INTRODUCCION A LA TEORIA DE GRUPOS DE LIE
LECCION I

Javier Lafuente

§1 GRUPOS Y ALGEBRAS DE LIE.

1.1 **Grupo de Lie**

Un grupo de Lie, es un grupo abstracto de G que tiene estructura de variedad diferenciable (Haussdorf), respecto a la cual las aplicaciones:

$$G\times G\ni(a,b)\longrightarrow ab\in G\ ,\ G\ni a\longrightarrow a^{-1}\in G$$

son diferenciables. Denotaremos por "$e\in G$" al elemento neutro.
Evidentemente las dos condiciones anteriores, equivalen a que la aplicación

$$G\times G\ni(a,b)\longrightarrow ab^{-1}\in G$$

sea diferenciable.

1.1.0

Un grupo de Lie de dimensión cero (como variedad) se llama discreto. Tiene la topología trivial, y es a lo más numerable. Recíprocamente, un grupo (abstracto) numerable, es un grupo discreto.

1.1.1

Un grupo de Lie es en particular un grupo topológico. La topología es la inducida en el grupo por la estructura de variedad. Cabe preguntarse bajo que condiciones se puede asegurar que un grupo topológico admite una estructura de variedad diferenciable que lo hace grupo de Lie. Este problema constituye el 5º de los diez propuestos por Hilbert en 1900.

En 1952 el 5º problema de Hilbert fué resuelto conjuntamente por Gleason y por D. Montgomery y L.Zippin. Esencialmente se puede enunciar el resultado del siguiente modo:

Un grupo topológico Haussdorf es un grupo de Lie si y solo si es variedad topológica. Esto es equivalente a decir, que es localmente compacto, y que no contiene subgrupos arbitrariamente pequeños (esto es, el elemeto neutro posee un entorno compacto que no contiene subgrupos no triviales).

1.1.2

En la teoría de grupos de Lie está en la confluencia de varias ramas bien diferenciadas de la Matemática: La Topología, el Algebra, el Análisis, y la Geometría Diferencial. Su desarrollo exige técnicas de estos cuatro campos con acentos en unos u otros según el punto de vista considerado.

1.2 Ejemplos básicos de Grupos de Lie.

Denotemos por $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. e identifiquemos $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ via el isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal

$$\mathbb{C}^n \ni x+iy \longrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$$

1.2.1 $(\mathbb{K}^n,+)$ es un grupo (abeliano) de Lie.

El conjunto $\mathfrak{M}(n,\mathbb{K})$ de las matrices cuadradas de órden n con coeficientes reales, puede identificarse de modo natural con $\mathbb{K}^N$, $N=n^2$.

1.2.2 $GL(n,\mathbb{K})=\{a\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{K})\colon \det a\neq 0\}$, tiene estructura natural de grupo de Lie, respecto del producto usual de matrices, y con la estructura de variedad diferenciable, obtenida como subconjunto abierto de $\mathbb{K}^N$.

1.3 Algebra de Lie

Un álgebra de Lie (abstracta) $\mathfrak{a}$, es un es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, dotado de una operación "corchete de Lie":

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}\ni(X,Y) \longrightarrow [X,Y]\in\mathfrak{a}$$

que verifica para todo X, Y, $Z\in\mathfrak{a}$, para todo λ, $\mu\ni\mathbb{R}$ las propiedades:

1) $[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$.

2) $[X,Y]=-[Y,X]$

3) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]$ (Identidad de Jacobi)

1.4 Ejemplos básicos de Algebras de Lie.

1.4.0 Un espacio vectorial real cualquiera V tiene estructura de álgebra de Lie respecto al corchete de Lie trivial: $[X,Y]=0$ para todo X,Y.

1.4.1 Si M es variedad diferenciable el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$ de los campos de vectores, constituye un álgebra de Lie respecto al corchete usual.

1.4.2 El espacio vectorial de matrices $\mathfrak{M}(n,\mathbb{K})$ con el corchete el Lie dado por:

$$[A,B]=AB-BA \text{ para todo } A,B\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{K})$$

constituye un álgebra de Lie que se denota por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

1.5 Traslaciones a la izquierda

Si G es grupo de Lie, y $a\in G$, la aplicación:

$$L_a\colon G\ni x \longrightarrow ax\in G$$

es diferenciable, ya que es composición de funciones diferenciables:

$$\underbrace{G\ni x \longrightarrow (a,x)\in G\times G\ni(a,x) \longrightarrow ax\in G}_{L_a}$$

Se denomina a L_a traslación a la izquierda.

Si a, $b\in G$ se verifica $L_a\circ L_b=L_{ab}$, $L_e=id$, $L_a^{-1}=L_{a^{-1}}$.

1.6 Campos invariantes por traslaciones a la izquierda.

Si G es grupo de Lie, un campo $X\in\mathfrak{X}(G)$ se llama invariante por traslaciones a la izquierda, si $(L_a)_*X=X$ para todo $a\in G$, es decir:

$$X(ax)=dL_a(X(x)) \text{ para todo } a,\ x\in G$$

Se denotará por $\mathcal{L}(G)$ al conjunto de dichos campos.

1.6.1 PROPOSICION

Si G es grupo de Lie, un campo $X\in\mathfrak{X}(G)$ es invariante por traslaciones a la izquierda, si y solo si $X(a)=dL_a(X(e))$ para todo $a\in G$.

Por otra parte si X, $Y\in \mathcal{L}(G)$ entonces $[X,Y]\in\mathcal{L}(G)$.

Demostración:

Si $X(a)=dL_a(X(e))$ para todo $a\in G$, entonces:

$$X(ab)=dL_{ab}(X(e))=(dL_a\circ dL_b)(X(e))=dL_a(X(b))$$

Por otra parte, si $X,Y\in\mathcal{L}(G)$, para todo $a\in G$ se tiene:

$$L_a^*[X,Y]=[L_a^*X,L_a^*Y]=[X,Y]$$

1.6.2 PROPOSICION

Sea G grupo de Lie, y X un operador que asigna a cada $x\in G$ un vector $X(x)\in T_xG$, que verifica:

$$X(ax)=dL_a(X(x)) \text{ para todo } a,\ x\in G$$

entonces $X\in\mathfrak{X}(G)$, y por tanto es invariante por traslaciones a la izquierda.

Demostración:

Sea $\gamma:I_\varepsilon\longrightarrow G$ una curva diferenciable con $\gamma(0)=e$, $\gamma'(0)=X(e)$. Se tiene: $X(a)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(a\gamma(t))$. Por tanto, si $f:G\longrightarrow\mathbb{R}$ es diferenciable, se tiene:

$$X(f)(a)=X(a)(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(a\gamma(t)))=\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,a)$$

siendo $\phi:G\times I_\varepsilon\ni(a,t)\longrightarrow f(a\gamma(t))\in\mathbb{R}$ es diferenciable, por ser:

$$G\times I_\varepsilon\ni(a,t)\longrightarrow(a,\gamma(t))\longrightarrow a\gamma(t)\longrightarrow f(a\gamma(t))\in\mathbb{R}$$

composición de funciones diferenciables.

1.7 Algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G.

Si G es grupo de Lie, por 1.6.1 se ve que $\mathcal{L}(G)$ tiene estructura natural de álgebra de Lie.

1.7.1 TEOREMA

Si G es grupo de Lie entonces la aplicación:

$$\mathcal{L}(G)\ni X\longrightarrow X(e)\in T_eG$$

es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal, cuya aplicación lineal inversa denotamos:

$$T_eG\ni A\longrightarrow \mathbb{A}\in\mathcal{L}(G)$$

donde $\mathbb{A}(x)=dL_x(A)$ para todo $x\in G$ $(A\in T_eG)$. ■

1.7.2

Podemos dar estructura de algebra de Lie al espacio T_eG a traves del isomorfismo anterior tomando:

$$[A,B]=[\mathbb{A},\mathbb{B}](e) \text{ para todo } A,\ B\in T_eG$$

T_eG con esta estructura de álgebra de Lie, se denomina algebra de Lie de G, y se denota por $\mathfrak{g}$.

1.7.3

Igual que se han definido traslaciones L_a a la izquierda, se pueden definir traslaciones a la derecha $R_a:G\ni x\longrightarrow xa\in G$, y campos invariantes por traslaciones a la derecha. Cuando se trabaja simultaneamente con ambos tipos de traslaciones es ventajosa la siguiente notación:

Si $X\in T_xG$, y $b\in G$ escribimos $dL_b(x)(X)=bX\in T_{bx}G$, $dR_b(x)(X)=Xb\in T_{xb}G$.

Se verifican entonces para $a,b\in G$, $X,Y\in T_xG$ las propiedades formales:

$$a(X+Y)=aX+aY,\quad (X+Y)a=Xa+Ya,\quad (ab)X=a(bX),\quad X(ba)=(Xb)a,\quad eX=Xe=X$$

1.8 Algebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ de $GL(n,\mathbb{K})$

El grupo de Lie $G=GL(n,\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$, por lo que podemos identificar su álgebra de Lie $\mathfrak{g}=T_IG=\{I\}\times\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ con $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.

Si $A\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$, podemos escribir para cada $x\in G$:

$$\mathbb{A}(x)=dL_x\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(I+tA)\right)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x(I+tA)=(xA)_x$$

así si (x^i_j) es la carta identidad, se tiene:

$$\mathbb{A}=x^i_k\,A^k_j\,\partial/\partial x^i_j$$

Una simple computación prueba que para $A,B\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ es

$$[A,B]=[\mathbb{A},\mathbb{B}](I)=AB-BA$$

así pues $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ del ejemplo 1.4.2.

Haciendo la identificación.: $\mathbb{C}^N\ni x+iy\longrightarrow(x,y)\in\mathbb{R}^{2N}$ $(N=n^2)$ se puede extender el ejemplo anterior a $G=GL(n,\mathbb{C})$ que resulta ser un abierto de $\mathbb{R}^{2N}$. Cada matriz $Z=(z^k_j)=(x^k_j+iy^k_j)$ se identifica con $(x^k_j,\ y^k_j)\in\mathbb{R}^{2N}$, y la fórmula:

$$\mathbb{A}(z)=(zA)_z \text{ para todo } A\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})$$

permanece esencialmente válida. Justificaremos más adelante que su álgebra de Lie es exactamente $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Si $A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, la curva

$$\gamma_A:\mathbb{R}\ni t\longrightarrow\exp(tA)=e^{tA}\in GL(n,\mathbb{K})$$

es curva integral de $\mathbb{A}$ por I, ya que:

$$\gamma'_A(t)=\frac{d}{dt}\Big|_t(\exp(tA))=(\exp(tA)A)_{\gamma_A(t)}=\mathbb{A}(\gamma_A(t))$$

por tanto $\mathbb{A}$ es un campo completo con flujo:

$$\mathbb{A}_t(a)=a\exp(tA)$$

1.9 Función Exponencial

Generalizaremos parte de los resultados obtenidos en 1.8 para grupos de Lie abstractos:

1.9.1 TEOREMA

Si G es grupo de Lie, todo campo $X\in\mathcal{L}(G)$*, es completo. En particular si se denota por* $\gamma_A:\mathbb{R}\longrightarrow G$ *la curva integral maximal de* $\mathbb{A}\in\mathcal{L}(G)$ *por e, el flujo global de* $\mathbb{A}$ *viene dado por*

$$\mathbb{A}_t(a)=a\gamma_A(t)$$

NOTA: *Se define entonces la aplicación exponencial:*

$$exp:\mathfrak{g}\ni A\longrightarrow\gamma_A(1)\in G$$

Demostración:

Sea $\gamma:(-2\varepsilon,2\varepsilon)\longrightarrow G$ una curva integral de $\mathbb{A}$ por e, y $\bar{\gamma}:(a,b)\longrightarrow G$ su extensión maximal. Supuesto $b<+\infty$, se define:

$$\sigma:(b-2\varepsilon,b+\varepsilon)\ni t\longrightarrow\bar{\gamma}(b-\varepsilon)\gamma(t-b+\varepsilon)\in G$$

que es curva integral de $\mathbb{A}$ con $\sigma(b-\varepsilon)=\bar{\gamma}(b-\varepsilon)$. Por tanto coinciden en la intersección de sus dominios, y podemos definir:

$$\tilde{\gamma}(t)=\begin{cases}\bar{\gamma}(t) & \text{si } t\in(a,b)\\ \sigma(t) & \text{si } t\in(b-2\varepsilon,b+\varepsilon)\end{cases}$$

que es curva integral de $\mathbb{A}$ *más larga* que $\bar{\gamma}$.

1.9.2 TEOREMA

Sea G grupo de Lie, si $A\in T_eG$*, se denota por* $\gamma_A:\mathbb{R}\longrightarrow G$ *la curva integral maximal de* $\mathbb{A}\in\mathcal{L}(G)$ *por e, es decir* $\gamma_A(0)=e$, $\gamma'_A(t)=\mathbb{A}(\gamma_A(t))$*. Se verifica:*

1) $\gamma_{rA}(t)=\gamma_A(rt)$ *para todo* $r,t\in\mathbb{R}$*, y todo* $A\in T_eG$*.*

2) Se tiene para todo $t\in\mathbb{R}$ *y todo* $A\in T_eG$*, la identidad:*

$$\gamma_A(t)=exp(tA)$$

Por otra parte, para todo $s\in\mathbb{R}$ *es* $exp((s+t)A)=exp(sA)exp(tA)$

3) La aplicación exponencial definida por:

$$exp:T_eG\ni A\longrightarrow\gamma_A(1)\in G$$

es diferenciable.

Demostración:

1) Sea $\gamma=\gamma_A$. Si $r\neq0$, haciendo el cambio $\mathbb{R}\ni s\longrightarrow t=rs\in\mathbb{R}$, y $\alpha(s)=\gamma(rs)$ se tiene $\alpha=\gamma_{rA}$, ya que:

$$\left.\frac{d\alpha}{ds}\right|_s=\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{rs}\left.\frac{dt}{ds}\right|_s=r\mathbb{A}(\gamma(rs))=(r\mathbb{A})(\alpha(s))$$

2) Se tiene para $A\in\mathfrak{g}$:

$$\gamma_A(t)=\gamma_A(t.1)=\gamma_{tA}(1)=exp(tA)$$

además como $t\longrightarrow\gamma_A(s)\gamma_A(t)$ y $t\longrightarrow\gamma_A(s+t)$ son curvas integrales de $\mathbb{A}$ con las mismas condiciones iniciales, se concluye la igualdad:

$$\exp(sA)\exp(tA)=\gamma_A(s)\gamma_A(t)=\gamma_A(s+t)=\exp((s+t)A)$$

3) Como las curvas γ_A son geodésicas de la conexión canónica 1.9, son solucion (local) de una ecuación diferencial de segundo órden, y podemos asegurar que hay un abierto Ω de $\mathfrak{g}\times\mathbb{R}$ donde es diferenciable:

$$\gamma:\mathfrak{g}\times\mathbb{R}\supset\Omega\ni(A,t)\longrightarrow\gamma_A(t)\in G$$

Por tanto también es diferenciable la función:

$$\phi:G\times\Omega\ni(\alpha,A,t)\longrightarrow a\gamma(A,t)\in G$$

y asi, también lo es

$$\mathfrak{g}\times G\ni(A,a)\longrightarrow A(a)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(a\gamma_A(t))=\frac{\partial\phi}{\partial t}(A,a,0)\in TG$$

el campo $V\in\mathfrak{X}(\mathfrak{g}\times G)$ con $V(A,a)=(0,A(a))$ es completo, y su flujo global es:

$$V_t(A,a)=(A,a\ \exp(tA))$$

en particular la aplicación $\mathfrak{g}\ni A\longrightarrow V_1(A,e)=(A,\exp(A))\in\mathfrak{g}\times G$ es diferenciable, y tambien lo es la función exponencial $\exp:\mathfrak{g}\longrightarrow G$.■

1.9.3 COROLARIO

Si G es grupo de Lie, la aplicación $\exp:T_eG\longrightarrow G$ *es no singular en* $0\in T_eG$, *e induce un difeomorfismo* $\exp:\mathbb{U}\longrightarrow U$, *donde* $\mathbb{U}$, *y U son entornos abiertos de 0 y e. Si* $(A_1,\dots,A_d)$ *es una base de* T_eG, *la aplicación:*

$$\mathbb{R}^d\ni(x_1,\dots,x_d)\longrightarrow\exp(x_1A_1+\dots+x_dA_d)\in G$$

difeomorfismo de un entorno $\mathbb{D}$ *de 0 en* $\mathbb{R}^d$ *sobre U. La aplicación inversa:*

$$\varphi_e:U\longrightarrow\mathbb{D}$$

se denomina carta normal.

