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}+\hat{b})$

La matriz de  $q|_{\hat{P}}$  respecto a  $(\hat{u}, \hat{v})$  es  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , y  $\text{rg } \hat{P} = 2$   $\text{Ind}(\hat{P}) = 1$

### 5.3.5 Lema

Si  $\hat{E} = \hat{U} \oplus \hat{V}$  entonces:

i)  $\text{rg } \hat{E} = \text{rg } \hat{U} + \text{rg } \hat{V}$

ii) Si  $K=R$  es  $\text{Ind}(\hat{E}) = \text{Ind}(\hat{U}) + \text{Ind}(\hat{V})$

Demostración:

i) Por 4.1.8 es  $\text{rad } \hat{E} = \text{rad } \hat{U} + \text{rad } \hat{V}$ , así  $\text{rg}(\hat{E}) = \dim \hat{E} - \dim(\text{rad } \hat{E}) = \dim \hat{U} + \dim \hat{V} - \dim(\text{rad } \hat{U}) - \dim(\text{rad } \hat{V}) = \text{rg } \hat{U} + \text{rg } \hat{V}$ .

ii) Tomemos bases ortonormales bien ordenadas para  $\hat{U}$  y  $\hat{V}$ :

$$(\hat{u}_0^-, \dots, \hat{u}_r^-, \hat{u}_0^+, \dots, \hat{u}_s^+, \hat{u}_0^0, \dots, \hat{u}_t^0), (\hat{v}_0^-, \dots, \hat{v}_{r'}^-, \hat{v}_0^+, \dots, \hat{v}_{s'}^+, \hat{v}_0^0, \dots, \hat{v}_{t'}^0)$$

con  $q(\hat{u}_i^\pm) = q(\hat{v}_j^\pm) = \alpha$ ,  $\alpha = -1, 1, 0$ . Entonces la base

$$(\hat{u}_0^-, \dots, \hat{u}_r^-, \hat{v}_0^-, \dots, \hat{v}_{r'}^-, \hat{u}_0^+, \dots, \hat{u}_s^+, \hat{v}_0^+, \dots, \hat{v}_{s'}^+, \hat{u}_0^0, \dots, \hat{u}_t^0, \hat{v}_0^0, \dots, \hat{v}_{t'}^0)$$

es orto normal bien ordenada de  $\hat{E}$ , y como se vé es  $\text{Ind } \hat{E} = (r+1) + (r'+1) =$

$$= \text{Ind } \hat{U} + \text{Ind } \hat{V}.$$

### 5.3.6 Teorema

Supongase  $K=R$  ó  $K=C$ . Dos puntos de  $\text{im } q$  son proyectivamente equivalentes, si ambos son no singulares ó singulares.

En particular, sobre una quadrica  $q$  el grupo  $\text{PG}(q)$  actúa de forma transitiva.

Demostración:

Por el lema 5.3.2 se deduce una de las implicaciones del teorema.

probemos la otra para  $K=R$ :

i) Si  $a = [\hat{a}]$   $a' = [\hat{a}']$  son dos puntos de  $\text{im } q$  no singulares, entonces  $\hat{a}$  y

$\hat{a}'$  son vectores isotropos no pertenecientes a  $\text{rad } \hat{q}$ . De 5.3.3 se deduce la existencia de vectores  $\hat{b}$  y  $\hat{b}'$  de  $\hat{E}$  isotropos, tales que

$(\hat{a}/\hat{b}) = (\hat{a}'/\hat{b}') = 1$ . Así por 5.3.4 los planos  $\hat{p} = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle$  y  $\hat{p}' = \langle \hat{a}', \hat{b}' \rangle$  son

no singulares, y por 4.2.3 el isomorfismo lineal  $\hat{f}: \hat{p} \rightarrow \hat{p}'$  tal que

$\hat{f}(\hat{a}, \hat{b}) = (\hat{a}', \hat{b}')$  es una isometría.

