UN PROYECTO DE TRABAJO SOBRE LA GEOMETRÍA LOCAL DE VARIEDADES SUMERGIDAS EN ESPACIOS HOMOGENEOS.

Javier Lafuente

Marzo de 2010 (GEOL.tex)

Índice

1. Introducción.

1.1. Geometrías de Klein

1.1.1. Definición

Una *Geometría* de *Klein* en una variedad diferenciable E, viene definida por un grupo de Lie G que actúa diferenciablemente sobre E de forma transitiva:

$$G \times E \rightarrow E, (A, x) \rightarrow \lambda_A(x) = A.x$$

Se denomina a $E = (E, G, \lambda)$ *espacio de Klein* (con grupo G de transformaciones).

Fijado un punto $o \in E$, todos los grupos de isotropía G_z de los puntos de E son conjugados con G_o. Claramente G_o es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/G_o tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim G_o$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \rightarrow G/G_o$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (una vez fijado fijado o):

$$\overline{\pi} : G/G_o \ni AG_o \rightarrow \lambda_A(o) \in E$$

que permite identificar ambos espacios ($E = G/G_o$). Denotando también por π a:

$$\pi : G \rightarrow E \ , \ A \longmapsto \lambda_A(o) = A.o$$

Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & G/G_o \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Así E resulta ser un espacio homogéneo en el sentido clásico. Nótese que dar el espacio homogéneo G/G_o es equivalente a dar un espacio de Klein E con un punto destacado o.

1.1.2. La acción Adjunta

Denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_0$ respectivamente, a las álgebras de Lie de G y G_o.

La diferencial $\pi_* = d\pi(e) : \mathfrak{g} \rightarrow T_oE$ induce por paso al cociente un isomorfismo canónico

$$\overline{\pi_*} : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \rightarrow T_oE$$

que permite identificar ambos espacios. Todo esto se concluye cuando se aplica la diferencial en el origen al diagrama anterior

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[dr, "\pi_*"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_o \arrow[d, "\overline{\pi}_*"] \\ & T_0E \end{tikzcd}$$

Recordemos que si $A \in G$, el automorfismo de conjugación $C_A : G \rightarrow G$, $a \rightarrow AaA^{-1}$ da lugar a

$$dC_A(e) = Ad_A \in GL(\mathfrak{g})$$

y la aplicación $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ define una representación denominada representación adjunta. Su restricción a G_o, $Ad_{G_o} : G_o \to GL(\mathfrak{g})$, da lugar por paso al cociente a una acción sobre el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$, que denotamos

$$\overline{Ad} : G_o \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) \tag{1}$$

. Vía la identificación $\overline{\pi_*}$ es fácil ver que para $K \in G$ y definiendo

$$\overline{L_K} : G/G_o \ni AG_o \to (KA)\, G_o \in G/G_o$$

los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\lambda_K"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ G/G_o \arrow[r, "\overline{L_K}"'] & G/G_o \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "C_K"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/G_o \arrow[r, "\overline{L_K}"'] & G/G_o \end{tikzcd}$$

Así, diferenciando en el origen (via la identificación $\overline{\pi_*}$) podemos escribir:

$$d\lambda_K(o) = \overline{Ad_K} : T_oE = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = T_oE \tag{2}$$

Recuérdese por otro lado, que si $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ es la forma de Cartan de G se verifica para $A \in G$