Demostración:

Como $\exp(0)=e$, $d(\exp)_0:\mathfrak{g}\cong T_o\mathfrak{g}\longrightarrow T_eG=\mathfrak{g}$, veamos que es "la identidad":

$$d(\exp)_0(A)=d(\exp)_0\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}tA\right)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(tA))=\gamma'_A(0)=\mathbb{A}(e)=A,$$

Aplíquese ahora el teorema de la función inversa.■

1.9.4 TEOREMA

Sea G grupo de Lie, y $\varphi_e:U\longrightarrow\mathbb{D}$ *la carta normal. Para cada* $a\in G$ *se define la carta* $\varphi_a=\varphi_e\circ L_a^{-1}:U_a=L_a(U)\longrightarrow\mathbb{D}$. *La colección* $\mathcal{A}=\{(U_a,\varphi_a):a\in G\}$ *constituye un atlas de G que le da estructura de variedad analítica.*■

§2 Homomorfismos

2.1 Definiciones y resultados básicos.

2.1.1 DEFINICION

Sean G y $\bar{G}$ grupos de Lie. Un homomorfismo de grupos de Lie entre G y $\bar{G}$ es un homomorfismo abstracto $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ que además es aplicación diferenciable. El significado monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo de Lie es evidente.

Los grupos de Lie G y $\bar{G}$ se dicen isomorfos, si existe entre ellos un isomorfismo de Lie.

2.1.2 DEFINICION

Sean $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ álgebras de Lie. Un homomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ es un homomorfismo abstracto $\Phi:\mathfrak{g}\longrightarrow\bar{\mathfrak{g}}$ entre espacios vectoriales, que además preserva el corchete, es decir, para todo $A,B\in\mathfrak{g}$:

$$[\Phi(A),\Phi(B)]=[A,B]$$

El significado monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo de álgebras de Lie es evidente.

Las algebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ se dicen isomorfas, si existe entre ellos un isomorfismo de álgebras de Lie.

2.1.3 TEOREMA

Si $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ es un homomorfismo de grupos de Lie, y $\mathfrak{g}=T_eG$, $\bar{\mathfrak{g}}=T_{\bar{e}}\bar{G}$ son las respectivas álgebras de Lie, entonces, $d\phi(e):\mathfrak{g}\longrightarrow\bar{\mathfrak{g}}$ es homomorfismo de álgebras de Lie. Además el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & \bar{G} \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi(e)} & \bar{\mathfrak{g}} \end{array}$$

Demostración:

Si $A\in\mathfrak{g}$, y $\bar{A}=d\phi(e)(A)$, se probará que $\mathbb{A}=\phi_*\bar{\mathbb{A}}$, siendo $\mathbb{A}\in\mathcal{L}(G)$, $\bar{\mathbb{A}}\in\mathcal{L}(\bar{G})$ tales que $\mathbb{A}(e)=A$, y $\bar{\mathbb{A}}(\bar{e})=\bar{A}$. En efecto, para todo $x\in G$ se verifica por ser f homomorfismo la igualdad: $\phi\circ L_x=L_{\phi(x)}\circ\phi$. Por tanto:

$$d\phi(x)(\mathbb{A}(x))=d\phi(x)(dL_x(e)(A))=d(\phi\circ L_x)(e)(A)=d(L_{\phi(x)}\circ\phi)(e)(A)=$$

$$=dL_{\phi(x)}(\phi(e))\circ d\phi(e)(A)=dL_{\phi(x)}(\bar{e})(\bar{A})=\bar{\mathbb{A}}(\phi(x))$$

En particular si γ_A es la curva integral de $\mathbb{A}$ por e, se tiene que $\phi\circ\gamma_A$ es la curva integral($\gamma_{\bar{A}}$) de $\bar{\mathbb{A}}$ por $\bar{e}$, es decir: $\phi(\gamma_A(t))=\gamma_{\bar{A}}(t)$ para todo t. Tomando t=1, se deduce la conmutatividad del diagrama.

Veamos que $d\phi(e)$ es homomorfismo de álgebras de Lie. En efecto:
Si $A,B\in\mathfrak{g}$, $\bar{A}=d\phi(e)(A)$, $\bar{B}=d\phi(e)(B)$ es: $[\bar{\mathbb{A}},\bar{\mathbb{B}}]=[\phi_*\mathbb{A},\phi_*\mathbb{B}]=\phi_*[\mathbb{A},\mathbb{B}]$ y esto significa $[\bar{\mathbb{A}},\bar{\mathbb{B}}](\phi(x))=d\phi(x)([\mathbb{A},\mathbb{B}](x))$ para todo $x\in G$. En particular, tomando x=e

$$[\bar{A},\bar{B}]=[\bar{\mathbb{A}},\bar{\mathbb{B}}](\bar{e})=[\bar{\mathbb{A}},\bar{\mathbb{B}}](\phi(e))=d\phi(e)([\mathbb{A},\mathbb{B}](e))=d\phi(e)([A,B])$$

2.1.4 EJEMPLO

Hay un monomorfismo canónico $\varphi:GL(n,\mathbb{C})\longrightarrow GL(2n,\mathbb{R})$

Una matriz $C=A+Bi\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})$, $(A,B\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{R}))$ puede interpretarse como una aplicación $\mathbb{C}$-lineal:

$$\mathbb{C}^n\ni z=x+iy\longrightarrow Cz=(A+Bi)(x+yi)=(Ax-By)+(Bx+Ay)i\in\mathbb{C}^n$$

así a traves del isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal

$$\theta:\mathbb{C}^n\ni z=x+iy\longrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$$

queda $\theta(Cz)=C_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, donde $C_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}(2n,\mathbb{R})$. La aplicación:

$$\phi:\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\ni C=A+Bi\longrightarrow C_{\mathbb{R}}\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})$$

resulta ser trivialmente un homomorfismo de álgebras de Lie, y su restricción:

$$\varphi:GL(n,\mathbb{C})\ni c=a+bi\longrightarrow c_{\mathbb{R}}\in GL(2n,\mathbb{R})$$

es homomorfismo de grupos de Lie.

Se prueba trivialmente la identidad:

$$e^{C_{\mathbb{R}}}=(e^{C})_{\mathbb{R}}$$

por lo que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}GL(n,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & GL(2n,\mathbb{R})\\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp\\ \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})\end{array}$$

es conmutativo. en particular, debe ser $\phi=d\varphi(e)$.

2.1.5 COROLARIO

Si ϕ, $\psi:G\longrightarrow\bar{G}$ son homomorfismos entre grupos de Lie supongase G *conexo y*

$$d\phi(e)=d\psi(e)$$

entonces $\phi=\psi$.

Demostración:

El conjunto $F=\{x\in G:\phi(x)=\psi(x)\}$, es un conjunto cerrado. Además por la conmutatividad del diagrama de 2.1.3 se concluye que f=g en un entorno U de e. Pero entonces si $x\in F$, se verifica que $\phi=\psi$ en $L_x(U)=xU$, y así $xU\subset F$, y F es abierto. ■

2.1.5

El operador que hace corresponder a cada grupo de Lie G, su álgebra de lie $\mathfrak{g}$, y a cada homomorfismo $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ de grupos de lie, el homomorfismo $\phi_*=d\phi(e):\mathfrak{g}\longrightarrow\bar{\mathfrak{g}}$ entre sus correspondientes álgebras de Lie, define un funtor covariante entre la categoría de los grupos de Lie, y de las álgebras de Lie. La interrelación entre estas dos categorías, viene reforzada por la aplicación exponencial $\exp:\mathfrak{g}\longrightarrow G$ del álgebra de Lie en el grupo, que en virtud de 2.1.3 compatibiliza de forma natural con el funtor.

2.2 Homomorfismos continuos.

2.2.1 TEOREMA

Un homomorfismo continuo $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ de grupos de Lie, es diferenciable.

Demostración:

Obviamente, es suficiente probar que ϕ es diferenciable en un entorno del elemento neutro $e\in G$. Vayamos por partes:

A) Probemos primero que si $\varphi:(\mathbb{R},+)\longrightarrow G$ es homomorfismo continuo, φ es diferenciable. Tomemos un entorno estrellado $\mathbb{U}$ de $0\in\mathfrak{g}$, en donde la función exponencial $\exp:\mathbb{U}\longrightarrow U$ es difeomorfismo.

Sea $\mathbb{V}=\{X\in\mathfrak{g}:2X\in\mathbb{U}\}$, y $V=\exp(\mathbb{V})$. Como φ es continua, existe $\tau>0$, tal que:

$$\varphi(t)\in V \text{ si } -\tau\le t\le\tau$$

Sea $B\in V$ con

$$\exp(B)=\varphi(\tau)$$

Fijado un entero $n>1$ cualquiera, probaremos que $\exp(B/n)=\varphi(\tau/n)$. En efecto, sea $A\in\mathbb{V}$, tal que $\exp(A)=\varphi(\tau/n)$. Como:

$$\exp(nA)=\exp(A)^n=\varphi(\tau/n)^n=\varphi(n\tau/n)=\varphi(t)=\exp(B)$$

es suficiente comprobar que $nA\in\mathbb{V}$ para constatar que $nA=B$.

Pero como $2A\in\mathbb{U}$, y $\exp(2A)=\exp(A)^2=\varphi(2\tau/n)\in V$, entonces $2A\in\mathbb{V}$. Si $n>2$ se prueba de forma análoga que $3A\in\mathbb{V}$, y así sucesivamente. Así:

$$\exp(mB/n)=\exp(B/n)^m=\varphi(\tau/n)^m=\varphi(\tau m/n) \quad \text{para todo entero } 0<m\le n$$

por continuidad se concluye:

$$\varphi(\tau t)=\exp(tB)\ ,\ \text{y } \varphi(-\tau t)=\varphi(\tau t)^{-1}=\exp(-tB),\ \text{para } 0\le t\le 1$$

Haciendo $s=\tau t$ y $A=B/\tau$ queda:

$$\varphi(s)=\exp(sA) \text{ para } |s|<\tau$$

así φ es diferenciable en un entorno de 0.

B) Sea $(A_1,\dots,A_d)$ una base para $\mathfrak{g}$. La aplicación

$$\alpha:\mathbb{R}^d\ni(t_1,\dots,t_d)\longrightarrow\exp(t_1A_1)\dots\exp(t_dA_d)\in G$$

es diferenciable, y como:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t_k}(0)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(tA_k)=A_k$$

se concluye que induce difeomorfismo en un entorno $\mathbb{D}$ de $0\in\mathbb{R}^d$:

$$\alpha:\mathbb{R}^d\supseteq\mathbb{D}\longrightarrow U\subseteq G$$

La aplicación:

$$\varphi=\phi\circ\alpha:\mathbb{D}\ni(t_1,\dots,t_d)\longrightarrow\phi(\exp(t_1A_1))\dots\phi(\exp(t_dA_d))\in\bar{G}$$

es diferenciable ya que cada $t\longrightarrow\phi(\exp(tA_k)$ lo es. Así

$$\phi=\varphi\circ\alpha^{-1}:U\longrightarrow\bar{G}$$

es diferenciable ■.

2.2.2 COROLARIO

Un grupo topológico G, admite a lo más una única estructura diferenciable compatible con su topología.■

2.2.3

Como consecuencia 2.2.1, el problema de clasificación topológica de los grupos de Lie coincide con el de clasificación diferenciable.

Todo grupo topológico G que es localmente euclideo admite por tanto una única estructura de grupo de Lie. ■

2.3 Sobre las cubiertas de un grupo de Lie.

Cada grupo de Lie conexo G, tiene (como espacio topológico) una cubierta universal $\pi:\tilde{G}\longrightarrow G$, y $\tilde{G}$ admite una única estructura de grupo de Lie que hace a la proyección π homomorfismo de grupos de Lie.

2.3.1 TEOREMA

Si $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ es un homomorfismo de grupos de Lie, una condición necesaria y suficiente para que ϕ sea cubierta, es que induzca un isomorfismo $d\phi(e):\mathfrak{g}\longrightarrow\bar{\mathfrak{g}}$ entre las correspondientes álgebras de Lie.

Demostración:

Si ϕ es una cubierta, entonces es difeomorfismo local, y en particular $d\phi(e)$ es isomorfismo lineal, y de álgebras de Lie.

Recíprocamente, si $d\phi(e)$ es isomorfismo, se construye el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ \phi\ } & \bar{U} \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{d\phi(e)} & \bar{\mathcal{U}} \end{array}$$

donde los vértices son abiertos y la exponencial es difeomorfismo. En particular $\ker\phi\cap U=\{e\}$, $\phi^{-1}(\bar{U})$ es unión disjunta de σU cuando $\sigma\in\ker\phi$, y ϕ induce difeomorfismo $\phi:\sigma U\longrightarrow\bar{U}$. Esta misma situación se repite sobre cualquier $a\in G$, por traslación a la izquierda.■

2.3.2

Se prueba que un epimorfismo $\phi:\hat{G}\longrightarrow G$ entre grupos de Lie es un cubierta, si y solo si el núcleo $\ker\phi=D$, es un subgrupo discreto de G. Además, si ϕ es cubierta universal, entonces hay un isomorfismo natural de grupos discretos

$$D\longrightarrow\pi_1(G,e)$$

como todo todo subgrupo normal discreto de un grupo de lie está contenido en su centro, se concluye que el grupo fundamental de G es abeliano. En particular el grupo $\pi_2(G)=0$.

2.4 Sobre el problema de clasificación de los grupos de Lie.

Un primer resultado fundamental, es el siguiente:

2.4.1 TEOREMA

Sean G y $\bar{G}$ grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ respectivamente. Supóngase G simplemente conexo. Si $\Phi:\mathfrak{g}\longrightarrow\bar{\mathfrak{g}}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, existe entonces un único homomorfismo $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ tal que $d\phi(e)=\Phi$.

Demostración

Si existe ϕ, entonces su grafo $F=\{(x,\phi(x)):x\in G\}$ resulta ser un subgrupo del grupo de Lie producto $G\times\bar{G}$, con álgebra de Lie $\mathfrak{f}$ que es la subálgebra del producto $\mathfrak{g}\times\bar{\mathfrak{g}}$ definida por el grafo de Φ, es decir, $\mathfrak{f}=\{(A,\Phi(A)):A\in\mathfrak{g}\}$.
Es natural pues, empezar tomando la subálgebra $\mathfrak{f}=\{(A,\Phi(A)):A\in\mathfrak{g}\}$ de $\mathfrak{g}\times\bar{\mathfrak{g}}$. Veremos en la próxima lección (4.3.7) que existe un único subgrupo de Lie F de $G\times\bar{G}$ que tiene a $\mathfrak{f}$ por álgebra de Lie. Se define entonces el homomorfismo

$$\varphi:F\ni(x,\bar{x})\longrightarrow x\in G$$

que induce el isomorfismo de álgebras de Lie:

$$d\varphi(e):\mathfrak{f}\ni(A,\Phi(A))\longrightarrow A\in\mathfrak{g}$$

Por tanto $\varphi:F\longrightarrow G$ es una cubierta, y por ser G simplemente conexo, resulta isomorfismo. Se define entonces ϕ por la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\bar{\pi}"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\ & \bar{G} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{\pi}$ es la restricción de la proyección $G\times\bar{G}\longrightarrow\bar{G}$ a F.■

2.4.2 COROLARIO

Dos grupos de Lie simplemente conexos son isomorfos, si y solo si son isomorfas sus correspondientes álgebras de Lie.