Utilizando ahora 4.1.8 se ve que  $\hat{E} = \hat{p} \oplus \hat{p}^\perp = \hat{p}' \oplus \hat{p}'^\perp$  y por 5.3.5

se deduce que  $\text{rg } \hat{p}^\perp = \text{rg } \hat{p}'^\perp$ ,  $\text{Ind}(\hat{p}^\perp) = \text{Ind}(\hat{p}'^\perp)$  con lo que  $\hat{p}^\perp$  y  $\hat{p}'^\perp$  son

isométricos. Fijada  $\hat{f}: \hat{p}^\perp \rightarrow \hat{p}'^\perp$  isometría, por 4.2.5 es

$\hat{f} = \hat{f} \cdot \hat{f} : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$  isometría que verifica  $\hat{f}(\hat{a}) = \hat{a}'$ . Así si  $f = [\hat{f}]$  se tiene

$f(a) = a'$



La demostración para el caso  $K=C$  es analoga.

### 5.3.7 Nota

Existe un teorema debido a Witt que prueba que si  $\hat{U}$  y  $\hat{U}'$  son subespacios de espacios vectoriales métricos  $\hat{E}$  y  $\hat{E}'$  no singulares e isométricos, si existe una isometría  $\hat{f}:\hat{U} \rightarrow \hat{U}'$  entonces existe  $\hat{f}:\hat{E} \rightarrow \hat{E}'$  isometría tal que  $\hat{f}/\hat{U} = \hat{f}:\hat{U} \rightarrow \hat{U}'$ . (véase [BE<sup>1</sup>] ó [A])

Esto permite en particular probar fácilmente la validez de 5.3.6 sobre un cuerpo  $K$ .

## 6. POSICIONES RELATIVAS ENTRE CUADRICA Y SUBESPACIO

Fijada la cuadrada  $q=[\hat{q}]$  y el subespacio  $U=P(\hat{U})$  del espacio proyectivo  $E$ , si  $U \not\subset \text{im } q$  entonces  $\hat{q}_U$  es una forma cuadrática no nula. Denominaremos posición relativa de  $U$  (respecto a  $q$ ) al tipo proyectivo de la cuadrada  $[\hat{q}_U]$ . Analizaremos esta cuestión deteniendonos de forma especial en las posiciones relativas entre hiperplano-cuadrada y recta-cuadrada.

$q=[\hat{q}]$  es una cuadrada definida sobre el espacio proyectivo  $E=P(E)$ . Como es habitual, el cuerpo base tiene característica distinta de dos  $E=(\hat{E}, \hat{q})$  es un espacio vectorial métrico.

### 6.1 Generalidades

#### 6.1.1 Definición

Si  $U=P(\hat{U})$  es subespacio proyectivo de  $E$ , se denomina cuadrada sección de  $q$  por  $U$  a la cuadrada en  $U$ ,  $q \cap U = [\hat{q}_U]$ , cuando  $\hat{q}_U$  es no nulo (es decir  $U \not\subset \text{im } q$ ).

Si además  $V$  es subespacio proyectivo de  $E$ , se dice que la posición relativa de  $V$  (respecto a  $q$ ) es la misma que la de  $U$ , si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:

- i)  $U \subset \text{im } q$ ,  $V \subset \text{im } q$ ,  $\dim U = \dim V$ .
- ii)  $U \not\subset \text{im } q$ ,  $V \not\subset \text{im } q$ , y las cuadradas  $q \cap U$  y  $q \cap V$  son proyectivamente equivalentes (ver 4.2.6), es decir, existe una homografía  $f:U \rightarrow V$  tal que  $f^\#(q \cap V) = q \cap U$ .

#### 6.1.2 Observación

En las condiciones de la definición 6.1.1 hacemos notar que el hecho de que las cuadradas  $q \cap U$  y  $q \cap V$  sean proyectivamente equivalentes no implica en general que exista  $f \in O(q)$  con  $f(U)=V$  y  $(f_U)^\#(q \cap V) = q \cap U$ . Esta condición daría lugar a una definición más restrictiva (y natural) de posición relativa, que aquí no vamos a analizar.