$$(R_A)^* \, \Omega_G = Ad_{A^{-1}} \Omega_G$$

1.1.3. Homomorfismos

Un homomorfismo entre los espacios de Klein $E = (E, G, \lambda)$, y $\overline{E} = \left(\overline{E}, \overline{G}, \overline{\lambda}\right)$ viene determinado por una aplicación diferenciable $\phi : E \to \overline{E}$, junto a un homomorfismo $\phi_* : \lambda G \to \overline{\lambda G}$ entre grupos de lie, de forma que $\phi \circ \lambda_A = (\phi_* \lambda_A) \circ \phi$, para todo $A \in G$. En el supuesto de que ϕ sea difeomorfismo, entonces $\phi_* \lambda_A = \phi \circ \lambda_A \circ \phi^{-1}$ queda unívocamente determinada, y $\phi_* : \lambda G \to \overline{\lambda G}$ es necesariamente inyectiva. Cuando además ϕ_* es sobre (y por tanto isomorfismo de grupos de Lie), se dice que ϕ es un isomorfismo y los espacios de Klein son isomorfos. Es así como (E, G, λ) y $(E, \lambda G, \lambda)$ son canónicamente isomorfos por la identidad.

En adelante supondremos que $\lambda : G \to Difeo(E)$ es inyectivo, y entonces podemos identificar G con un subgrupo λG, y $A \in G$ con $\lambda_A \in Difeo(E)$.

Un subespacio de Klein (o subespacio homogeneo) de $\overline{E} = \left(\overline{E}, \overline{G}, \overline{\lambda}\right)$, viene determinado por una subvariedad $j : E \hookrightarrow \overline{E}$ de forma que

$$G = \left\{ A \in \overline{G} : \lambda_A E = E \right\}$$

determina un subgrupo de Lie $j_* : G \hookrightarrow \overline{G}$ de forma que la acción restringida $G \times E \to E, (A, z) \to \overline{\lambda}_A(z) = A.z$ hace a $E = (E, G, \lambda)$ espacio homogéneo. En este caso (j, j_*) define un monomorfismo entre los espacios de Klein E y $\overline{E}$.

1.1.4. Prolongación de campos.

Se llama campo fundamental (o prolongación de orden 0) del vector $X \in \mathfrak{g}$, al campo $X^{(0)}$ de $E = \mathcal{G}_p^0(E)$ definido punto a punto por la fórmula

$$X^{(0)}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(tX).x)$$

Se trata del único campo de E que tiene por flujo $\phi : \mathbb{R}\times E \to E$ definido por $\phi(t,x) = \phi_t(x) = \exp(tX).x$. Fijado t, $\phi_t = \lambda_{\exp(tX)} : E \to E$ es un difeomorfismo que induce el difeomorfismo (ver epígrafe **??** en pág **??**) $\mathcal{G}_p^\ell \phi_t : \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$ definido por

$$\left(\mathcal{G}_p^\ell \phi_t\right)\left(g_s^\ell f\right) = g_s^\ell(\phi_t \circ f) = \exp(tX).g_s^\ell f$$

El caracter funtorial de $\mathcal{G}_p^{(\ell)}$ permite demostrar que la aplicación $\phi^{(\ell)} : \mathbb{R}\times\mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$ con $\phi^{(\ell)}(t,\gamma) = \left(\mathcal{G}_p^\ell\phi_t\right)(\gamma)$ define un flujo en $\mathcal{G}_p^\ell(E)$, con $\phi_t^{(\ell)}(\gamma) = \phi^{(\ell)}(t,\gamma) = \left(\mathcal{G}_p^\ell\phi_t\right)(\gamma)$, que corresponde a un único campo $X^{(\ell)}$ en $\mathcal{G}_p^\ell(E)$ definido por la condición

$$X^{(\ell)}(\gamma) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(tX).\gamma)$$

que se denomina prolongación de orden ℓ de X. En estas condiciones se tiene

Teorema. *La aplicación $\mathfrak{g} \ni X \to X^{(\ell)} \in X\left(\mathcal{G}_p^\ell(E)\right)$ es un homomorfismo entre álgebras de Lie. Es decir, es $\mathbb{R}$-lineal, y se tiene*

$$[X,Y]^{(\ell)} = -\left[X^{(\ell)}, Y^{(\ell)}\right], \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