2.4.3

Un teorema de Ado prueba que cualquier álgebra $\mathfrak{g}$ de Lie de dimensión finita, puede sumergirse en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ para n suficientemente grande.
Usando 3.3.2 (en la siguiente lección) se concluye que hay un grupo de Lie G (subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$)que tiene a $\mathfrak{g}$ por álgebra de Lie, y tomando su recubridor universal $\tilde{G}$ se concluye que hay (salvo isomorfía) un único grupo de Lie simplemente conexo que tiene a $\mathfrak{g}$ por álgebra de Lie.

En consecuencia la clasificación de los grupos de Lie simplemente conexos equivale a la de las álgebras de Lie.

2.4.4

Fijado un grupo de Lie simplemente conexo $\tilde{G}$, la determinación (salvo automorfismos de $\tilde{G}$) de todos los subgrupos discretos normales Γ de $\tilde{G}$ permite obtener salvo isomorfismo todos los grupos de Lie G a los cuales recubre (de forma que $G=\tilde{G}/\Gamma$).

Duda: Si Γ y $\bar{\Gamma}$ son subgrupos discretos normales isomorfos de $\tilde{G}$, ¿son necesariamente $\tilde{G}/\Gamma$ isomorfo a $\tilde{G}/\bar{\Gamma}$? **Respuesta: No.** ¿contraejemplo?

2.4.5 EJEMPLO

$\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$ constituye un grupo de Lie con la multiplicación de los números complejos. La aplicación

$$\varphi:(\mathbb{R},+)\ni t \longrightarrow \exp(i2\pi t)=\cos 2\pi t+i\operatorname{sen} 2\pi t\in\mathbb{S}^1$$

es homomorfismo recubridor, cuyo núcleo es el grupo discreto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

El ejemplo puede *multiplicarse por si mismo* tantas veces como se quiera. El producto $T^d=\mathbb{S}^1\times\ldots\times\mathbb{S}^1$ es un grupo de lie (el d-toro), y la aplicación producto: $\varphi^d:\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \longrightarrow T^d$ es aplicación recubridora.

2.4.6

Busquemos todos los subgrupos discretos del grupo aditivo de $\mathbb{R}^m$ para determinar después todos los grupos que se dejan recubrir por él. Se tiene el siguiente resultado:

Si Γ es un subgrupo aditivo cerrado y discreto de $\mathbb{R}^m$, entonces: Existen $(u_1,\ldots,u_d)\subset\mathbb{R}^m$ linealmente independientes de forma que

$$\Gamma=\{m_1u_1+\ldots+m_du_d:\ m_1,\ldots,m_d\in\mathbb{Z}\}$$

por otra parte, el cardinal d está unívocamente determinado por Γ.

Demostración:

Es suficiente probar que Γ es un grupo finitamente generado, ya que entonces como no tiene torsión (por el teorema de clasificación correspondiente) será grupo libre con rango d, y admite una $\mathbb{Z}$-base formada por d vectores.

Si V es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por Γ, elijamos $(v_1,\ldots,v_k)\subset\Gamma$ base de V. Sea Γ_1 el subgrupo aditivo (de Γ) generado por $(v_1,\ldots,v_k)$. Podemos identificar V con $\mathbb{R}^k$, $(v_1,\ldots,v_k)$ con la base canónica y Γ_1 con $\mathbb{Z}^k$. El espacio $\mathbb{T}^k=\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ es compacto, y $\Gamma/\Gamma_1\subset\mathbb{T}^k$. Probemos que Γ/Γ_1 es finito:

En efecto, dado $w+\Gamma_1\in\Gamma/\Gamma_1$, existe un $w'\in Q=[0,1]^k\cap\Gamma$ tal que $w'+\Gamma_1=w+\Gamma_1$. Si para cierto $v+\Gamma_1\in\Gamma/\Gamma_1$, el correspondiente $v'\in Q$ coincide con w', entonces

$$v+\Gamma_1=v'+\Gamma_1=w'+\Gamma_1=w+\Gamma_1$$

Así se ha establecido una aplicación inyectiva $\Gamma/\Gamma_1 \longrightarrow Q$. Si Γ/Γ_1 es infinito se concluye por ser Q compacto, que hay una sucesión infinita $w_k\in Q$ que converge a $w\in Q$, (y $Q\subseteq\Gamma$) lo cual contradice el hecho de que Γ sea discreto.

Si $\Gamma/\Gamma_1=\{w_1+\Gamma_1,\ldots,w_r+\Gamma_1\}$ entonces Γ está generado por

$$(v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_r)$$

2.4.7 COROLARIO

Si G es un grupo conexo de Lie, cuyo recubridor universal es $\mathbb{R}^m$ *entonces existe un entero* $0\le d\le m$ *de forma que G es isomorfo a* $T^d\times\mathbb{R}^{m-d}$.

En la siguiente lección comprobaremos que este es el caso de todos los grupos abelianos *conexos* de Lie.

2.5 El grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ como recubridor doble de SO(3).

La esfera $\mathbb{S}^3$, tiene estructura de grupo de Lie cuando se considera como el conjunto de los cuaterniones unitarios:

$$\mathbb{S}^3=\{z\in\mathbb{H}: |z|=1\}$$

recuerdese que $\mathbb{H}$ es el álgebra asociativa real generada por $(1,i,j,k)$ con las relaciones $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$, y con el producto escalar ordinario que hace a $(1,i,j,k)$ base ortonormal positiva, se transforma en un espacio vectorial euclídeo orientado.
Llamando $\vec{\mathbb{H}}=\mathrm{Span}(i,j,k)$, un elemento $a\in\mathbb{H}$, se escribirá de la forma: $a=(a_0,\vec{a})$ con $a_0\in\mathbb{R}$ y $\vec{a}\in\vec{\mathbb{H}}$ y la suma y producto de cuaternios adopta la forma, para $a,b\in\mathbb{H}$:

$$a+b=(a_0+b_0,\vec{a}+\vec{b}),\quad ab=(a_0b_0-\vec{a}.\vec{b},\ a_0\vec{b}+b_0\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b})$$

Identificando SO(3) con el grupo de transformaciones ortogonales $SO(\vec{\mathbb{H}})$ con determinante 1, se tiene:

Si $q\in\mathbb{H}^*$, *entonces para cada* $x\in\vec{\mathbb{H}}$ *es* $qxq^{-1}\in\vec{\mathbb{H}}$ *y la aplicación:*

$$\rho_q:\vec{\mathbb{H}}\ni x\longrightarrow qxq^{-1}\in\vec{\mathbb{H}}$$

es un elemento de SO(3). Por otra parte, la aplicación:

$$\rho:\mathbb{H}^*\ni q\longrightarrow\rho_q\in SO(\vec{\mathbb{H}})$$

es un epimorfismo con núcleo $\mathbb{R}^*$. *Finalmente, la restricción:*

$$\rho:\mathbb{S}^3\ni q\longrightarrow\rho_q\in SO(\vec{\mathbb{H}})$$

es un epimorfismo con núcleo $\{-1,1\}$.

<u>Idea de la Demostración</u>:

Nótese que para $q\in\mathbb{H}^*$, $x\in\vec{\mathbb{H}}$ es $(qxq^{-1})^2=qx^2q^{-1}=x^2=-|x|^2$, ya que si x es cuaternio puro entonces x^2 es real, y los números reales constituyen el centro del grupo multiplicativo $\mathbb{H}^*=\mathbb{H}-\{0\}$ de los cuaternios. Así ρ_q define una transformación ortogonal en $\vec{\mathbb{H}}$ que es homomorfismo. Además $\rho_q=\mathrm{id}\Leftrightarrow q\in\mathbb{R}^*$.

Analicemos para $q\in\mathbb{S}^3$, la transformación ortogonal $\rho_q:\vec{\mathbb{H}}\longrightarrow\vec{\mathbb{H}}$, veamos que es un giro:

Como $|q|^2=q_0^2+|\vec{q}|^2$, existe un único ángulo ϑ con $q_0=\cos\vartheta$, $|\vec{q}|=\mathrm{sen}\ \vartheta$.

Probaremos que ρ_q es un giro de eje orientado $\langle\vec{q}\rangle$ y ángulo 2ϑ.

Supongamos por ejemplo $\vec{q}$ proporcional a i. Se tiene entonces:

$$q=\cos\vartheta+i\ \mathrm{sen}\ \vartheta$$

$\rho_q(i)=qiq^{-1}=i$ (identidad en $\mathbb{C}=\mathrm{span}(1,i)$)

$\rho_q(j)=qjq^{-1}=(\cos\vartheta+i\ \text{sen}\ \vartheta)j(\cos\vartheta-i\ \text{sen}\ \vartheta)=j\cos 2\vartheta+k\ \text{sen}\ 2\vartheta$

$\rho_q(k)=qkq^{-1}=(\cos\vartheta+i\ \text{sen}\ \vartheta)k(\cos\vartheta-i\ \text{sen}\ \vartheta)=k\cos 2\vartheta-j\ \text{sen}\ 2\vartheta$

que corresponde a la representación matricial del giro anunciado.■

En consecuencia

a) La aplicación $\rho:\mathbb{S}^3\longrightarrow SO(3)$ es un recubridor de dos hojas para $SO(3)$.

b) La aplicación

$$\rho_*: s^3\ni q_1 i+q_2 j+q_3 k\longrightarrow\begin{pmatrix} o & -2q_3 & 2q_2 \\ 2q_3 & o & -2q_1 \\ -2q_2 & 2q_1 & o \end{pmatrix}\in so(3)$$

coincide con $d\rho(e)$ y define (por tanto) isomorfismo de álgebras de Lie.

2.6 **El grupo $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ como recubridor doble de SO(4).**

2.7 **Los grupos de spinores Spin(n) recubridores de SO(n)**

LECCION II

§3 SUBGRUPOS Y SUBALGEBRAS.

3.0 **Sobre Subvariedades, Hojas, y Distribuciones.**

DEFINICION 3.0.1

Sea M es variedad diferenciable de dimensión n. Un subconjunto N de M se dirá variedad sumergida en M, si N admite una estructura de variedad diferenciable, de forma que:

(1) La inclusión $\iota_N: N \longrightarrow M$ *es inmersión.*

Si se verifica además la condición:

(2) La topología de N como variedad diferenciable coincide con la inducida por M.

se dirá que N es subvariedad de M.

La propiedad notable, es que el hecho de ser subvariedad de M, depende solo del subconjunto (abstracto) N de M, es decir si el subconjunto N tiene estructura de subvariedad, esta es única.

Por necesidades técnicas, estableceremos un concepto intermedio *hoja* de M, que mantiene la propiedad notable anterior:

3.0.2 DEFINICION

Un subconjunto N de la variedad diferenciable M, se llama hoja de dimensión d<n, si para cada punto $p\in N$*, existe una carta* (U,φ) *adaptada a N, es decir, si denotamos* $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_d)$, $\hat{x}=(x_{d+1},\ \ ,x_n)$, $d+r=n$:

(1) $\varphi(U)=\tilde{U}\times\hat{U}=\{(\tilde{x},\hat{x}):\ \tilde{x}\in\tilde{U},\ \hat{x}\in\hat{U}\}$, $\tilde{U}\subseteq\mathbb{R}^d$, $\hat{U}\subseteq\mathbb{R}^r$ *abiertos,* $\varphi(p)=(\tilde{0},\hat{0})$

(2) $\varphi(U\cap N)$ *es unión de una cantidad a lo más numerable de hojas* $\tilde{U}\times\{\hat{c}\}$, $\hat{c}\in\hat{U}$.

3.0.3 OBSERVACIONES

A) En estas condiciones, cada componente conexa de V de $U\cap N$ se proyecta por φ sobre una única hoja $\tilde{U}\times\{\hat{c}\}$, y $\varphi|V: V\longrightarrow\tilde{U}\times\{\hat{c}\}$ define una carta en N.

Las cartas de N obtenidas por este procedimiento, constituyen un atlas que da a N estructura de variedad diferenciable, y la inclusión

$$\iota_N: N\longrightarrow M$$

resulta ser diferenciable.

B) Toda subvariedad diferenciable N de M (en el sentido de 3.0.1) es una hoja, pues admite por cada punto una carta adaptada (U,φ) tal que $\varphi(U\cap N)$ es una única hoja $\tilde{U}\times\{\hat{0}\}$.

Se tiene para las hojas la siguiente propiedad universal:

3.0.4 TEOREMA

Sea N una hoja de la variedad M, y P variedad. Considerese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & N \arrow[d, "\iota_N"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Si Φ es diferenciable, se concluye que ϕ también lo es.

Demostración:

Sea $p\in P$, $\phi(p)=q\in N$, y (U,φ) una carta de M adaptada a N. Sea W la componente conexa de $\Phi^{-1}(U)$ que contiene a p. Entonces $\Phi(W)\subset U\cap N$ es conexo por caminos, y está contenida por tanto en una hoja $V=\varphi^{-1}(\tilde{U}\times\{\hat{c}\})$. Pero entonces $\varphi\circ\Phi=(\varphi|V)\circ\phi:W\longrightarrow\tilde{U}\times\{\hat{c}\}\subset\tilde{U}\times\hat{U}$, que es diferenciable por hipótesis, y como $(V,\varphi|V)$ es carta de N, ϕ es diferenciable en W.■

Prepararemos ahora una versión adecuada del teorema de Frobenius.

3.0.5 DEFINICION

A) Una distribución d-dimensional sobre una variedad diferenciable M de dimensión n ($d<n$) es una asignación $\mathfrak{D}$ que hace corresponder a cada punto $p\in M$ un subspacio $\mathfrak{D}(p)$ de dimensión d de T_pM, verificando la siguiente condición de diferenciabilidad: En un entorno U de cada punto existen campos $(X_1,\dots,X_d)$ con $X_k\in\mathfrak{X}(U)$, tales que $(X_1(x),\dots,X_d(x))$ forman base de $\mathfrak{D}(x)$ para todo $x\in U$.

B) Un campo $X\in\mathfrak{X}(M)$ se dice que está en la distribución ($X\in\mathfrak{D}$) si $X(x)\in\mathfrak{D}(x)$ para todo $x\in M$.

C) Se dice que $\mathfrak{D}$ es involutiva, si para todo $X,Y\in\mathfrak{D}$ es $[X,Y]\in\mathfrak{D}$.

D) Una variedad integral de $\mathfrak{D}$, es una variedad conexa N sumergida en M que verifica la propiedad:

$$T_pN=\mathfrak{D}(p) \text{ para todo } p\in N$$

Se dice que N es variedad integral maximal, si no existe otra que la contenga estrictamente.