### 6.1.3 Proposición

Si  $U$  es un subespacio de  $E$ ,  $U \not\subset \text{im } q$ , entonces  $\text{im}(q \cap U) = (\text{im } q) \cap U$ ,  
 y  $\text{rad}(q \cap U) = U \cap U^\perp = \{u \in U / u \perp x \text{ para todo } x \in U\}$ .

Demostración

Si  $U = P(\hat{U})$ ,  $u = [\hat{u}]$  se tiene  $u \in \text{im}(q \cap U) \Leftrightarrow \hat{q}_0(\hat{u}) = 0 \Leftrightarrow \hat{q}(\hat{u}) = 0$  y  $\hat{u} \in \hat{U}$   
 $u \in (\text{im } q) \cap U$ .

La segunda igualdad es consecuencia de que  $\text{rad } \hat{U} = \hat{U} \cap \hat{U}^\perp$ .

### 6.1.4 Definición

Sea  $U$  subespacio proyectivo de  $E$ :

i) Se dice que  $U$  es exterior a la cuádrica  $q$ , si  $\text{im } q \cap U = \emptyset$ .

Nótese que si  $K = \mathbb{C}$  no existen subespacios exteriores (no vacíos)

ii) se dice que  $U$  es tangente a la cuádrica si  $U \cap U^\perp \neq \emptyset$ , es decir,  
 ó bien  $U \subset \text{im } q$  (entonces  $U \cap U^\perp = (\text{im } q) \cap U = U$ ), ó bien  $U \not\subset \text{im } q$  (en-  
 tonces  $q \cap U$  es cuádrica degenerada).

En cualquier caso al subespacio  $U \cap U^\perp$  (que está contenido en  $\text{im } q$ ) se  
 denomina subespacio de tangencia. Los puntos de  $U \cap U^\perp$  se denominan pun-  
 tos de tangencia.

iii) Se dice que  $U$  es secante a la cuádrica si no es tangente ni exterior.

### 6.1.5 Ejemplo

Considerese en  $P_2(\mathbb{R})$  la cuádrica  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ , y  $U_\lambda := (\lambda x_0 + x_1 = 0)$

Tomando en  $U_\lambda$  coordenadas homogéneas  $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$

correspondientes a la base  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  de  $U$

la ecuación de la cuádrica  $q \cap U_\lambda$  es

$(1 - \lambda^2)y_0^2 + y_1^2 = 0$ . Así se tiene:

Para  $\lambda = \pm 1$   $U$  es tangente a la cuádrica en el punto  $\begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}$

Si  $|\lambda| > 1$ ,  $U_\lambda$  es exterior a la cuádrica

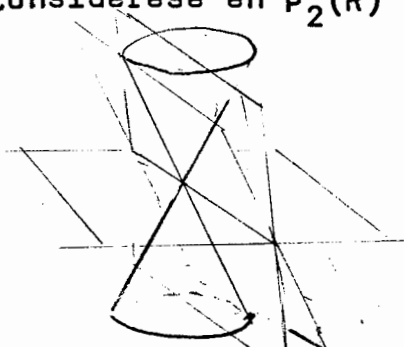
Si  $|\lambda| < 1$   $U_\lambda$  es secante a la cuádrica

### 6.1.6 Observación

Si  $a$  es un punto singular para la cuádrica entonces cualquier subespa-  
 cio  $U$  que contenga al punto  $a$  es tangente a la cuádrica por el punto  
 $a$ , ya que  $\text{rad } q \subset U^\perp$ .