1.1.5. El punto de vista de Klein

La acción de G sobre E, puede inducir *de forma natural* actuaciones $G\times\mathcal{M} \ni (A,M) \to A.M \in \mathcal{M}$ sobre determinadas familias $\mathcal{M}$ de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (diferenciable, métrica, conforme,...) sobre E. La propiedad que define a los objetos de $\mathcal{M}$ es conservada por el grupo G y se denomina propiedad ($G-$)geométrica. Según Klein, el estudio de la ($G-$)geometría, consiste en el análisis de las propiedades y conceptos relativos a E que permanecen invariantes por la acción del grupo G. Cada vez que tenemos una tal familia $\mathcal{M}$, queda planteado un problema de clasificación:

Dos objetos M, $\overline{M} \in \mathcal{M}$ se dicen equivalentes ($M \simeq_G \overline{M}$), si están en la misma órbita, es decir, si existe $A \in G$, tal que $A.M = \overline{M}$.

Por ejemplo el grupo G actúa de manera natural sobre el fibrado de contacto de orden ℓ :

$$G \times \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E), \ (A,\sigma) \to A.\sigma = \left(\mathcal{G}_p^\ell\lambda_A\right)(\sigma)$$

(vease epígrafe **??**) Cada clase se denomina escama geométrica de órden ℓ.

1.2. Generalidades sobre Invariantes y clasificación de variedades.

Todas las variedades las supondremos de dimensión fija p contenidas en el espacio de Klein fijo E con dimensión $m > p$ y grupo G de transformaciones.

También debemos suponer (implícitamente) que todas ellas pertenecen a una cierta familia $\mathcal{F}$ invariante por la acción del grupo G. En principio no impondremos a la familia $\mathcal{F}$ restricción alguna. Sin embargo más adelante será necesario imponerle regularidad.

Dos p-variedades M y $\overline{M}$ sumergidas en un espacio de Klein E se dirán *G-congruentes* si existe una transformación $A \in G$, tal que $\overline{M} = \lambda_A(M)$. A la aplicación restricción $\lambda_A : M \to \overline{M}$ se le denomina *G-congruencia*. Nótese que dos variedades G-congruentes son en particular difeomorfas y tienen por tanto la misma dimensión p.

Hacer G-geometría de $p-$variedades, consiste a *groso modo* en estudiar aquellas propiedades de las variedades que permanecen inalteradas por la acción del grupo.

En particular estamos interesados en dar criterios prácticos para reconocer cuando dos $p-$variedades son G-congruentes.

Obsérvese que $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ son congruentes, si y solo si existe $\phi : S \to \overline{S}$ difeomorfismo, y $A \in G$ tal que $\lambda_A \circ f = \overline{f} \circ \phi$.

1.2.1. Fibrado tensorial en la Grassmaniana.

Si V es espacio vectorial denotamos $T_l^k V$ al espacio vectorial de los tensores tipo (k,l) (k veces contaravariantes y l covariante). El fibrado (k,l)-tensorial en la Grassmanianana $\mathcal{G}_p^1(E)$ de la variedad E es $T_l^k \mathcal{G}_p^1(E)$ definido como

$$T_l^k \mathcal{G}_p^1(E) = \cup_{\sigma \in \mathcal{G}_p^1(E)} T_l^k \sigma$$

que constituye un fibrado sobre $\mathcal{G}_p^1(E)$ (con su proyección natural) y fibra tipo $T_l^k(\mathbb{R}^m)$.