3.0.6 TEOREMA (de Frobenius)

Sea $\mathfrak{D}$ una distribución d-dimensional de la variedad diferenciable M con dimensión $n>d$. Entonces:

a) Son equivalentes las afirmaciones:

i) $\mathfrak{D}$ es involutiva.

ii) Por cada $p\in M$, existe una variedad integral.

b) Por otra parte, si $\mathfrak{D}$ es involutiva existe por cada punto $p\in M$ una única variedad integral maximal. Además, las variedades integrales maximales son hojas de M. ■

3.0.7 OBSERVACION

La parte dura de la demostración de 3.0.6 está en probar que si $\mathfrak{D}$ es distribución involutiva, en cada punto $p\in M$ existe una carta (U, φ) adaptada a la distribución, es decir (con la notación de 3.0.2):

(1) $\varphi(U)=\tilde{\mathbb{U}}\times\hat{\mathbb{U}}=\{(\tilde{x},\hat{x}):\ \tilde{x}\in\tilde{\mathbb{U}},\ \hat{x}\in\hat{\mathbb{U}}\}$, $\tilde{\mathbb{U}}\subseteq\mathbb{R}^d$, $\hat{\mathbb{U}}\subseteq\mathbb{R}^r$ abiertos, $\varphi(p)=(\tilde{0},\hat{0})$

(2) $\varphi^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{\hat{c}\})$, $\hat{c}\in\hat{\mathbb{U}}$ son variedades integrales de $\mathfrak{D}$.

3.1 **Subgrupos de un Grupo de Lie**

3.1.1

Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo de Lie de G, es un subconjunto H de G que tiene estructura de grupo de Lie de forma que la aplicación inclusión: $\iota_H: H\ni a\longrightarrow a\in G$ es monomorfismo de grupos de Lie.

Si la topología de H como variedad diferenciable, coincide con la inducida como subespacio topológico de G, se dice que H es subgrupo regular.

3.1.2

Los subgrupos regulares del grupo de Lie G, vienen caracterizados por ser subgrupos abstractos H de G que son subvariedades diferenciables. En efecto:
a) Si H es subgrupo abstracto y subvariedad de G, entonces tiene estructura de variedad diferenciable y las aplicaciones $H\times H\ni(a,b)\longrightarrow ab\in H$ y $H\ni a\longrightarrow a^{-1}\in H$ son diferenciables ya que son restricción de $G\times G\ni(a,b)\longrightarrow ab\in G$ y $G\ni a\longrightarrow a^{-1}\in G$.
b) Recíprocamente, ...

3.1.3

Si H y G son grupos de Lie, y $\varphi: H\longrightarrow G$ es un monomorfismo de grupos de Lie, entonces $\varphi(H)$ con la estructura diferenciable que hace $\varphi: H\longrightarrow\varphi(H)$ difeomorfismo es un subgrupo de Lie de G.

3.1.4 EJEMPLO

Fijado $r>0$, la aplicación:

$$\varphi: (\mathbb{R},+)\ni t\longrightarrow(\exp(2\pi t),\exp(2\pi rt))\in T^2$$

es un monomorfismo de grupos de Lie, y su imagen H es densa en G, cuando r es irracional. H es pues un subgrupo de Lie no regular de T^2.

3.1.5

Si G es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces, la componente conexa G_0 de G que contiene al elemento neutro $e\in G$, es subgrupo de Lie abierto de G, con la misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

3.2 **Subálgebras de Lie**

3.2.1 DEFINICION

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, es un subespacio vectorial abstracto $\mathfrak{h}$ que además preserva el corchete, es decir:

$$\text{Si } A,B\in\mathfrak{h} \Rightarrow [A,B]\in\mathfrak{h}$$

$\mathfrak{h}$ tiene por si mismo estructura de álgebra de Lie, y la aplicación inclusión:

$$\iota_{\mathfrak{h}}:\mathfrak{h}\ni A \longrightarrow A\in\mathfrak{g}$$

es homomorfismo de álgebras de Lie.

3.2.2

Si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ son álgebras de Lie, y $\phi:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}$ es un monomorfismo de álgebras de Lie, entonces $\phi(\mathfrak{h})$ es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

3.3 **Relación entre subgrupos y subálgebras.**

3.3.1 TEOREMA

Sea G es un grupo de Lie y H subgrupo de Lie de G. Entonces $\mathfrak{h}=T_eH$ *álgebra de Lie de H es subálgebra de* $\mathfrak{g}=T_eG$ *álgebra de Lie de G, y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\iota_H"] & G \\ \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp_H"] \arrow[r, "\iota_{\mathfrak{h}}"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

es decir $\exp_H=\exp|\mathfrak{h}$ *. En particular, si* $A\in\mathfrak{h}$*, el campo* $\mathbb{A}_H\in\mathcal{L}(H)$ *con* $\mathbb{A}_H(e)=A$*, se obtiene por restricción de* $\mathbb{A}\in\mathcal{L}(G)$ *a H*

Finalmente, si H_1 *y* H_2 *son subgrupos de Lie conexos con la misma subálgebra de Lie* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$*, entonces* $H_1=H_2$ *como grupos de Lie.*

Demostración:

Como $\iota_H:H\longrightarrow G$ es un homorfismo inyectivo entre grupos de Lie, y $d\iota_H(e)=$ $=\iota_{\mathfrak{h}}:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}$ es la inclusión, por 2.1.3 se concluye que $\mathfrak{h}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, y el diagrama es conmutativo. En particular

$$a\exp(tA)=a\gamma_A(t)\in H \text{ para todo } A\in\mathfrak{h},\ a\in H$$

Así las curvas integrales de $\mathbb{A}_H$ lo son de $\mathbb{A}$, y los campos $\mathbb{A}_H$ y $\mathbb{A}$ están ι_H-relacionados.

La última afirmación se prueba teniendo en cuenta que la conmutatividad del diagrama implica que H_1 y H_2 tienen un entorno V de e en común, y $H_1\cap H_2$ es por tanto (usando traslaciones a la izquierda) un abierto y cerrado de H_1.■

3.3.2 TEOREMA

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$*, y* $\mathfrak{h}$ *una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Existe entonces un único subgrupo de de Lie conexo H de G con álgebra de Lie* $\mathfrak{h}$.

Idea de la Demostración:

Para cada $a\in G$ $\mathfrak{h}_a=\{\mathbb{A}(a):a\in\mathfrak{h}\}=dL_a(\mathfrak{h})$ constituye un subespacio vectorial de dimensión $c=\dim \mathfrak{h}$ de T_aG, y el conjunto $\mathfrak{D}=\{X\in\mathfrak{X}(G):\ X(a)\in\mathfrak{h}_a$ para todo $a\in G\}$, constituye una subálgebra de Lie del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(G)$. Para ver esto basta observar que $\mathfrak{D}$ está $\mathbb{R}$-generado por $(\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_c)$ siendo $(A_1,\dots,A_c)$ base de $\mathfrak{h}$.

Por el Teorema de Frobenius (3.0.6) se concluye que hay una variedad integral maximal H por e (es decir $T_aH=\mathfrak{h}_a$ para todo $a\in H$). Pero por ser $\mathfrak{D}$ invariante por traslaciones a la izquierda, se concluye que para todo $a\in H$, aH es también variedad integral por a, y así $aH=H$, y $a^{-1}H=H$, por lo que H es un subgrupo (abstracto) y hoja de G. La demostración se concluye con el siguiente

3.3.3 LEMA:

Si H es subgrupo abstracto de un grupo de Lie G, y H es hoja de G, entonces H es subgrupo de Lie de G.

Demostración:

Basta observar que $H\times H\ni(a,b)\longrightarrow ab^{-1}\in H$ es la restricción de $G\times G\ni(a,b)\longrightarrow ab^{-1}\in G$, y tener en cuenta la propiedad universal 3.0.4 de las hojas.

3.3.4 TEOREMA

Supóngase H subgrupo abstracto de un grupo de Lie G. Si H admite una estructura de variedad diferenciable tal que $\iota_H:H\longrightarrow G$ es inmersión, entonces esta estructura es única, y hace a H subgrupo de Lie y hoja de G.

Idea de la demostración:

Supóngase H dotado de tal estructura diferenciable, con dimensión c, y sea $\mathfrak{h}=T_eH$. Sea $\mathfrak{h}_a=dL_a(\mathfrak{h})$ y $\mathfrak{D}$ como en 3.3.2. Se trata de probar que $\iota_H:H\longrightarrow G$ es variedad integral maximal de $\mathfrak{D}$. Entonces por construcción aH es variedad integral de $\mathfrak{D}$ para todo a, y $\mathfrak{D}$ será distribución involutiva, y por tanto hoja. Aplíquese ahora el LEMA 3.3.3.

El punto delicado de la demostración está en probar que no existe una curva diferenciable $\gamma:I_\varepsilon\longrightarrow G$ diferenciable con $\gamma(I_\varepsilon)\subset H$, $\gamma(0)=e$, $\gamma'(0)\notin\mathfrak{h}$. Si así fuera, tomando $\gamma_k:I_\varepsilon\longrightarrow H$ diferenciables $\gamma_k(0)=e$ $(\gamma'_1(0),\dots,\gamma'_c(0))$ linealmente independientes, la aplicación:

$$I_\varepsilon^{c+1}\ni(t_1,\dots,t_c,t)\longrightarrow\gamma_1(t_1)\dots\gamma_c(t_c)\gamma(t)\in G$$

tiene imagen contenida en H y con "dimensión" c+1. No es posible.

Esto prueba (por traslación a la izquierda) que $\mathfrak{h}_a\subseteq T_aH$, y ambos coinciden por razón de dimensiones. El resto de la demostración es automática.■

Uniendo este resultado a 3.3.3 tenemos:

3.3.5 COROLARIO

Todo subgrupo H de Lie de un grupo de Lie G es la hoja de una distribución $\mathfrak{D}$ generada por traslaciones a la izquierda de su álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. En particular aH a∈G son las variedades integrales maximales de $\mathfrak{D}$, y en cada punto x∈G puede encontrarse una carta (U,φ) adaptada a la distribución, con $\varphi(x)=(\tilde{0},\hat{0})$ donde cada hoja $\varphi^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{c\})$ $c\in\hat{\mathbb{U}}$ es de la forma $\varphi(U\cap(aH))$ para algun a∈G.

3.3.6 DEFINICION

Una carta como la anterior, se denomina carta de G adaptada H por x. Se denomina a $S_c(\varphi)=\varphi^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{c\})$ $c\in\hat{\mathbb{U}}$, *hoja de φ a nivel c.*

3.3.7

Si bien en una variedad diferenciable M puede haber variedades sumergidas que no son hojas (piensese en la clásica figura del 8 en $\mathbb{R}^2$), el teorema anterior afirma que no existen grupos de Lie sumergidos que no sean hojas.

El hecho notable es que toda la información sobre un subgrupo de Lie H de un grupo de Lie G, (topología, estructura diferenciable ,...etc) puede deducirse del subconjunto H de G. Por tanto podría decirse ahora que un subgrupo de Lie de G, es un subconjunto H que "hereda" de G estructura de grupo de Lie.

3.3.8 COROLARIO

Existe una correspondencia biyectiva entre las subálgebras de Lie del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G, y sus subgrupos de Lie conexos.■

3.3.9

Supóngase G grupo de Lie simplemente conexo, y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, y sean $\mathfrak{h}$ subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, y H subgrupo de Lie de G, ligados por la correspondencia anterior. ¿Es necesariamente H simplemente conexo?.

La respuesta es genéricamente afirmativa, para grupos de lie G resolubles (existe r>0 con $D^rG=\{e\}$, siendo $DG=[G,G]=\mathrm{Span}\{aba^{-1}b^{-1}:a,b\in G$, $D^rG=D(D^{r-1}G))$ (Varadajan 3.18.2)

También es cierta para G arbitrario, y $\mathfrak{h}$ ideal de $\mathfrak{g}$. (Varadajan 3.18.12)

3.4 **Subgrupos cerrados.**

El resultado fundamental, es que un subgrupo abstracto de un grupo de lie, si es cerrado, entonces es subgrupo regular de Lie. Nuevamente experimentamos el fenómeno de cómo, en un grupo de Lie una condición topológica implica condiciones de diferenciablidad.

3.4.1 LEMA

Si H es un subgrupo de Lie del grupo de Lie G, entonces si H es cerrado, H es subgrupo regular.

Idea de la demostración:

Si H es subgrupo cerrado, para ver que es subgrupo regular, bastaría encontrar alguna carta adaptada a H de una sola hoja. Tomemos de momento (U,φ) carta adaptada por e a H, donde $\varphi(U)=\tilde{\mathbb{U}}\times\hat{\mathbb{U}}$, $\varphi(e)=(\tilde{0},\hat{0})$ y $\varphi(U\cap H)$ es unión de una cantidad (a lo más numerable) de hojas $\tilde{\mathbb{U}}\times\{\hat{c}\}$. Como $\varphi(U\cap H)$ es cerrado, alguna de estas hojas debe estar aislada (hay que usar el teorema de Baire), y proporciona por restricción una carta de una sola hoja. ■

Para ver el recíproco, necesitamos el siguiente:

LEMA 3.4.2

Sea H es subgrupo de Lie del grupo de Lie G, si H es regular, entonces existe por $e\in G$ una carta (U,φ) adaptada a H de forma que las hojas $\varphi^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{c\})$ definan clases diferentes de G/H para cada $c\in\hat{\mathbb{U}}$.

Se denomina a (U,φ) carta regular adaptada a H por e.

Demostración:

Como H es subvariedad regular, podemos tomar (U,φ) carta adaptada a H por e de forma que *el nivel* o de φ, $S_0=\varphi^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{\hat{0}\})$ coincida con $U\cap H$. Sean W y V entornos "cúbicos" de e tales que

$$WW\subseteq U,\quad V^{-1}V\subseteq W$$

Entonces dos puntos $a, b\in V$ con $aH=bH$ están *en la misma hoja de* φ, ya que $b^{-1}a\in W\cap S_0$, y por tanto $a\in b((W\cap S_0)$, pero $b((W\cap S_0)$ es un conjunto conexo de U contenido en bH, y contenido por tanto en una sola hoja de φ.■

TEOREMA 3.4.3

Si H es un subgrupo de Lie del grupo de Lie G, entonces H es regular, si y solo si es cerrado.

Demostración

Si H es subgrupo regular de Lie de G, y no es cerrado, podemos suponer que hay una sucesión a_k en H con $a_k\longrightarrow a$. Podemos tomar por $e\in G$ una carta regular (U,φ) adaptada a H . Así $(aU,L_a\circ\varphi=\varphi_a)$ es una carta regular por a adaptada a H, y todos los $a_k\in aU$ definen la misma clase H, y están en la misma hoja $\varphi_a^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{\hat{c}_1\})$. Por continuidad $a\in\varphi_a^{-1}(\tilde{\mathbb{U}}\times\{\hat{c}_1\})$, y define la clase H. Así $a\in H$.

3.4.4 TEOREMA

Si H es un subgrupo abstracto del grupo de Lie G una condición suficiente para que H sea subgrupo regular de Lie, es que exista $\mathfrak{h}$ subespacio vectorial de T_eG y entornos $\mathbb{U}$ de 0 en T_eG, y U de e en G tal que $exp:\mathbb{U}\longrightarrow U$ es difeomor-

fismo y

$$exp(\mathbb{U}\cap\mathfrak{h})=U\cap H$$

En estas condiciones $\mathfrak{h}$ *es el álgebra de Lie de H.*

Demostración:

De hecho es posible dar a H una estructura de variedad diferenciable que hace a H subvariedad de G. Basta para ello tomar la carta

$$\varphi^{-1}=\exp:\mathbb{U}\cap\mathfrak{h}\longrightarrow U\cap H$$

y el atlas $\mathcal{U}=\{(U_a,\varphi_a):\ a\in H\}$ con $U_a=(H\cap(aU)$, $\varphi_a=\varphi\circ L_{a^{-1}}$

Por 3.3.4 se concluye que H es subgrupo de Lie.