### 6.2 Posición relativa entre hiperplano y cuádrica.

Estudiemos en primer lugar el problema de la tangencia:



### 6.2.1 Teorema

Dado  $a \in \text{im } q$  punto no singular para la cuádrica, existe un único hiperplano  $H$  que es tangente a la cuádrica por el punto  $a$ . Este hiperplano es justamente el hiperplano polar  $a^\perp$  de  $a$ .

**Demostración:**

a) Si  $H$  es hiperplano tangente a la cuádrica en el punto  $a$ , entonces por definición  $a \in H \cap H^\perp$  y por tanto  $H \subset a^\perp$ . Como  $a^\perp$  es hiperplano (2.3.12) se deduce la igualdad  $H = a^\perp$ .

b) por otra parte  $H = a^\perp$  es hiperplano tangente a la cuádrica en  $a$ , pues como  $a \in \text{im } q$ ,  $a \in a^\perp = H$ , y obviamente  $a \in H^\perp$ .

### 6.2.2 Corolario

Dos hiperplanos tangentes a la cuádrica en puntos no singulares, tienen la misma posición relativa.

**Demostración:**

Si  $H_1, H_2$  son hiperplanos tangentes a la cuádrica  $q$  en los puntos no singulares  $a_1$  y  $a_2$ , por 5.3.6 y 5.3.7 existe  $f \in \text{PO}(q)$  con  $f(a_1) = a_2$ , y por tanto  $f(a_1^\perp) = a_2^\perp$  es decir  $f(H_1) = H_2$ .

### 6.2.3 Cálculo analítico del hiperplano tangente

Fijemos en  $E$  un sistema homogéneo de coordenadas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  y sea  $\hat{q}_x = 0$  una ecuación para  $q$ , donde  $\hat{q}_x = \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$ .

Fijado el punto  $a \in \text{im } q$  -rad  $q$ , escribamos  $\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  para denotar

las coordenadas homogéneas de  $a$ . Entonces la ecuación de  $a^\perp$  hiperplano tangente a  $q$  por el punto  $a$  es de la forma:

$\sum_{i=0}^n \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} \Big|_{\hat{a}} x_i = 0$  donde  $\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i}$  denota la derivada parcial de  $q$  respecto a  $x_i$ .

En efecto, se verifica la identidad:

$$\begin{pmatrix} q_{00} & q_{01}/2 & \dots & q_{0n}/2 \\ q_{01}/2 & q_{11} & \dots & q_{1n}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1}/2 & q_{1n}/2 & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_0} \Big|_{\hat{a}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_n} \Big|_{\hat{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Así el conjunto de puntos  $x$  con coordenadas homogéneas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  tales que  $a \cdot x$  se describe por la ecuación:

$$(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} q_{00} & \dots & q_{0n}/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{0n}/2 & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} \Big|_{\hat{a}} x_i = 0$$

Notese que las ecuaciones de rad q son justamente  $\frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad i=0, \dots, n$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5.2.4 Ejemplo

En  $P_3(R)$  considerese la quadrica q de ecuación  $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ . En  $a =$  punto de  $\text{im } q$ , el hiperplano tangente es  $(-x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0):H$ . La intersección de H con  $\text{im } q$  se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} (x_2+x_0)(x_2-x_0) + (x_3-x_1)(x_3+x_1) &= 0 && \text{(Ecuación de la quadrica)} \\ x_2-x_0 &= x_1-x_3 && \text{(Ecuación del plano)} \end{aligned}$$

Los puntos de la recta  $\Delta: \begin{cases} x_2-x_0=0 \\ x_1-x_3=0 \end{cases}$  y los de la recta  $\Delta': \begin{cases} x_3-x_0=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$

están contenidos en  $\text{im } q \cap H$ . De hecho  $\text{im } q \cap H = \Delta \cup \Delta'$ ,  $\text{rg}(q \cap H) = 2$  y  $\text{Ind}(q \cap H) = 1$ .

Por la transitividad del grupo  $O(q)$  (vease 5.3) se concluye que para todo punto  $a \in \text{im } q$ , su hiperplano tangente corta a la quadrica en un par de rectas.