1.2.2. Invariantes tensoriales.

Sea $\mathcal{G}^n$ una subvariedad de $\mathcal{G}_p^n(E)$ que sea G-invariante. Esto significa que $G.\mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}^n$ en la acción $G \times \mathcal{G}_p^n(E) \to \mathcal{G}_p^n(E)$ es $G.\mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}^n$. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G}^n)$ la familia ($G-$invariante!) de p-variedades M de E tales que $g_z^n M \in \mathcal{G}^n \ \forall z \in M$. Un invariante (k,l)-tensorial sobre las variedades de $\mathcal{F}$, es una aplicación diferenciable entre fibrados $\Phi : \mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}_p^n(E) \to T_l^k \mathcal{G}_p^1(E)$, que asocia a cada $\gamma \in \mathcal{G}^n$, el tensor $\Phi_\gamma \in T_l^k(T_\gamma)$, siendo $T_\gamma = \downarrow_1^n \gamma \in \mathcal{G}_p^1(E)$, y se verifica la siguiente condición:

$$(\lambda_A)^* \Phi_{A.\gamma} = \Phi_\gamma, \forall A \in G, \forall \gamma \in \mathcal{G}^n \tag{3}$$

es decir, para cada $\gamma \in \mathcal{G}^n$ y cada $A \in G$, como $T_{A.\gamma} = A.T_\gamma$, y por tanto $d\lambda_A : T_\gamma \to T_{A.\gamma}$ es un isomorfismo lineal, estamos exigiendo que $(d\lambda_A)^* \Phi_{A.\gamma} = \Phi_\gamma$.

Se dice que el invariante es Φ de orden (exactamente) n, si existen $\gamma, \overline{\gamma} \in \mathcal{G}^n$ con $\gamma \downarrow = \overline{\gamma} \downarrow \in \mathcal{G}_p^{n-1}(E)$ y sin embargo $\Phi_\gamma \neq \Phi_{\overline{\gamma}}$.

Tal invariante Φ asigna a cada variedad $M \in \mathcal{F}$ un campo tensorial $\Phi_M \in \mathfrak{T}_l^k(M)$ con

$$\Phi_M(z) = \Phi_{g_z^n M} \ \forall z \in M$$

Si $M = (f : S)$ escribimos $\Phi_f = f^* \Phi_M$.

La condición (3) supone que $\Phi_M = \lambda_A^* \Phi_{\lambda_A(M)}$, para todo $A \in G$. Esto significa si $M = (f : S)$ que $\Phi_f = \Phi_{\lambda_A \circ f}$ para todo $A \in G$.

En general, un difeomorfismo $\lambda : M \to \overline{M}$ entre variedades sumergidas en E, se dice que respeta al invariante Φ, cuando $\Phi_M = \lambda^* \Phi_{\overline{M}}$. En este sentido podemos decir que Φ se preserva por congruencias (o transformaciones λ_A de G)

Si tenemos $(s_1, \ldots s_p)$ parametrización (local) de S y $(z_1 \ldots z_m)$ parametrización local en E, el invariante Φ es de orden r si Φ_f depende de las derivadas

$$\frac{\partial^{|\alpha|} (z_j \circ f) (s_1, \ldots s_p)}{\partial s_{\alpha_1} \ldots \partial s_{\alpha_k}}$$

para $j = 1, \ldots m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$: Pero no de las derivadas de orden superior a r.

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $T_a^r M = T_a^r \overline{M}$ equivale a decir que existe un difeomorfismo $\varphi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\varphi(s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^r f = j_s^r \left(\overline{f} \circ \varphi\right)$$

y entonces debería verificarse

$$\left(\varphi^* \Phi_{\overline{f}}\right)(s) = \Phi_f(s)$$

Se tiene entonces el siguiente criterio:

Proposición 1 *El invariante $\Phi : f \to \Phi_f$ es de órden $\leq n$ si $\Phi_f(s) = \Phi_{\overline{f}}(s)$ cada vez que $f, \overline{f} : S \to \mathcal{E}$ son p-variedades con $j_s^n f = j_s^n \overline{f}$.*

1.2.3. Curvaturas.

Conviene resaltar que los invariantes tensoriales κ tipo $(0,0)$ son en realidad invariantes escalares, denominados usualmente curvaturas. En adelante solo consideraremos invariantes tensoriales, que llamaremos símplemente invariantes y más concretamente centraremos la atención en la construcción de curvaturas.