3.4.5 TEOREMA

Sea H un subgrupo cerrado abstracto *del grupo de Lie G. Entonces H es subgrupo de Lie regular de G.*

Demostración:

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Se considera $\mathfrak{h}=\{A\in\mathfrak{g}:\exp(tA)\in H,\ \forall t\in\mathbb{R}\}$. Se trata de ver que H y $\mathfrak{h}$ están en las condiciones de 3.4.2. Probar esto, es delicado, y necesita de la ayuda de algunos resultados técnicos que pueden probarse fácilmente si se usa el siguiente esquema gradual:

3.4.5.1 Supóngase $A,B\in\mathfrak{g}$ entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(tA)\exp(tB)=A+B$$

3.4.5.2 Supóngase $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$. La aplicación:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}\cong\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\ni(A,B)\longrightarrow\exp(A)\exp(B)\in G$$

define un difeomofismo en un entorno del origen.

3.4.5.3 Si $A,B\in\mathfrak{g}$, entonces para $|t|<\varepsilon$,

$$\exp(tA)\exp(tB)=\exp(t(A+B)+O(t^2))$$

donde $O(t^2)/t^2$ es una función acotada.

3.4.5.4 Para $A,B\in\mathfrak{g}$ y todo $t\in\mathbb{R}$ se tiene

$$\lim\left\{\exp\left(\frac{t}{n}A\right)\exp\left(\frac{t}{n}B\right)\right\}^n=\exp(t(A+B))$$

Esta última fórmula, y el hecho de que H sea cerrado, permite probar que si $A,B\in\mathfrak{h}$ entonces $A+B\in\mathfrak{h}$, y en particular que $\mathfrak{h}$ es subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.

3.4.5.5 Supongamos que hay una sucesión (A_k) *(en* $\mathfrak{g}$*) tal que:*

$$exp(A_k)=a_k\in H,\ \ y\ \ (A_k)\longrightarrow 0$$

tomando (una norma en $\mathfrak{g}$ *y) una subsucesión, podemos suponer que* $A_k/\|A_k\|=X_k$ *es sucesión convergente hacia* $A\in\mathfrak{g}$*. Se concluye entonces que* $A\in\mathfrak{h}$*.*

La demostración del teorema se concluye así: Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$, entonces, no hay nada que probar. Supóngase pues que $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$.

Si no existe $\mathbb{U}$ entorno de $0\in\mathfrak{g}$ con $\exp:\mathbb{U}\longrightarrow U$ difeomorfismo y $\exp(\mathbb{U}\cap\mathfrak{h})=U\cap H$, entonces podemos asegurar la existencia de la sucesión A_k en $\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$ verificando las hipótesis de 3.4.5.5. Sea $\mathfrak{b}$ un subespacio complementario de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A_k\notin\mathfrak{b}$ para todo k (caso contrario, usando 3.4.5.5, se concluiría que hay una dirección de $\mathfrak{b}$ en $\mathfrak{h}$). Usando 3.4.5.2, podemos admitir que hay un difeomorfismo

$$\mathbb{V}_{\mathfrak{h}}\times\mathbb{V}_{\mathfrak{b}}\ni(A,B)\longrightarrow\exp(A)\exp(B)\in V$$

donde $\mathbb{V}_{\mathfrak{h}}$, $\mathbb{V}_{\mathfrak{b}}$ son entornos de 0 en $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{b}$, y V entorno de e en G.
Así para k suficientemente grande se tiene que $a_k=\exp(A_k)\in V$

$$H\ni a_k=\exp(X_k)\exp(B_k) \text{ para } X_k\in\mathfrak{h}, \text{ y } B_k\in\mathfrak{b}$$

pero com H es subgrupo (abstracto) se concluye que $\exp(B_k)\in H$, y por 3.4.3.5 se concluye (nuevamente) que hay una dirección de $\mathfrak{b}$ que está en $\mathfrak{h}$, lo cual contradice $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{b}=\{0\}$.

3.4.6 COROLARIO

Sea H subgrupo cerrado del grupo de Lie G, y $\mathfrak{h}$ subálgebra de Lie del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Entonces (por 3.4.3) H es subrupo regular de Lie, y $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H si:

a) Si $\gamma'(0)\in\mathfrak{h}$ para toda curva $\gamma:I_\varepsilon\longrightarrow H\subset G$ diferenciable con $\gamma(0)=e$.

b) $\exp(A)\in H$ para todo $A\in\mathfrak{h}$.

4 Los Grupos de Lie Clásicos.

4.1 A vueltas con los cuaternios $\mathbb{H}=\mathbb{R}\oplus\vec{\mathbb{H}}$

4.1.1

Si $a=a_0+\vec{a}\in\mathbb{H}$ al cuaternio $\bar{a}=a_0-\vec{a}$ se le denomina conjugado. La aplicación conjugación $\mathbb{H}\ni a\longrightarrow\bar{a}\in\mathbb{H}$ es un (anti)isomorfismo de cuerpos (anti-involución).

4.1.2

Un cuaternio es real, si y solo si coincide con su conjugado, es decir

$$a\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a=\bar{a}$$

4.1.3

Si $a=a_0+\vec{a}\in\mathbb{H}$, se llama módulo de a al real positivo $|a|$ que verifica:

$$|a|^2=a_0^2+|\vec{a}|^2$$

Se prueba que $|a|^2=a\bar{a}=\bar{a}a$. En particular se tiene para $a\neq0$: $a^{-1}=\dfrac{\bar{a}}{|a|}$.■

4.1.4

Un cuaternio es puro, si y solo si su cuadrado es un real negativo. Concretamente, se tiene la equivalencia: $a\in\vec{\mathbb{H}} \Leftrightarrow a^2=-|a|^2$.

4.1.5

Se llama involución principal de $\mathbb{H}$ a el isomorfismo de cuerpos

$$\mathbb{H}\ni a\longrightarrow\hat{a}=jaj^{-1}\in\mathbb{H}$$

Si $a\in\mathbb{H}$, $\hat{a}$ se llama involuta de a. La involución principal conmuta con la conjugación, y la composición de ambas, se llama reversión, es decir:

$$\mathbb{H}\ni a\longrightarrow\bar{\hat{a}}=\hat{\bar{a}}=\tilde{a}\in\mathbb{H}$$

que es un anti-involución.

Si $a\in\mathbb{C}$, entonces el reverso $\tilde{a}$ de a coincide con a.

4.2 Los grupos GL(n,$\mathbb{K}$) con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$.

Los grupos de Lie GL(n,$\mathbb{R}$) y GL(n,$\mathbb{C}$) ya han sido presentados en 1.2.2 así como sus correspondientes álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ en 1.8, siendo la aplicación exponencial $\exp:\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\longrightarrow GL(n,\mathbb{K})$ la exponencial usual de matrices.

4.2.1

Por una parte GL(n,$\mathbb{C}$) se puede sumergir canónicamente como subgrupo de Lie de GL(2n,$\mathbb{R}$) mediante el monomorfismo $\varphi:GL(n,\mathbb{C})\longrightarrow GL(2n,\mathbb{R})$ establecido en 2.1.4.

Analicemos ahora como sumergir GL(n,$\mathbb{H}$) en GL(2n,$\mathbb{C}$).

4.2.2 ESPACIOS VECTORIALES A DERECHAS.

En adelante, por conveniencia, consideraremos espacios vectoriales $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$ *a derechas*, es decir, la *multiplicación* de vectores y escalares se denota por

$$\mathbb{V}\times\mathbb{K}\ni(v,\lambda)\longrightarrow v\lambda\in\mathbb{V}$$

esto no es ninguna banalidad, cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ es no conmutativo. Por ejemplo, tomando $\mathbb{V}=\mathbb{H}^n$, podremos identificar el álgebra de endomorfismos lineales de $\mathbb{V}$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$, con las matrices $C\in\mathcal{M}(n,\mathbb{H})$, identificando C con la aplicación:

$$C:\mathbb{H}^n\ni\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\longrightarrow C\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\in\mathbb{H}^n$$

Así $GL(n,\mathbb{H})$, es un grupo que se identifica con el conjunto de matrices de $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ que definen isomorfismos lineales.

4.2.3 ISOMORFISMO CANONICO $\mathbb{H}^n\longrightarrow\mathbb{C}^{2n}$.

Hay una identidad fundamental:

$$x_0+x_1i+y_0j-y_1k=(x_0+x_1i)+j(y_0+y_1i)=x+jy,\ \text{con } x=x_0+x_1i,\ y=y_0+y_1i\in\mathbb{C}$$

que permite definir un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineal canónico:

$$\mathbb{H}^n\ni z\longrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2n},$$

siendo $z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=x+jy\in\mathbb{H}^n$, con $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$.

4.2.4 INMERSION CANONICA $GL(n,\mathbb{H})\longrightarrow GL(2n,\mathbb{C})$

Mediante el isomorfismo anterior, es posible identificar canónicamente $GL(n,\mathbb{H})$ con un subgrupo de $GL(2n,\mathbb{C})$. En efecto, una matriz $C\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$ se escribe en la forma $C=A+jB$, con $A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, si $z=x+jy\in\mathbb{H}^n$, se tiene:

$$Cz=(A+jB)(x+jy)=(Ax-\bar{B}y)+j(\bar{A}y+Bx)$$

ya que como es obvio $jb=\bar{b}j$ para $b\in\mathbb{C}$. Así denotando por $C_{\mathbb{C}}$ la matriz:

$$C_{\mathbb{C}}=\begin{pmatrix}A & -\bar{B}\\ B & \bar{A}\end{pmatrix}$$

se tiene la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}^n & \xrightarrow{\ C\ } & \mathbb{H}^n\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{\ C_{\mathbb{C}}\ } & \mathbb{C}^{2n}\end{array}$$

donde las flechas verticales denotan el isomorfismo canónico 4.2.2.

La aplicación:

$$\varphi:GL(n,\mathbb{H})\ni c\longrightarrow c_{\mathbb{C}}\in GL(2n,\mathbb{C})$$

define entonces un homomorfismo inyectivo de grupos, que permite sumergir

$GL(n,\mathbb{H})$ como subgrupo cerrado de $GL(2n,\mathbb{C})$, que clásicamente se denomina:

$$\text{im } \varphi=\{c=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}: a,b\in GL(n,\mathbb{C})\}=U^{*}(2n)$$

y la aplicación:

$$\phi: \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})\ni C \longrightarrow C_{\mathbb{C}}\in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$$

es homomorfismo inyectivo de álgebras de lie, que permite identificar, el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$ de $GL(n,\mathbb{H})$, con una subálgebra

$$\text{im } \phi = \mathfrak{u}^{*}(n)=\{C_{\mathbb{C}}=\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix},\ A,B\in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\}$$

de $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$.

La razón última de estas afirmaciones está en que se verifica la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{H}) & \xrightarrow{\varphi} & GL(2n,\mathbb{C}) \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \end{array}$$

es conmutativo. en particular, debe ser $\phi=d\varphi(e)$.

4.3 Los grupos unimodulares $SL(n,\mathbb{K})$

La única función determinante que aquí vamos a considerar es la función

$$\det: \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Si $A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{H}$, det A denota el determinante de la representación canónica compleja $A_{\mathbb{C}}$ de la matriz A, así podemos definir el grupo unimodular

$$SL(n,\mathbb{K})=\{a\in GL(n,\mathbb{K}): \det a=1\}$$

que resulta ser subgrupo cerrado de $GL(n,\mathbb{K})$.

Su álgebra de Lie puede describirse por:

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})=\{A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}): \text{traza}(A)=0\}$$

donde traza A es la traza de la representación compleja de la matriz A.

En efecto, si $A\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, entonces para todo $t\in\mathbb{R}$, es

$$\det(\exp(tA))=\exp(\text{traza}(tA))=\exp(0)=1$$

lo cual indica que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})\subseteq T_I SL(n,\mathbb{K})$.

La otra inclusión se obtiene por razón de dimension (real):

a) En el caso $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\mathbb{K}=\mathbb{H}$, la aplicación la traza es siempre real es decir:

$$\text{traza}: \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una forma $\mathbb{R}$-lineal y por tanto $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ es hiperplano, ya que

$$\text{traza} \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}= \text{traza}(A)+\text{traza}(\bar{A})=2\text{Re}(\text{Traza } A), \text{ para todo } A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$$

Notese por otro lado, que también en este caso la aplicación determinante es real, pues $\det(\exp C)=\exp(\text{traza}(C))\in\mathbb{R}$ para $C\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, esto es cierto en un entorno de I, y por traslaciones a la izquierda, en un entorno de cada punto.

b) En el caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ tiene codimensión real 2, lo mismo que $SL(2,\mathbb{C})$ que es una hipervariedad compleja de $GL(n,\mathbb{C})$.

4.4 Espacios lineales métricos $\mathbb{E}=\mathbb{K}_p^n$, $\bar{\mathbb{K}}_p^n$, $\mathbb{K}_{sp}^{p,q}$, $\bar{\mathbb{K}}_{sp}^{p,q}$.

Un espacio lineal métrico, es un espacio vectorial $\mathbb{E}$ dotado de un producto "escalar"

$$\mathbb{E}\times\mathbb{E}\ni(u,v)\longrightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbb{K}$$

que verifica, las propiedades:

1) $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$, $\langle u,w\lambda\rangle=\langle u,w\rangle\lambda$ para todo $u,v,w\in\mathbb{E}$, $\lambda\in\mathbb{K}$

2) $\langle u,v\rangle=0$ para todo $v\in\mathbb{E}$, implica que $u=0$.

3) Alguna de las siguientes propiedades, para todo $u,v\in\mathbb{E}$:

a) $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle^{\sim}$ *(Ortogonal)*

b) $\langle v,u\rangle=-\langle u,v\rangle^{\sim}$ *(Simpléctico)*

c) $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ *(Hermitiano)*

d) $\langle v,u\rangle=-\overline{\langle u,v\rangle}$ *(Hemihermitiano)*

Nótese que $\langle,\rangle$ es siempre $\mathbb{R}$-bilineal, y si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{E}$ es espacio lineal ortogonal, o simpléctico. En el caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ los productos ortogonales son necesariamente simétricos ya que si $a\in\mathbb{C}$, $\tilde{a}=a$.