6.2.5 Proposición

Si H es un hiperplano contenido en  $\text{im } q$ , entonces el rango de q es igual a 1 ó 2. En el primer caso  $\text{im } q = H$ . En el segundo  $\text{im } q = H \cup H'$  siendo  $H'$  otro hiperplano distinto de H.

Demostración:

Fijemos en E un sistema de coordenadas homogéneas  $\{x_i\}$  tal que la ecuación de H se reduzca a  $x_0 = 0$ . Como  $H \subset \text{im } q$ , se concluye que la ecuación de q es de la forma  $x_0 (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = 0$  (no todos los  $\alpha_i$  nulos), es decir:

$$(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1/2 & \dots & \alpha_n/2 \\ \alpha_1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

y  $\text{rg } q = 2$  a no ser que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  ( $\alpha_0 \neq 0$ ), es decir  $x_0 x_0^2 = 0$ , en cuyo caso es  $\text{rg } q = 1$  y  $\text{im } q = H$ .

Estudiemos por último para  $K=R$  la posible existencia de hiperplanos exteriores. Demostraremos previamente el siguiente resultado:

5.2.6 Proposición

Toda quadrica real sin puntos es propia y tiene índice nulo

Demostración:

si  $\text{im } q = \emptyset$ ,  $(\hat{E}, \hat{q})$  no tiene vectores isotropos, y por 4.3.8 es euclideo.

Así  $\hat{q}$  es definida con lo que  $q = [\hat{q}]$  verifica la tesis.

### 6.2.7 Teorema

Si existe un hiperplano  $H$  exterior a la cuádrica real  $q$ , entonces necesariamente  $\text{Ind } q$  es igual a cero ó la unidad. Además  $q \cap H$  es propia y  $\text{Ind}(q \cap H) = 0$ .

Demostración:

Sea  $H = P(\hat{H})$  exterior a la cuádrica  $q$ . Entonces  $\text{im}(q \cap H) = \emptyset$ , y por 4.3.8  $\hat{H} = (\hat{H}, \hat{q}_H)$  es espacio euclideo que podemos suponer positivo, es decir,  $\text{Ind}(\hat{H}) = 0$ . Si  $\hat{L} = \hat{H}^\perp$ , por ser  $H$  no degenerado se tiene  $\hat{E} = \hat{L} \oplus \hat{H}$ , y por 5.3.5 se concluye que  $\text{Ind}(\hat{E}) = \text{Ind}(q) = \text{Ind}(\hat{L}) + \text{Ind}(\hat{H})$  que será por tanto igual a 0 ó la unidad. La última afirmación es consecuencia de 6.2.6.

### 6.2.8 Corolario

Dos hiperplanos  $H_1, H_2$  exteriores a la cuádrica real  $q$  tienen la misma posición relativa respecto a  $q$ .

Demostración:

Por 6.2.7 es  $\text{rg}(q \cap H_1) = \text{rg}(q \cap H_2) = n$ ,  $\text{Ind}(q \cap H_1) = \text{Ind}(q \cap H_2) = 0$ . Aplicando ahora el teorema de clasificación 4.3.4 se obtiene la conclusión.

### 6.3 Posiciones relativas entre recta y cuádrica.

El estudio de esta cuestión requiere de un análisis explícito previo del teorema de clasificación 4.3.4 aplicado a cuádricas en rectas proyectivas:

#### 6.3.1 Teorema

Sea  $q_1 = [\hat{q}_1]$  una cuádrica sobre la recta proyectiva  $\Delta = P(\hat{\Delta})$  definida sobre el cuerpo  $K$ . Caben tres posibilidades:

a)  $\text{im } q_1 = \{a\}$ , Entonces  $q_1$  no es propia y  $\text{rad } q_1 = \{a\}$ .