Una función diferenciable $\kappa : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$ se llama curvatura de orden n si $\kappa(A.\gamma) = \kappa(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{G}^n$ y todo $A \in G$ tal que $A.\gamma \in \mathcal{G}^n$. El nombre proviene del hecho de que la curvatura κ asocia a cada p-variedad M sumergida en E, tal que $g^n M \subset \mathcal{G}^n$ la aplicación diferenciable $\kappa_M : M \to \mathbb{R}$ definida por $\kappa_M(x) = \kappa(g_x^n M)$ (ver notación en la Nota **??** de la pág **??**), y entonces si $\overline{M} = A.M$, entonces

$$\kappa_M(x) = \kappa(g_x^n M) = \kappa(A.g_x^n M) = \kappa\left(g_{A.x}^n \overline{M}\right) = \kappa_{\overline{M}}(A.x)$$

y por tanto *se preserva por congruencias.*

Si $\mathcal{G}^q \subset \mathcal{G}_p^q(E)$ se define $\mathcal{G}^{q-1} = \mathcal{G}^q \downarrow$, y $\mathcal{G}^n = \mathcal{G}_p^n(E, \mathcal{G}^q)$ si $n > q$

Si $\kappa : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$, entonces $\kappa \circ \downarrow$ es una curvatura de orden $n+1$, sobre $\mathcal{G}^{n+1}$ ya que si $\gamma \in \mathcal{G}^{n+1}$y $X \in \mathfrak{g}$

$$(\kappa \circ \downarrow)(\exp(tX).\gamma) = \kappa((\exp(tX).\gamma)) \downarrow = \kappa(\exp(tX).(\gamma \downarrow))$$

que por hipótesis no depende de t.

Proposición *Sea $\kappa : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$ aplicación diferenciable. Si κ es una curvatura de orden n entonces κ es integral primera de $X^{(n)}$ (prolongación de orden n de X) para todo $X \in \mathfrak{g}$. Por otra parte si G es conexo y $(X_1, \ldots X_r)$ es una base de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces para que κ sea curvatura de orden n es suficiente con que sea integral primera de cada $X_i^{(n)}$ $i = 1, \ldots r$.*

Demostración. Si κ es una curvatura de orden n entonces para cada $X \in \mathfrak{g}$ y $\gamma \in \mathcal{G}^n$ se tiene

$$\kappa\left(\exp\left(tX\right).\gamma\right) = \kappa\left(\gamma\right) = \ \forall t$$

lo que significa que κ es constante sobre las curvas integrales de $X^{(n)}$.

Por otra parte, si κ es integral primera de cada $X_i^{(n)}$ entonces para cualquier $\gamma \in \mathcal{G}^n$ se tiene

$$\kappa\left(\exp\left(tX_i\right).\gamma\right) = \kappa\left(\gamma\right) \ \ \forall t,\forall i = 1, \ldots r$$

y la condición $\kappa\left(A.\gamma\right) = \kappa\left(\gamma\right)$ se verifica para todo $\gamma \in \mathcal{G}^n$ y todo $A \in G$ de la forma $A = \exp\left(t_1X_1\right)\ldots\exp\left(t_rX_r\right)$. Pero si G es conexo está generado por $\{\exp\left(tX_i\right) : t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots r\}$, ya que la aplicación

$$\left(t_1, \ldots, t_r\right) \to \exp\left(t_1X_1\right)\ldots\exp\left(t_1X_1\right)$$

es difeomorfismo local en torno al origen. Esto concluye la demostración. ■

Sea $\mathfrak{g}^{(n)}$ la pseudodistribución generada por $\left(X_i^{(n)} \ \ i = 1, \ldots r.\right)$, es decir, para cada $\gamma \in \mathcal{G}_p^n\left(E\right)$,

$$\mathfrak{g}^{(n)}\left(\gamma\right) = \operatorname{Span}\left(X_i^{(n)}\left(\gamma\right) \ \ i = 1, \ldots r.\right) \subset T_\gamma\mathcal{G}_p^n\left(E\right)$$