MODELOS ESTANDAR

Considerese n,p,q enteros no negativos con $n=p+q>0$. Sean $z,w\in\mathbb{K}^n$:

4.4.0 Considérense las siguientes matrices:

$$I_{p,q}=\left(\begin{array}{c|c}-I_p & 0\\ \hline 0 & I_q\end{array}\right),\quad J_p=\left(\begin{array}{c|c}0 & I_p\\ \hline -I_p & 0\end{array}\right),\quad J_{p,q}=\left(\begin{array}{c|c}-J_p & 0\\ \hline 0 & J_q\end{array}\right),\quad z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},\quad w=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

4.4.1 Modelo $\mathbb{K}_p^n$, es $\mathbb{K}^n$ dotado del producto ortogonal:

$$\langle z,w\rangle=-\sum_1^p \tilde{z}_a w_a+\sum_{p+1}^n \tilde{z}_b w_b=z^t\, I_{p,q}\, w$$

4.4.2 Modelo $\bar{\mathbb{K}}_p^n$, es $\mathbb{K}^n$ dotado del producto Hermitiano

$$\langle z,w\rangle= -\sum_1^p \bar{z}_a w_a+\sum_{p+1}^n \bar{z}_b w_b= \bar{z}^t\, I_{p,q}\, w$$

4.4.3 Modelo $\mathbb{K}_{sp}^{p,q}$, es $\mathbb{K}^{2n}$ dotado del producto Simpléctico:

$$\langle z,w\rangle= -\sum_1^p \{\tilde{z}_a w_{p+a}-\tilde{z}_{p+a} w_a\}+\sum_{p+1}^n \{\tilde{z}_b w_{q+b}-\tilde{z}_{q+b} w_b\}=z^t\, J_{p,q}\, w$$

Denotamos $\mathbb{K}_{sp}^{0,n}=\mathbb{K}_{sp}^{2n}$ que es el modelo simpléctico canónico

4.4.4 Modelo $\bar{\mathbb{K}}_{sp}^{p,q}$ es $\mathbb{K}^{2n}$ dotado del producto hemihermitiano

$$\langle z,w\rangle=\sum_1^p \{\bar{z}_a w_{p+a}-\bar{z}_{p+a} w_a\}+\sum_{p+1}^n \{\bar{z}_b w_{q+b}-\bar{z}_{q+b} w_b\}=\bar{z}^t\, J_{p,q}\, w$$

Denotamos $\bar{\mathbb{K}}_{sp}^{0,n}=\bar{\mathbb{K}}_{sp}^{2n}$ que es el modelo simpléctico canónico

4.4.5 PROPOSICION

Suponiendo implícitas las identificaciones canónicas, para $z,w\in\mathbb{C}^n$ *se tiene la identidad:*

$$\langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{C}}^n_p} = \langle z,w\rangle_{\mathbb{R}^{2n}_{2p}} + i\langle z,w\rangle_{\mathbb{R}^{p,q}_{sp}}$$

Demostración:

Sean $z=x+yi$, $w=u+vi\in\mathbb{C}^n$, $x,y,u,v\in\mathbb{R}^n$

$$\langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{C}}^n_p} = -\sum_1^p \bar{z}_a w_a + \sum_{p+1}^n \bar{z}_b w_b = -\sum_1^p (x_a - iy_a)(u_a + iv_a) + \sum_{p+1}^n (x_b - iy_b)(u_b + iv_b) =$$

$$= -\sum_1^p \{(x_a u_a + y_a v_a) + i(x_a v_a - y_a u_a)\} + \sum_{p+1}^n \{(x_b u_b + y_b v_b) + i(x_b v_b - y_b u_b)\} =$$

$$= \langle z,w\rangle_{\mathbb{R}^{2n}_{2p}} + i\langle z,w\rangle_{\mathbb{R}^{p,q}_{sp}}$$

=

4.4.6 PROPOSICION

Suponiendo implícitas las identificaciones canónicas, para $z,w\in\mathbb{H}^n$, *se tienen las identidades:*

$$\langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{H}}^n_p} = \langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{C}}^{2n}_{2p}} + j\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}^{p,q}_{sp}}$$

$$\langle z,w\rangle_{\mathbb{H}^n_p} = \langle z,w\rangle_{\mathbb{C}^{2n}_{2p}} + j\langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{C}}^{p,q}_{sp}}$$

Demostración:

Lo probaremos solo para el caso p=0. Sean $z=x+jy$, $w=u+jv\in\mathbb{H}$, $x,y,u,v\in\mathbb{C}^n$:

$$\langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{H}}^n_0} = \sum_1^n \bar{z}_a w_a = \sum_1^n (\bar{x}_a - \bar{y}_a j)(u_a + jv_a) = \sum_1^n \{(\bar{x}_a u_a - \bar{y}_a (jj) v_a) + (\bar{x}_a j v_a - \bar{y}_a j u_a)\}$$

teniendo en cuenta que $cj=j\bar{c}$ para todo $c\in\mathbb{C}$, resulta:

$$\langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{H}}^n_0} = \sum_1^n \{(\bar{x}_a u_a + \bar{y}_a v_a) + j(x_a v_a - y_a u_a)\} = \langle z,w\rangle_{\bar{\mathbb{C}}^{2n}_0} + j\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}^{n,o}_{sp}}$$

Por otra parte

$$\langle z,w\rangle_{\mathbb{H}^n_p} = \sum_1^n \tilde{z}_a w_a = \sum_1^n (x_a - y_a j)(u_a + jv_a) = \sum_1^n \{(x_a u_a + y_a v_a) + j(\bar{x}_a v_a - \bar{y}_a u_a)\}$$

4.4.7 NOTA

Si $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial métrico, puede probarse que necesariamente es isométrico a alguno de los modelos estandar $\mathbb{K}^n_p$, $\bar{\mathbb{K}}^n_p$, $\mathbb{K}^{2n}_{sp}$, $\bar{\mathbb{K}}^{2n}_{sp}$. Es decir, hay una base respecto a la cual el producto tiene la expresión correspondiente en coordenadas. En particular llamamos la atención sobre el hecho de que todos los modelos simplécticos $\mathbb{K}^{p,q}_{sp}$ (respectivamente $\bar{\mathbb{K}}^{p,q}_{sp}$) son isométricos.

4.5 Grupos de Lie de Isometrías lineales $G(\mathbb{E})$, y sus álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\mathbb{E})$.

Sea $\mathbb{E}$ alguno de los espacios lineales métricos $\mathbb{K}^n_p$, $\mathbb{K}^{p,q}_{sp}$, y $\bar{\mathbb{E}}$ alguno de los $\bar{\mathbb{K}}^n_p$, $\bar{\mathbb{K}}^{p,q}_{sp}$. Sea $\mathbb{E}'=\mathbb{E}$ ó $\bar{\mathbb{E}}$, y $m=\dim(\mathbb{E}')=(n$ ó $2n$ según los casos).

El grupo

$$G(\mathbb{E}')=\{a\in GL(m,\mathbb{K}):<az,aw>=<z,w> \quad \forall z,w\in\mathbb{K}^m\}$$

Sea g es la matriz que define el producto, es decir:

$$<z,w>=z^t g\ w \text{ (para } \mathbb{E}'=\mathbb{E}) \text{ ó } <z,w>=\bar{z}^t g\ w \text{ (para } \mathbb{E}'=\bar{\mathbb{E}})$$

entonces se tiene:

4.5.1 TEOREMA

$$G(\mathbb{E})=\{a\in GL(m,\mathbb{K}):\tilde{a}^t g\ a=g\},\ G(\bar{\mathbb{E}})=\{a\in GL(m,\mathbb{K}):a^* g\ a=g\} \text{ (siendo } a^*=\bar{a}^t)$$

En particular, $G(\mathbb{E}')$ es un subgrupo cerrado de $GL(m,\mathbb{K})$, y por tanto subgrupo de Lie.

Por otra parte, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\mathbb{E}')$ viene dada por:

$$\mathfrak{g}(\mathbb{E}')=\{A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}):<Az,w>+<z,Aw>=0,\ \forall z,w\in\mathbb{K}^m\}$$

es decir:

$$\mathfrak{g}(\mathbb{E})=\{A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}):\ A^t g+gA=0\},\ \mathfrak{g}(\bar{\mathbb{E}})=\{A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}):\ A^* g+gA=0\}$$

Demostración:

Haremos la demostración para el caso $G=G(\bar{\mathbb{E}})$. Sea $\varepsilon=(e_1,\dots,e_m)$ la base canónica de $\mathbb{K}^m$. Se tiene:

$$a\in G \Leftrightarrow <ae_i,ae_j>=g_{ij}\ \forall i,j \Leftrightarrow \bar{a}_i^t\ g\ a_j=g_{ij}\ \forall i,j \Leftrightarrow \bar{a}^t g\ a=g$$

en donde a_i denota la columna i-ésima de la matriz a. Probemos ahora la igualdad:

$$T_I G=\{A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}):<Az,w>+<z,Aw>=0,\ \forall z,w\in\mathbb{K}^m\}$$

En efecto: Sea $A\in T_I G$, y $(-\varepsilon,\varepsilon)\ni t\longrightarrow a_t\in G$ curva diferenciable con $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a_t=A$. Se tiene entonces $\forall z,w\in\mathbb{K}^m$: $<a_t z,a_t w>=<z,w>=cte$, por tanto

$$0=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}<a_t z,a_t w>=<\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}a_t z,w>+<z,\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}a_t w>=<Az,w>+<z,Aw>$$

Recíprocamente, si $a\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K})$ es tal que $<Az,w>+<z,Aw>=0$, demostraremos que la función $\mathbb{K}\ni t\longrightarrow<e^{At}z,e^{At}w>\in\mathbb{K}$ es constante $\forall z,w\in\mathbb{K}^m$. Para ello basta comprobar que $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau}<e^{At}z,e^{At}w>=0\ \forall\tau\in\mathbb{K}$. En efecto:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau}<e^{At}z,e^{At}w>=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}<e^{A(t-\tau)}z,e^{A(t-\tau)}w>=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}<e^{At}z',e^{At}w'>$$

siendo $z'=e^{A\tau}z$, $w'=e^{A\tau}w$. Por tanto se tiene:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau}<e^{At}z,e^{At}w>=<Az',w'>+<z'Aw'>=0$$

Por último demostremos la igualdad

$$\{A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}):<Az,w>+<z,Aw>=0,\ \forall z,w\in\mathbb{K}^m\}=\{A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}):\ A^* g+gA=0\}$$

Si $A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K})$, la condición $<Az,w>+<z,Aw>=0$, $\forall z,w\in\mathbb{K}^m$, equivale a que se verifique para $z=e_i$, $w=e_j$ y esto equivale a $A^*g+g\,A=0$, ya que:

$$<Ae_i,e_j>+<e_i,Ae_j>=(\overline{Ae_i})^t g\; e_j+\; e_i^t g(Ae_j)=$$
$$\mathrm{Fila}_i(A^*)\;\mathrm{Col}_j\;(g)+\;\mathrm{Fila}_i(g)\;\mathrm{Col}_j(A)=\;(A^*g+g\;A)_{ij}$$

4.6 LISTA DE GRUPOS LINEALES CON SUS ALGEBRAS DE LIE

Considerese n,p,q enteros no negativos con $n=p+q>0$.

Todos los grupos que aquí se van a considerar son canónicamente isomorfos a subgrupos cerrados (de Lie) de $GL(m,\mathbb{C})$. Las correspondientes letras góticas indican el álgebra de Lie del subgrupo que siempre será una subálgebra de Lie (real!) de $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$

4.6.1 **Grupos Ortogonales**:

GRUPO: $O(p,q,\mathbb{K})=G(\mathbb{K}^n_p)=\{a\in GL(n,\mathbb{K}):\tilde{a}^t I_{p,q}a=I_{p,q}\}$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{o}(p,q,\mathbb{K})=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ B^t & C\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}):\begin{matrix}A+A^t=0 & A\in\mathfrak{gl}(p,\mathbb{K})\\ C+C^t=0 & C\in\mathfrak{gl}(q,\mathbb{K})\end{matrix}\right\}$

ISOMORFISMO: $O(p,q,\mathbb{K})\cong O(q,p,\mathbb{K})$

CASO PARTICULAR:

GRUPO: $O(n,\mathbb{K})=O(0,n,\mathbb{K})=\{a\in GL(n,\mathbb{K}):a^t=a^{-1}\}$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})=\{A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}):A+A^t=0\}$

SUBGRUPO ESPECIAL:

GRUPO: $SO(p,q,\mathbb{K})=O(p,q,\mathbb{K})\cap SL(n,\mathbb{K})$.

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{so}(p,q,\mathbb{K})=\mathfrak{o}(p,q,\mathbb{K})$

ISOMORFISMO: $SO(p,q,\mathbb{K})\cong SO(q,p,\mathbb{K})$

CASO PARTICULAR:

GRUPO: $SO(n,\mathbb{K})=O(n,\mathbb{K})\cap SL(n,\mathbb{K})$.

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})=\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$

DESCRIPCION SEGUN $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$:

ORTOGONAL REAL: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

GRUPO: $O(p,q)=O(p,q,\mathbb{R})$, $SO(p,q)=O(p,q)\cap SL(n,\mathbb{R})$

C.C. identidad: $SO^+(p,q)=\left\{\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in SO(p,q):\begin{matrix}\det a>0 & a\in GL(p,\mathbb{R})\\ \det d>0 & d\in GL(q,\mathbb{R})\end{matrix}\right\}$ (ver 4.6.8)

GRUPO: $O(n)=O(n,\mathbb{R})$, $SO(n)=O(n)\cap SL(n,\mathbb{R})$.

C.C. identidad: $SO(n)$ (ver 4.6.7)

ORTOGONAL COMPLEJO: $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$O(p,q,\mathbb{C})\cong O(n,\mathbb{C})$, $SO(p,q,\mathbb{C})\cong SO(n,\mathbb{C})$ (ver Nota 4.4.7)

ORTOGONAL CUATERNIÓNICO: $\mathbb{K}=\mathbb{H}$.

GRUPO: $O^*(2p,2q)=O(p,q,\mathbb{H})\cong O(n,\mathbb{H})=O^*(2n)=O(2n,\mathbb{C})\cap G(\bar{\mathbb{C}}^{2n}_{sp})$ (ver 4.4.4 c))

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{o}^*(2n)=\left\{\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A}\end{pmatrix} : \begin{matrix} A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \\ A^*+A=0,\ B^*-B=0\end{matrix}\right\}$

C.C identidad: $SO^*(2p,2q)=SO(p,q,\mathbb{H})\cong SO(n,\mathbb{H})=SO^*(2n)$

ALBEBRA DE LIE: $\mathfrak{so}^*(2n)=\{C\in\mathfrak{o}^*(2n):\ \mathrm{Traza}(C)=0\}$

4.6.2 **Grupos Unitarios**

GRUPO: $U(p,q)=G(\bar{\mathbb{C}}^n_p)=\{a\in GL(n,\mathbb{C}):\bar{a}^t I_{p,q}a=I_{p,q}\}$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{u}(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}): \begin{matrix} A+A^*=0,\ A\in\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C}) \\ C+C^*=0,\ C\in\mathfrak{gl}(q,\mathbb{C})\end{matrix}\right\}$

SUBGRUPO ESPECIAL: $SU(p,q)=U(p,q)\cap SL(n,\mathbb{C})$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{su}(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C\end{pmatrix}\in\mathfrak{u}(p,q):\mathrm{Traza}(A)+\mathrm{Traza}(C)=0\right\}$

CASO PARTICULAR:

GRUPO: $U(n)=U(0,n)$,

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{u}(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}):\ A+A^*=0\}$

GRUPO: $SU(n)=U(n)\cap SL(n,\mathbb{C})$.