Por otra parte, las cuádricas sobre rectas proyectivas (en el cuerpo  $K$ ) con un solo punto, son proyectivamente equivalentes.

b)  $\text{Im } q_1 = \{a, b\}$   $a \neq b$ . En éste caso  $q_1$  es propia. Todas las cuádricas sobre rectas proyectivas (en  $K$ ) con dos puntos (distintos) son proyectivamente equivalentes.

c)  $\text{im } q_1 = \emptyset$ . Entonces  $q_1$  es propia.

Las cuádricas sin puntos sobre rectas proyectivas reales son proyectivamente equivalentes.

Demostración:

El resultado se deduce a partir de las siguientes reflexiones:

i) Si la cuádrica  $q_1$  <sup>es propia</sup>, y existe al menos un punto  $a = [\hat{a}] \in \text{im } q_1$ , enton-

ces  $\Delta = (\Delta, q_1)$  es un espacio no singular y  $\hat{q}_1(\hat{a})=0$ ; por 5.3.3 existe  $\hat{b} \in \Delta$  con  $\hat{q}_1(\hat{b})=0$  y  $(\hat{a}/\hat{b})=1$ . En el sistema de coordenadas  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$  inducido por la base  $(\hat{a}, \hat{b})$  de  $\hat{\Delta}$ , la ecuación de la cuadrada es  $x_0 x_1 = 0$ . Por tanto  $a$  y  $b = [\hat{b}]$  son los únicos puntos de la cuadrada.

ii) Si  $\text{im } q = \emptyset$  y  $K = \mathbb{R}$  entonces por 6.2.6  $q_1$  es cuadrada propia y tiene índice nulo. Su ecuación reducida es  $x_0^2 + x_1^2 = 0$

iii) Por último si  $\text{im } q_1 = \{a\}$ , por i)  $q_1$  no es propia, y  $\text{rad } q_1 = \{a\}$ . Tomando  $a = [\hat{a}]$  y  $\hat{b} \in \hat{\Delta}$  con  $\hat{q}_1(\hat{b}) \neq 0$ , podemos suponer - multiplicando  $\hat{q}_1$  por  $q_1(b)^{-1}$  - que  $\hat{q}_1(\hat{b})=1$ . Además  $(\hat{a}/\hat{b})=0$  pues  $\hat{a} \in \text{rad } \hat{q}_1$ . Respecto al sistema de coordenadas  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$  inducido por la base  $(\hat{a}, \hat{b})$ , la ecuación de la cuadrada es  $x_1^2 = 0$ .

### 6.3.2 Corolario

Fijada la cuadrada  $q = [q]$  en el espacio proyectivo real  $E$ , las diferentes posiciones relativas de una recta proyectiva  $\Delta$  en  $E$  y  $q$  (según definición 6.1.1) vienen descritas por la cardinalidad del conjunto  $\text{im } q \cap \Delta$ . Explicitamente, solo hay cuatro posibilidades:

- i)  $\text{im } q \cap \Delta = \emptyset$  : Recta exterior a la cuadrada
- ii)  $\text{im } q \cap \Delta = \{a\}$  : Recta tangente a la cuadrada (y no contenida en ella)
- iii)  $\text{im } q \cap \Delta = \{a, b\}$  ( $a \neq b$ ) Recta secante a la cuadrada
- iv)  $\text{im } q \cap \Delta = \Delta$  : Recta contenida en la cuadrada

Demostración:

Cuando  $\Delta \not\subset \text{im } q$  se toma  $q_1 = q \cap \Delta$ ; basta aplicar ahora el teorema 6.3.1.

### 6.3.3 Observación

La aplicación literal de 6.3.1 al estudio de posiciones relativas entre recta y cuadrada, permite mantener la validez general del corolario 6.3.2 para cualquier cuerpo  $K$ , excepto en lo que respecta a las cuestiones relacionadas con rectas exteriores a la cuadrada. Concretamente:

- a) Si  $K$  es algebraicamente cerrado, no existen rectas exteriores
- b) Para ciertos cuerpos  $K$  pueden encontrarse rectas exteriores a la cuadrada con distinta posición relativa.