Por el teorema 1.1.4 se concluye que si $X = t_1X_1 + \cdots + t_rX_r \in \mathfrak{g}$, entonces $X^{(n)} = t_1X_1^{(n)} + \cdots + t_rX_r^{(n)} \in \mathfrak{g}^{(n)}$ y por tanto

$$\mathfrak{g}^{(n)}\left(\gamma\right) = \left\{X^{(n)}\left(\gamma\right) : X \in \mathfrak{g}\right\}$$

además como $[X,Y]^{(n)} = \left[X^{(n)}, Y^{(n)}\right]$ la pseudodistribución $\mathfrak{g}^{(n)}$ es involutiva. La llamamos pseudodistribución porque no es posible garantizar que $\dim\mathfrak{g}^{(n)}\left(\gamma\right)$ sea siempre la misma cuando $\gamma \in \mathcal{G}_p^n\left(E\right)$.

Proposición Si $\mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}_p^n\left(E\right)$ es un $G/\left[G_n\right]$-fibrado homogeneo entonces si $\gamma \in \mathcal{G}^n$, $\mathfrak{g}^{(n)}\left(\gamma\right) \subset T_\gamma\mathcal{G}^n$, y la pseudodistribución $\mathfrak{g}^{(n)}$ induce así en $\mathcal{G}^n$ una distribución involutiva sus hojas son las órbitas $G.\gamma$.

Localmente las hojas de la distribución se pueden determinar mediante una colección $\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n}$ de funciones diferenciables $\kappa^\nu : \mathcal{G}_p^n\left(E\right) \supset \mathcal{G}^n \underset{ab}{\supset} \mathcal{A}^n \to \mathbb{R}$ de forma que

$$\begin{cases} \kappa^1 = c^1 \\ \vdots \\ \kappa^{\mu_n} = c^{\mu_n} \end{cases}$$

representan las ecuaciones implícitas de una hoja para cada elección $c^1, \ldots, c^{\mu_n}$ de constantes. Se supone que las $\left(\kappa^\nu\right)$ son funcionalmente independientes en el sentido de que la aplicación $\left(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n}\right) : \mathcal{A}^n \to \mathbb{R}^{\mu_n}$ tenga rango máximo. Se dice entonces que $\left(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n}\right)$ forman un sistema completo de curvaturas de orden n (ver epígrafe siguiente). En estas condiciones se tiene

Lema *Si las funciones $\kappa^\nu : \mathcal{G}_p^n\left(E\right) \supset \mathcal{G}^n \underset{ab}{\supset} \mathcal{A}^n \to \mathbb{R}$ forman un sistema completo de curvaturas de orden n,entonces cualquier otra curvatura κ de orden n es de la forma*

$$\kappa = \phi\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}\right)$$

para cierta función $\phi : \mathbb{R}^{\mu_n} \underset{ab}{\supset} \mathbb{A} \to \mathbb{R}$.

Demostración. Obviamente si $\kappa = \phi\left(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n}\right)$, entonces κ es constante sobre cada hoja de la distribución $\mathfrak{g}^{(n)}$. Recíprocamente: es posible elegir una carta para $\mathcal{A}^n$ de la forma $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}, w^1, \ldots, w^{r_n}\right)$ y ahora $(\kappa^\nu = c^\nu,\ 1 \leq \nu \leq \mu_n)$ representa una hoja $\mathcal{H}\left(c^1, \ldots, c^{\mu_n}\right)$ de la distribución., y la curvatura κ toma sobre ella el valor constante digamos $\phi\left(c^1, \ldots, c^{\mu_n}\right)$. Por tanto la expresión de κ en las anteriores coordenadas $\kappa = \phi\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}\right)$, para cierta función diferenciable ϕ. ■

1.2.4. Sistemas independientes de invariantes

Un invariante Φ se dice que depende de un sistema $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ de invariantes, si todo difeomorfismo λ que respete a $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}$ respeta necesariamente a Φ. Si cada $\Phi^{(i)}$ no depende de los demás elementos de la familia se dice que el sistema de invariantes $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ es independiente.