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{su}(n)=\{A\in\mathfrak{u}(n):\ \mathrm{Traza}(A)=0\}$

GRUPO: $U^*(2n)=\{c=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{pmatrix}:a,b\in GL(n,\mathbb{C})\}=U^*(2n)$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{u}^*(2n)=\left\{\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A}\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}):\ A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\right\}$

SUBGRUPO ESPECIAL:

GRUPO: $SU^*(2n)=U^*(2n)\cap Sl(2n,\mathbb{C})$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{su}^*(2n)=\left\{\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A}\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}):\ \mathrm{Re}(\mathrm{Traza}\ A)=0\right\}$

ISOMORFISMOS ELEMENTALES:

$U(p,q)\cong U(q,p)$. $SU(p,q)\cong SU(q,p)$

$U^*(2n)\cong GL(n,\mathbb{H})$ (ver 4.2.3)

$SU^*(2n)\cong SL(n,\mathbb{H})$ (ver 4.2.3)

$SU(2)\cong \mathbb{S}^3\subset \mathbb{H}^*$

4.6.3 **Grupos Simplécticos**

GRUPO: $Sp(n,\mathbb{K})=G(\mathbb{K}^{2n}_{sp})=\{a\in GL(2n,\mathbb{R}): a^t J_n a=J_n\}\cong Sp(p,q,\mathbb{K})=G(\mathbb{K}^{p,q}_{sp})$

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})=\left\{\begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^t\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{K}):\ B=B^t,\ C=C^t,\ A,B,C\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\right\}$

$\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{R}$

GRUPO: $Sp(p,q)=G(\bar{\mathbb{H}}^n_p)=U(2p,2q)\cap Sp(p,q,\mathbb{C})$ (ver 4.5.5 b)

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{sp}(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} A & B^* & D & E^t \\ B & C & E & F \\ -\bar{D} & E^* & \bar{A} & -B^t \\ \bar{E} & -\bar{F} & -\bar{B} & \bar{C}\end{pmatrix}:\ \begin{array}{l} A,D\in\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C}) \\ C,F\in\mathfrak{gl}(q,\mathbb{C}) \\ A+A^*=0\ \ D+D^t=0 \\ C+C^*=0\ \ F+F^t=0\end{array}\right\}$

GRUPO: $Sp(n)=Sp(0,n)=G(\bar{\mathbb{H}}^n_o)=U^*(2n)\cap U(2n)$ (ver 6.5.7)

ALGEBRA DE LIE: $\mathfrak{sp}(n)=\left\{\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A}\end{pmatrix}:\ \begin{array}{l} A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \\ A+A^*=0\end{array}\right\}$

4.4.4 IDENTIDADES NOTABLES

a) $U(p,q)=O(2p,2q)\cap Sp(p,q,\mathbb{R})$ cuando $U(p,q)\subset GL(2n,\mathbb{R})$ (ver 6.4.5)

b) $Sp(p,q)=U(2p,2q)\cap Sp(p,q,\mathbb{C})$ (ver 4.4.6)

c) $O^*(2p,2q)=O(2p,2q,\mathbb{C})\cap G(\bar{\mathbb{C}}^{p,q}_{sp})$ (ver 4.4.6)

Las identidades se prueban inmediatamente con ayuda de 4.4.5, 4.4.6 y el siguiente

LEMA:

Sea $(E,<\ ,\ >)$ un espacio lineal métrico, y $\phi:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}$ una biyección que preserva el producto, es decir: $<\phi u,\phi v>=<u,v>\ \forall u,v\in E$.

Entonces necesariamente ϕ es isomorfismo lineal.

Demostración:

probemos por ejemplo que $\phi(u+v)=\phi(u)+\phi(v)$. En efecto, part todo $w\in\mathbb{E}$ es:

$$<\phi(u+v)-\phi(u)-\phi(v),\phi(w)>=<\phi(u+v),\phi(w)>-<\phi(u),\phi(w)>-<\phi(v),\phi(w)>=$$
$$=<u+v,w>-<u,w>-<v,w>=0$$

como $\phi(w)$ es arbitrario en E se concluye de 4.4 1) que $\phi(u+v)-\phi(u)-\phi(v)=0$.

Análogamente se prueba $\phi(u\lambda)=\phi(u)\lambda$ $\forall u\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$.

4.6.5 PROPOSICION

Si $c=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a,b\in GL(n,\mathbb{C})$ *entonces se tiene la equivalencia:*

$$c\in U(2n)\Leftrightarrow c\in Sp(2n,\mathbb{C})$$

Es decir:

$$U^*(2n)\cap U(2n)=U^*(2n)\cap Sp(n,\mathbb{C}).$$

Demostración:

Se demuestra sin dificultad que la condición $c^tJ_nc=J_n$ equivale a $c^*c=I_{2n}$ que equivale finalmente a:

$$-b^ta+a^tb=0,\ b^t\bar{b}+a^t\bar{a}=I_n$$

4.6.6 COROLARIO

$Sp(n)= U(2n)\cap Sp(n,\mathbb{C})=U^*(2n)\cap Sp(n,\mathbb{C})=U^*(2n)\cap U(2n)$.

Demostración:

La primera igualdad es consecuencia directa de la identidad 4.5.5 b) para p=0, q=n. La segunda igualdad de la proposición anterior.

4.6.7 PROPOSICION

La componente conexa de la identidad del grupo O(n) es SO(n).

4.6.8 PROPOSICION

La componente conexa de la identidad del grupo O(p,q) (p>0, q>0) es

$$SO^+(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in SO(p,q):\ \begin{matrix}\det a>0 & a\in GL(p,\mathbb{R}) \\ \det d>0 & d\in GL(q,\mathbb{R})\end{matrix}\right\}$$

LECCIÓN III

§5 REPRESENTACIÓN ADJUNTA. GRUPOS ABELIANOS.

5.1 Representaciones lineales.

Una representación lineal de un grupo de Lie G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo ρ de G en el grupo de automorfismos GL(V). La representación se dice fiel, si ρ es monomorfismo. En este caso, G puede identificarse con el subgrupo $\rho(G)$ de GL(V).

Una representación lineal ρ de G en V, induce funtorialmente la representación $\rho_*=d\rho(e):\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ del álgebra de lie $\mathfrak{g}$ de G, en el álgebra de lie $\mathfrak{gl}(V)$ de los endomorfismos de V.

5.2 Representación adjunta.

Veremos aquí, que dado un grupo de Lie hay una representación canónica sobre su álgebra de Lie:

Si $a\in G$, la aplicación $C_a:G\ni x\longrightarrow axa^{-1}\in G$, es evidentemente un isomorfismo (automorfismo) y se denomina automorfismo de conjugación definido por a. Usando 2.1.3 se ve que $Ad_a=dC_a(e)$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$ y el diagrama que sigue es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{C_a} & G \\ {\scriptstyle exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_a} & \mathfrak{g} \end{array}$$

La aplicación $Ad:G\ni a\longrightarrow Ad_a=dC_a(e)\in Aut(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ se denomina representación adjunta, veamos que es una representación:

5.2.1 TEOREMA

La aplicación $Ad:G\ni a\longrightarrow Ad_a=dC_a(e)\in GL(\mathfrak{g})$ *es un homomorfismo de grupos. Denotando por ad=dAd(e), se verifica la conmutatividad del diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \end{array} \quad \text{, es decir, } Ad_{exp(A)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{ad(A)^k}{k!}$$

La única dificultad de la demostración está en probar que $Ad:G\longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ es diferenciable.

Denotamos para $A\in\mathfrak{g}$ $ad(A)=ad_A:\mathfrak{g}\ni B\longrightarrow ad_AB\in\mathfrak{g}$ se tiene el siguiente

5.2.2 TEOREMA

Si A, $B\in\mathfrak{g}$ *entonces* $ad_AB=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big[Ad_{exp(tA)}B\Big]=[A,B]$.

Demostración:

Si X, Y son campos de vectores en una variedad:

$$[X,Y](p)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big[d(X_{-t})\Big(Y(X_t(p)\Big)\Big]=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big[\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big(X_{-t}[Y_s(X_t(p))]\Big)\Big]$$

donde X_t, Y_s representan los flujos de X e Y.

En particular, si $A,B\in\mathfrak{g}$, es $\mathbb{A}_t(x)=x\exp(tA),\ldots$etc se tiene:

$$[A,B]=[\mathbb{A},\mathbb{B}](e)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big(\exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA)\Big)\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[Ad_{\exp(tA)}(B)\right]=\left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}Ad_{\exp(tA)}\right](B)=[d(Ad)(A)](B)=ad_A B.\blacksquare$$

5.2.3

Si G es subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, entonces para cada $a\in G$ y $X\in\mathfrak{g}$ se tiene que $aXa^{-1}\in\mathfrak{g}$ y además,

$$Ad_a:\mathfrak{g}\ni X\longrightarrow aXa^{-1}\in\mathfrak{g}$$

5.3 **Grupos Abelianos conexos de Lie.**

5.3.1 *Centro de un Grupo*

Se llama centro de un grupo de Lie G al subgrupo

$$Z=Z(G)=\{a\in G: ax=xa,\ \forall a\in G\}=\{a\in G: C_a=id\}$$

que resulta ser subgrupo cerrado normal (y abeliano) de G.

Si G es conexo, entonces la condición $C_a=id$ equivale a $Ad_a=dC_a(e)=id$, por lo que el centro Z resulta ser el núcleo de la representación adjunta

$$Ad:G\longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

Así la representación adjunta permite sumergir un grupo de Lie G con centro trivial como subgrupo de Lie del grupo de automorfismos de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Si G es abeliano, entonces $Z(G)=Z$, y $C_a=id:G\longrightarrow G$ para todo $a\in G$, por tanto $dC_a=Ad_a=id:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$, y Ad es constante, así $ad=dAd(e)=0$ y esto significa que $[A,B]=0$ para todo $A,B\in\mathfrak{g}$. Se dice por esto que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es trivial o abeliana. Recíprocamente:

5.3.2 TEOREMA

El centro $Z=Z(G)$ de G tiene por álgebra de Lie el centro de $\mathfrak{g}$, es decir la subálgebra $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\mathfrak{z}=\{C\in\mathfrak{g}: [C,A]=0,\ \forall A\in\mathfrak{g}\}$. En particular, si G es conexo, G es abeliano, si y solo si $\mathfrak{g}$ es abeliana.

Demostración:

Como Z es cerrado, es subgrupo regular de Lie. Si $C\in\mathfrak{z}$, sea $c=\exp(C)$

$$dC_c(e)=Ad_c=Ad(\exp C)=\exp(ad_C)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ad_C)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(0)^k=id:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}.$$

por tanto, $C_c=id:G\longrightarrow G$ y $c\in Z$. Esto prueba que $\mathfrak{z}\subseteq T_eZ$. Recíprocamente, si $\tau(t)$ $|t|<\varepsilon$ es una curva en Z con $\tau'(0)=C\in T_eZ$, entonces como $C_{\tau(t)}=id$, $Ad_{\tau(t)}=dC_{\tau(t)}=id$, y $ad_C=dAd(e)(C)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[Ad_{\tau(t)}\right]=0$, luego $C\in\mathfrak{z}$.$\blacksquare$

El centro $\mathfrak{z}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es el núcleo de la aplicación adjunta

$$ad:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

así, toda álgebra de Lie con centro trivial, puede sunergirse mediante el operador ad como subálgebra de su propia álgebra de endomorfismos.

5.3.3 COROLARIO

Si $A,B\in\mathfrak{g}$ y $[A,B]=0$ entonces $exp(A+B)=exp(A)exp(B)$

Demostración:

Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra (abeliana) de Lie generada por A y B, y H el subgrupo de G cn álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Por 5.2.2, H resulta ser abeliano, por tanto:

$$\tau(t)=\exp(tA)\exp(tB)=\exp(tB)\exp(tA)$$

define un homomorfismo $\tau:\mathbb{R}\longrightarrow H$ $(\tau(t+s)=\tau(t)\tau(s))$ pues H es abeliano. Como $\tau'(0)=A+B$, es concluye que $\tau(t)=\exp(t(A+B))$ ■

5.3.4 OBSERVACION

El producto de grupos de Lie abelianos, es obviamente abeliano. En particular se define el d-toro $T^d=\mathbb{S}^1\times\ldots\times\mathbb{S}^1$ (d factores) donde $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}^*:|z|=1\}$ es subgrupo (cerrado) del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$. Nótese que $\mathbb{S}^1$ también puede verse como cociente $\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Un modelo pues de grupo abeliano es $T^d\times\mathbb{R}^{m-d}$. Comprobaremos que son los únicos posibles.

5.3.5 *Clasificación de grupos abelianos conexos de Lie*

Si G es un grupo abeliano conexo de Lie, su álgebra $\mathfrak{g}$ de Lie es abeliana, y la aplicación exponecial $\exp:\mathfrak{g}\longrightarrow G$ resulta ser un homomorfismo (por 5.3.3), tomando en $\mathfrak{g}$ la operación suma. Además, usando como G está generado por cualquier entorno del elemento neutro, se concluye que es suprayectivo, ya que para cada $a\in G$ existen $A_1,\ldots,A_r$ con

$$a=\exp(A_1)\ldots\exp(A_r)=\exp(A_1+\ldots+A_r)$$

El núcleo D=ker(exp) resulta ser un subgrupo cerrado y discreto de $\mathfrak{g}$. Así G es isomorfo a $\mathfrak{g}/D$. Como $\mathfrak{g}=(\mathbb{R}^m+)$, el problema de clasificación de grupos abelianos se reduce a clasificar los cocientes $\mathbb{R}^m/\Gamma$ siendo Γ un subgrupo aditivo cerrado y discreto de $\mathbb{R}^m$, cosa que ya se hizo. Se tiene por tanto, el siguiente resultado:

TEOREMA:

Si G es grupo abeliano de Lie de dimensión m, entonces existe un entero $0\le d\le m$ de forma que G es isomorfo a $T^d\times\mathbb{R}^{m-d}$.

§6 Grupos Cociente

6.1 **Subgrupos normales.**

Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ se llama ideal de $\mathfrak{g}$ si para todo $A\in\mathfrak{h}$ y todo $X\in\mathfrak{g}$ se verifica que $[A,X]\in\mathfrak{h}$, es decir, $\mathfrak{h}$ es subespacio invariante por ad_X, para todo $X\in\mathfrak{g}$. Se tiene el siguiente resultado

TEOREMA

Sea H subgrupo de Lie conexo de G, con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Supongase G conexo. Entonces, H es subgrupo normal, si y solo si $\mathfrak{h}$ es ideal de $\mathfrak{g}$.

Demostración:

Supóngase $\mathfrak{h}$ ideal de $\mathfrak{g}$. Es suficiente probar que $xax^{-1}\in H$ para $x=\exp(X)\in G$, $a=\exp(A)\in H$, con $X\in\mathfrak{g}$, $A\in\mathfrak{h}$. Usando la conmutatividad de los diagramas se tiene:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{C_X} & G \\ \exp\uparrow & Ad_X & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathfrak{g}) \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

$$xax^{-1}=C_X(a)=C_X(\exp A)=\exp(Ad_X A)=\exp\Big((\exp ad_X)(A)\Big)=\exp\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{ad(X)^k}{k!}\right)A\right\}\in H.$$

ya que por hipótesis $\mathfrak{h}$ es invariante por ad_X.

Recíprocamente, Si H es normal, entonces para todo $X\in\mathfrak{g}$, y $A\in\mathfrak{h}$, se verifica que $\exp(tX)\exp(sA)\exp(-tX)\in H$ por tanto:

$$[X,A]=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big(\exp(tX)\exp(sA)\exp(-tX)\Big)\right]\in H$$

6.2 **Espacios cociente**

Supondremos que H es subgrupo cerrado de Lie del grupo de Lie G.

Se trata de dar estructura de variedad diferenciable al espacio G/H de forma que la proyección canónica $\pi:G\ni x\longrightarrow xH\in G/H$ sea submersión.

De entrada G/H está dotado de una topología cociente natural, que es la topología final respecto a π.

6.5.1 *Con esta topología, π es abierta, y G/H es Haussdorf y IIAN.*

En efecto: Si U es abierto de G, entonces $\pi^{-1}(\pi U)$ es la unión de la familia de abiertos $\{aU:\ a\in H\}$ y es abierto de G, luego πU es abierto de G/H.

Por otra parte, el conjunto $\mathcal{R}=\{(a,b)\in G\times G:\ b^{-1}a\in H\}$ es claramente cerrado. Así, si $aH\neq bH$, entonces existen entornos U^a y U^b de a y b en G tales que $U^a\times U^b\cap\mathcal{R}=\emptyset$. Lo cual significa que $\pi(U^a)\cap\pi(U^b)=\emptyset$.

Finalmente si $\{U_k:k\in\mathbb{N}\}$ es una base para la topología de G, $\{\pi U_k:k\in\mathbb{N}\}$ es base para la de G/H.

6.5.2 *Carta regular adaptada*

Como H es subgrupo cerrado, entonces H es regular, y por 3.4.2, existe una carta regular (U,φ) adaptada a H por e, es decir:

$$\varphi(U)=\tilde{U}\times\hat{U}=\{(\tilde{x},\hat{x}):\ \tilde{x}\in\tilde{U},\ \ \hat{x}\in\hat{U}\},\ \tilde{U}\subseteq\mathbb{R}^d,\ \hat{U}\subseteq\mathbb{R}^r \text{ abiertos, } \varphi(e)=(\tilde{0},\hat{0})$$

y las hojas $S_c\varphi=\varphi^{-1}(\tilde{U}\times\{c\})$ definen clases diferentes de G/H para cada $c\in\hat{U}$.