### 6.3.4 Cálculos analíticos

Fijado en  $E$  un sistema  $[x_i]$  de coordenadas homogéneas la ecuación de la cuadrada es de la forma:

$$(x_0, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ó bien} \quad \hat{x}^t A \hat{x} = 0 \quad \text{con} \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*A matriz simétrica.*

una recta proyectiva  $\Delta$  en  $E$  queda definida por dos puntos  $a$  y  $b$  distintos. Tomando  $\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$   $\hat{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  los vectores que definen las coordena-

das homogéneas de  $a$  y  $b$  respecto a  $[x_i]$ , las ecuaciones paramétricas de

$\hat{\Delta}$  ( y de  $\Delta$  ) pueden escribirse:  $\hat{x} = \lambda \hat{a} + \mu \hat{b}$ , y  $[\lambda, \mu]$  constituye un sistema de coordenadas homogéneas respecto al cual la ecuación de la cuadrada  $q \cap \Delta$  es  $(\lambda \hat{a} + \mu \hat{b})^t A (\lambda \hat{a} + \mu \hat{b}) = 0$ . Haciendo operaciones queda:

$$(\hat{a}^t A \hat{a}) \lambda^2 + 2(\hat{a}^t A \hat{b}) \lambda \mu + (\hat{b}^t A \hat{b}) \mu^2 = 0, \text{ es decir } (\lambda, \mu) \Lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$$

siendo  $\Lambda = \begin{pmatrix} \hat{a}^t A \hat{a} & \hat{a}^t A \hat{b} \\ \hat{a}^t A \hat{b} & \hat{b}^t A \hat{b} \end{pmatrix}$ . Tenemos así:

- i)  $\Delta \subset \text{im } q \Leftrightarrow \Lambda = 0$
- ii)  $\Delta$  tangente a la cuadrada  $q \Leftrightarrow \det \Lambda = (a^t A a)(b^t A b) - (a^t A b)^2 = 0$
- iii)  $\Delta$  secante a la cuadrada  $q \Leftrightarrow \det \Lambda < 0$
- iv)  $\Delta$  exterior a la cuadrada  $q \Leftrightarrow \det \Lambda > 0$

La justificación de iii) y iv) está en el siguiente Lema:

### 5.3.5 Lema

Sea  $(x_0, x_1) \Lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$  la ecuación de la cuadrada  $q_1$  respecto a cierto sistema de coordenadas homogéneas en la recta proyectiva real  $\Delta$ . Entonces el signo de  $\det \Lambda$  ( $=0, 1, -1$ ) solo depende de la cuadrada  $q_1$ , y no del sistema de coordenadas.

En particular:  $\det \Lambda < 0 \Leftrightarrow$  la cuadrada tiene dos puntos,  
 $\det \Lambda > 0 \Leftrightarrow$  la cuadrada no tiene puntos

Demostración:

Mediante un cambio de coordenadas  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$ , la nueva ecuación de

la cuadrada es  $(x'_0, x'_1) \Lambda' \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = 0$  con  $\Lambda' = P^t \Lambda P$ , y

$$\text{Signo}(\det(\Lambda')) = \text{Signo}((\det P)^2 \det \Lambda) = \text{signo}(\det \Lambda)$$

Nótese además que para  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  es  $\det(\lambda \Lambda) = \lambda^2 \det(\Lambda)$  y ambos determinantes tienen el mismo signo.

Si  $\det \Lambda \neq 0$  entonces la ecuación reducida de  $q_1$  es de la forma

$x_0^2 + x_1^2 = 0$  (cuadrada sin puntos) ó bien  $-x_0^2 + x_1^2 = 0$  (cuadrada con dos puntos) dependiendo de que  $\det \Lambda > 0$  ó  $\det \Lambda < 0$  respectivamente.

### 6.3 Cono tangente

Fijado un punto  $a \in E$  no singular para  $q$ , cabe considerar el conjunto

de rectas que contienen al punto  $a$  y son tangentes a la cuádrica. La unión de dichas rectas— cuando existe alguna— veremos que constituye el conjunto de puntos de una cuádrica que denominamos como tangente a  $q$  en el punto  $a$ .

### 6.3.1 Proposición (Definición)

Fijado  $a = [\hat{a}] \in E - \text{rd } q$ , la aplicación  $\hat{q}_a: \hat{E} \ni x \mapsto \hat{q}(\hat{a})\hat{q}(\hat{x}) - (\hat{a}/\hat{x})^2 \in K$  define una forma cuadrática no nula, y la cuádrica  $q_a = [\hat{q}_a]$  no depende del representante  $\hat{a}$  elegido para  $a$ . Se denomina a  $q_a$  como tangente a la cuádrica por el punto  $a$ .

Demostración:

La aplicación  $\hat{p}: \hat{E} \ni \hat{x} \mapsto (\hat{a}/\hat{x})^2 \in K$  es una forma cuadrática con forma polar  $\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{a}/\hat{x})(\hat{a}/\hat{y})$ , y se tiene  $\hat{q}_a = \hat{q}(\hat{a})q - \hat{p}$  que es diferencia de dos formas cuadráticas.

Por otra parte se ve que  $\hat{q}_\lambda \hat{a} = \lambda^2 \hat{q}_a$  para  $\lambda \neq 0$ . Esto concluye la demostración.

### 6.3.2 Teorema

Si  $a \in E$  es un punto no singular, entonces

$\text{im } q_a = \{x \in E - \langle a, x \rangle\}$  es tangente a  $q \cup \{a\}$ .

Por otra parte el punto  $a$  es punto singular de  $q_a$  y se verifica

$$(\text{im } q_a) \cap (\text{im } q) = a^\perp \cap \text{im } q.$$

Demostración:

Supongase  $a = [\hat{a}]$ . La condición necesaria y suficiente para que  $b = [\hat{b}]$  determina con  $a$  una recta tangente a  $q$  es que  $\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle$  sea un plano vectorial degenerado (respecto a  $\hat{q}$ ) es decir:  $\hat{q}(\hat{a})\hat{q}(\hat{b}) - (\hat{a}/\hat{b})^2 = 0$ , así

$$\langle a, b \rangle \text{ es tangente a } q \Leftrightarrow b \in \text{im } q_a.$$

Para ver que  $a$  es punto singular para  $q_a$  basta observar que la forma polar  $\hat{q}_a$  de la forma cuadrática  $\hat{q}_a$  de 6.3.1 es

$$\hat{q}_a(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{q}(\hat{a})\hat{q}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{q}(\hat{a}, \hat{x})\hat{q}(\hat{a}, \hat{y}), \text{ y } \hat{q}_a(\hat{a}, \hat{x}) = 0 \text{ para todo } \hat{x} \in \hat{E}.$$

Probemos por último la igualdad  $(\text{im } q) \cap (\text{im } q_a) = a^\perp \cap \text{im } q$ :

i) Si  $a \in \text{im } q$  entonces se ve fácilmente que  $\text{im } q_a = \langle a \rangle$  y la igualdad es trivial.

ii) Si  $a \notin \text{im } q$ , para  $x \in (\text{im } q) \cap (\text{im } q_a)$  se verifica por lo anterior que la recta  $\langle a, x \rangle$  es tangente a la cuádrica, y por 6.2.2 es

$\langle a, x \rangle \cap \text{im } q = \{x\}$ ; el punto  $x$  de tangencia es por 6.3.1 conjugado con todo punto de  $\langle a, x \rangle$ . En particular  $x \in a^\perp \cap \text{im } q$ .

La otra inclusión se prueba de forma análoga, y queda como ejercicio.