Además, podemos elegir $W\subset V\subset U$ entornos de e, de forma que: para todo $a,b\in W$, es $b^{-1}a\in V$, y si $v\in V$, $vW\subset U$. Podemos imponer además que (W,φ) $(\varphi(W)=\tilde{W}\times\hat{W})$ siga siendo carta regular adaptada a H por e.

6.5.3 *Carta por eH*

La aplicación ψ^{-1} que cierra el diagrama, es continua y abierta

$$\begin{tikzcd} \hat{W} \arrow[r, shift left, "\hat{i}"] \arrow[d, "\psi^{-1}"'] & \tilde{W}\times\hat{W} \arrow[l, shift left, "\hat{\pi}"] \\ \pi(W) & W \arrow[l, "\pi"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \psi^{-1}=\hat{i}\circ\varphi^{-1}\circ\pi \\ \psi\circ\pi=\hat{\pi}\circ\varphi \end{array}$$

por ser composición de aplicaciones continuas y abiertas. Además, es biyectiva y por tanto es homeomorfismo, y $\psi:\pi(W)\longrightarrow\hat{W}$ es una carta por $\pi(e)$

6.5.4 *Traslaciones a la izquierda. Carta por aH*

Para cada $a\in G$ hay un diagrama *natural* conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_a"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\bar{L}_a"] & G/H \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de las topologías finales se concluye que L_a es homeomorfismo en G/H.

Es importante observar que $\bar{L}:G\times G/H\ni(a,bH)\longrightarrow\bar{L}_a(bH)\in G/H$ define una actuación por la izquierda, y $\bar{L}_a=id$ si y solo si $a\in H$. Además dos traslaciones $\bar{L}_a$, $\bar{L}_b$ coinciden, si coinciden en un punto.

Tomando $\psi_a^{-1}=L_a\circ\psi^{-1}$ la aplicación que hace conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi(aW) \arrow[r, "\psi_a"] & \hat{W} \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ & \pi(W) \arrow[ul, "L_a"] \end{tikzcd}$$

tenemos la carta $\pi(aW)\xrightarrow{\psi_a}\hat{W}$.

6.5.5 *Compatibilidad de las cartas* ψ_a.

Si $\pi(aW)\cap\pi(bW)$ es no vacio entonces $\bar{L}_{b^{-1}a}=\bar{L}_v$ para cierto $v\in V$:
(En efecto, si $xH\in\pi(aW)\cap\pi(bW)$ entonces $xH=av_1H=bv_2H$ para ciertos $v_1,v_2\in V$, esto significa que $(b^{-1}a)v_1H=v_2H=(v_2v_1^{-1})v_1H$ así $\bar{L}_{b^{-1}a}=\bar{L}_v$ para $v=v_2v_1^{-1}\in V$)

La aplicación $\psi_b\circ\psi_a^{-1}$en el abierto $\psi_a(\pi(aW)\cap\pi(bW))$ de $\hat{W}$ y se escribe:

$$\psi_b\circ\psi_a^{-1}=\psi\circ\bar{L}_{b^{-1}a}\circ\psi^{-1}=\psi\circ\bar{L}_v\circ(\pi\circ\varphi^{-1}\hat{i}))=\psi\circ\pi\circ L_v\circ\varphi^{-1}\hat{i}\ =\hat{\pi}\circ\varphi\circ L_v\circ\varphi^{-1}\circ\hat{i}$$

que es composición de funciones diferenciables.

6.5.6 *$\pi:G\longrightarrow G/H$ es submersión*

Para cada punto $a\in G$ podemos tomar la carta en G por a (V_a,φ_a) definida por traslación a la izquierda de (V,φ): $\varphi_a^{-1}=L_a\circ\varphi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} aW \arrow[r, "\varphi_a"] & \hat{W} \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\ & W \arrow[ul, "L_a"] \end{tikzcd}$$

y la carta $(\pi(W_a),\psi_a)$ por $\pi(a)$ en G/H definida en 6.5.4. La conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} \hat{W} \arrow[d, "\psi_a^{-1}"'] & \tilde{W}\times\hat{W} \arrow[l, "\hat{\pi}"'] \\ \pi(W_a) & W_a \arrow[l, "\pi"] \arrow[u, "\varphi_a"'] \end{tikzcd}$$

da la representación canónica $\hat{\pi}$ de la submersión pedida.

6.5.7 *El espacio tangente en $\pi(e)$ es $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$*

Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie del subgrupo de Lie H. La aplicación lineal

$$d\pi(e):\mathfrak{g}\longrightarrow T_{\pi(e)}(G/H)$$

tiene por núcleo $\mathfrak{h}$, ya que si $A\in\mathfrak{h}$, entonces $\exp(tA)\in H$, y $t\longrightarrow\pi(\exp(tA)$ es una curva constante y $0=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\pi(\exp(tA)=d\pi(e)(A)$. Así $\mathfrak{h}\subseteq\ker(d\pi(e))$. La otra inclusión se obtiene por razón de dimensiones. De esta forma, queda definido un isomorfismo canónico:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\ni A+\mathfrak{h}\longrightarrow d\pi(e)(A)\in T_{\pi(e)}(G/H).$$

6.6 **Grupo Cociente** G/H

Supuesto que H es subgrupo cerrado y normal de G, el cociente G/H tiene estructura de grupo, y de variedad diferenciable. Se trata de ver que ambas son compatibles, es decir, que G/H admite una (única) estructura de grupo de Lie de forma que la proyección canónica $\pi:G\longrightarrow G/H$ sea homomorfismo de grupos de Lie. En efecto, si $\mu:G\times G\ni(a,b)\longrightarrow ab^{-1}\in G$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H\times G/H \arrow[r, "\bar{\mu}"] & G/H \end{tikzcd}$$

es conmutativo y por ser μ diferenciable y π submersión se concluye que $\bar{\mu}$ es diferenciable y por tanto G/H es grupo de Lie.

6.6.2 *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de G/H*

El álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ del subgrupo normal H, es por 6.4 un ideal de $\mathfrak{g}$, y por tanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tiene estructura canónica de álgebra de Lie. Como según 6.5.7, $T_{\pi(e)}(G/H)$ se identifica con $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, es natural preguntarse si esta identificación es válida a nivel de álgebras de Lie. La respuesta es afirmativa:

Como $\pi:G\longrightarrow G/H$ es homomorfismo de grupos de Lie, es $d\pi(e):\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ homomorfismo de álgebras de Lie por lo que para todo $A,B\in\mathfrak{g}$:

$$[A,B]+\mathfrak{h}=d\pi(e)[A,B]=[d\pi(e)(A),d\pi(e)(B)]=[A+\mathfrak{h},B+\mathfrak{h}]$$

que coincide con la estructura canónica de 5.4.1.

6.6.3

Se demuestra que si G es grupo de Lie simplemente conexo, y H es subgrupo cerrado y normal de G, entonces los grupos de Lie H y G/H son también simplemente conexos (ver Varadajan 3.18.2). En particular esto es así cuando se toma H el centro de G.

6.6.4

El cociente de una grupo de Lie G por su centro Z, da lugar a un grupo de Lie $\bar{G}=G/Z$ con centro trivial.

6.6.5 *Teorema de Isomorfía.*

Si $\phi:G\longrightarrow\bar{G}$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces H=ker ϕ es un subgrupo cerrado normal de G con álgebra de Lie ker $d\phi(e)$, y im ϕ es un subgrupo de Lie de $\bar{G}$, con álgebra de Lie im $d\phi(e)$. Además el diagrama conmutativo del primer teorema de isomorfía:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \bar{G} \\ G/\ker\phi \arrow[r, "\bar{\phi}"] & \mathrm{im}\,\phi \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

está formado por homomorfismos de grupos de Lie.

Demostración:

im ϕ es un subgrupo abstracto de $\bar{G}$ que admite una estructura de grupo de Lie por la condición de ser $\bar{\phi}$ isomormorfismo de grupos de Lie. Como π es submersión $j\circ\bar{\phi}$ es diferenciable por serlo ϕ, luego, j es diferenciable.

Por otra parte, es obvio que si $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de ker ϕ, entonces ker $d\phi(e)\subseteq\mathfrak{h}$ por la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & \bar{G} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi(e)"] & \bar{\mathfrak{g}} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, si $d\phi(e)(A)=0$ entonces $\phi(\exp(tA))=0$ y $\exp(tA)\in\ker\phi$, luego $A=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tA)\in\mathfrak{h}$. La otra inclusión se obtiene por razón de dimensiones.

Finalmente j es inmersión por la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d\phi(e)"] \arrow[d, "d\pi(e)"'] & \bar{\mathfrak{g}} \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r, "d\bar{\phi}(\pi e)"] & T_{\bar{e}}\mathrm{im}\,\phi \arrow[u, "dj(\bar{e})"'] \end{tikzcd}$$

Usando el teorema de isomorfía a nivel vectorial, se ve que el álgebra de Lie de im ϕ es im $d\phi(e)$.

6.7 Los Grupos lineales proyectivos

En este epígrafe supondremos $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y excluimos explícitamente el caso $\mathbb{K}=\mathbb{H}$

6.7.1

Se demuestra que el centro $ZL(n+1,\mathbb{K})$ del grupo $GL(n+1,\mathbb{K})$, está formado por las homotecias vectoriales de razón no nula, es decir:

$$ZL(n+1,\mathbb{K})=\{\lambda I:\lambda\in\mathbb{K}-\{0\}\}$$

Como $ZL(n+1,\mathbb{K})$ es obviamente subgrupo cerrado y normal por 5.6

$$GP(n,\mathbb{K})=GL(n+1,\mathbb{K})/ZL(n+1,\mathbb{K})$$

es un grupo de Lie que se llama grupo lineal proyectivo, y puede entenderse como el grupo de las transformaciones proyectivas del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

6.7.2

En general, para un subgrupo G de $GL(n+1,\mathbb{K})$ diremos que tiene centro natural, si el centro $Z(G)$ de G se escribe $Z(G)=G\cap ZL(n+1,\mathbb{K})$.

Puede probarse que si $\mathbb{E}=\mathbb{K}^n_o$ ó $\bar{\mathbb{K}}^n_o$ entonces $G(\mathbb{E})$ tienen centro regular.

6.7.3 PROYECTIVIZACION DE UN GRUPO LINEAL

El álgebra de Lie de $ZL(n+1,\mathbb{K})$ es :

$$\mathfrak{zl}(n+1,\mathbb{K})=\{\lambda I:\lambda\in\mathbb{K}\}$$

que es *canónicamente* isomorfo (lineal) a $\mathbb{K}$ y resulta ser ideal abeliano de $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{K})$. El cociente $\mathfrak{gp}(n,\mathbb{K})=\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{K})/\mathfrak{zl}(n+1,\mathbb{K})$, es por tanto el álgebra de Lie de $GP(n,\mathbb{K})$. Si $P:GL(n+1,\mathbb{K})\longrightarrow GP(n,\mathbb{K})$ es la proyección canónica, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} GL(n+1,\mathbb{K}) & \xrightarrow{P} & GP(n,\mathbb{K}) \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{K}) & \xrightarrow{P_*} & \mathfrak{gp}(n,\mathbb{K}) \end{array}$$

en donde P_* es también proyección canónica, y exp la aplicación exponencial.

Si $a\in GL(n+1,\mathbb{K})$ denotamos

$$[a]=P^{-1}P(a)=\{\lambda a:\lambda\in\mathbb{K}^*\}=\{x\in GL(n+1,\mathbb{K}):P(x)=P(a)\}$$

evidentemente $[a]$ se identifica con $P(a)\in GP(n,\mathbb{K})$. Como es bien conocido $[a]$ se identifica con la transformación proyectiva:

$$[a]:\mathbb{P}_n(\mathbb{K})\ni\begin{bmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\longrightarrow\left[a\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$$

y $GP(n,\mathbb{K})$ con el grupo de las transformaciones proyectivas de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Se tiene:

$$[a]\circ[b]=[ab]\quad\forall a,b\in GL(n+1,\mathbb{K})$$

Si G es un subgrupo de Lie de $GL(n+1,\mathbb{K})$, entonces se denomina $PG=P(G)$ proyectivización de G. Se tiene:

$$PG=\{[a]:a\in G\}$$

TEOREMA

Si G es un subgrupo de Lie de $GL(n+1,\mathbb{K})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces PG es un subgrupo de Lie de $GP(n,\mathbb{K})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{pg}=\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{zl}(n+1,\mathbb{K}))$ de forma que:

a) Si $I\in\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{pg}\cong\mathfrak{sg}=\{A\in\mathfrak{g}$: traza $A=0\}$ (vía P_*)

b) Si $I\notin\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{pg}\cong\mathfrak{g}$ (vía P_*) y $P:G\longrightarrow PG$ es una cubierta.

Por otra parte G tiene centro Z trivial, si y solo si G es de centro regular, lo que que equivale a $PG=G/Z$.

Demostración:

El teorema de isomorfía 6.6.5 aplicado al homomorfismo $P:G\longrightarrow GP(n,\mathbb{K})$, y prueba la afirmación inicial.

Si $I\in\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{zl}(n+1,\mathbb{K})\subset\mathfrak{g}$, y si $\mathfrak{sg}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{K})$ la aplicación

$$\sigma:\mathfrak{g}\ni A\longrightarrow A-\frac{1}{n+1}\mathrm{Traza}(A)I\in\mathfrak{sg}$$

define un homomorfismo de álgebras de Lie que induce un único homomorfismo $\bar{\sigma}:\mathfrak{gp}\longrightarrow\mathfrak{sg}$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "P_*"'] & \mathfrak{sg} \\ & \mathfrak{pg} \arrow[u, "\bar{\sigma}"'] \end{tikzcd}$$

que además es isomorfismo cuya inversa es $P_*|\mathfrak{sg}$.

Si $I\notin\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{zl}(n+1,\mathbb{K})\cap\mathfrak{g}=\{0\}$, y $P_*:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{pg}=\mathfrak{g}/\{0\}$ es la identidad.

Las últimas afirmaciones son elementales.■

6.7.4 LISTA DE GRUPOS PROYECTIVOS CON SU ALGEBRA DE LIE:

Grupo: $PGL(n+1,\mathbb{K})=GP(n,\mathbb{K})$

Algebra de Lie: $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{K})$

Grupo: $PO(p,q)$, $PSO(p,q)$, $PSO^{+}(p,q)$ $p>0$, $q>0$.

Algebra de Lie: $\mathfrak{so}(p,q)$

Grupo: $PO(n)$, $PSO(n)$

Algebra de Lie: $\mathfrak{so}(n)$

Grupo: $PO(p,q,\mathbb{C})\cong PO(n,\mathbb{C})$, $PSO(p,q,\mathbb{C})\cong PSO(n,\mathbb{C})$

Algebra de Lie: $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$

Grupo: $PU(p,q)=PSU(p,q)$

Algebra de Lie: $\mathfrak{su}(p,q)$

Grupo: $PU(n)= PSU(n)$

Algebra de Lie: $\mathfrak{su}(n)$

BIBLIOGRAFÍA

F.W.WARNER *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups.* Series of I.M.Singer (1971)

VARADARAJAN *Lie Groups, Lie Algebras, and their representations.* Prentice-Hall,Inc (1974)

I.R. PORTEOUS *Topological Geometry.* Van Nostrand Reinhold Company London (1963)

HELGASON *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* Academic Press, Newyork and London 1962.