1.2.5. Sistemas completos

Un problema fundamental en el estudio de la G-geometría de variedades, es el de su clasificación G-geométrica, que consiste en dar criterios algorítmicos para reconocer cuando dos variedades son G-congruentes.

Partimos de una familia G-invariante de p-variedades de E, digamos $\mathcal{F}$, determinada por cierta $\mathcal{G}^N \subset \mathcal{G}_p^N(E)$ que en adelante denominamos variedades *admisibles*. Denotamos $\mathcal{G}^{N-1} =\downarrow \mathcal{G}^N$,...etc.

Naturalmente, dos variedades G-congruentes son difeomorfas. Pongamos M y $\overline{M}$ variedades difeomorfas. ¿son G-congruentes? Una buena cosa sería disponer de un sistema de G-invariantes $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ de manera que cualquier difeomorfismo entre variedades admisibles que los respete a todos, sea necesariamente una G-congruencia. Un tal sistema se denomina sistema $G-$completo de invariantes. Naturalmente, si el sistema no fuera independiente, es tautológico que podría reducirse a otro mas pequeño independiente y completo.

La condición necesaria y suficiente para que $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ sea completo es que para $f, \overline{f} : S \to E$ p-variedades admisibles se verifique la equivalencia:

$$\Phi_f^{(i)} = \Phi_{\overline{f}}^{(i)}\ 1 \leq i \leq r \Leftrightarrow \overline{f} = \lambda_A \circ f \text{ para algún } A \in G$$

1.2.6. Orden de contacto geométrico

Las variedades $M, \overline{M}$ de E se dice que tienen G-contacto de orden al menos n $(n \geq 0)$ en los puntos $z \in M$, $\overline{z} \in \overline{M}$ si definen en dichos puntos la misma n-escama geométrica, es decir: Existe $A \in G$, con $\lambda_A(z) = \overline{z}$, y $\lambda_A(M)$ tiene contacto de orden al menos r en $\overline{z} \in \lambda_A(M) \cap \overline{M}$, por tanto

$$A.g_z^n M = g_{\overline{z}}^n \overline{M}$$

Esta relación es de equivalencia sobre la familia de variedades punteadas (M, z) Denotamos por $g_z^{[n]} M$ a la clase definida por (M, z), que es exactamente la escama geométrica (o G-escama) de orden n definida por M en el punto z

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $z = f(s)$, $\overline{z} = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $g_z^{[n]} M = g_{\overline{z}}^{[n]}\ \overline{M}$,equivale a decir que existe un $A \in G$ tal que $g_s^n(\lambda_A \circ f) = g_{\overline{s}}^n \overline{f}$ (según definición **??**). Por la proposición de **??** existe un $A \in G$ y un difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\phi(s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^n(\lambda_A \circ f) = j_{\overline{s}}^n\left(\overline{f} \circ \phi\right)$$

y escribimos entonces $g_s^{[n]} f = g_{\overline{s}}^{[n]} \overline{f}$

Un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ se dice que define un G-contacto de orden n, en $z \in M$, si $g_z^{[n]} M = g_{\phi(z)}^{[n]} \ \overline{M}$. Si esto se verifica para todo $z \in M$, se dice que ϕ define un G-contacto de orden n (entre M y $\overline{M}$)

Un sistema de invariantes $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ se dice completo de orden n, si todo difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ que los preserve en un punto $z \in M$, define un G-contacto en z de orden n.

Nota 2 *Un sistema completo de orden n de curvaturas $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ viene caracterizado por la propiedad de que si $\Phi_M^{(i)}(z) = \Phi_{\overline{M}}^{(i)}(\overline{z})$ para todo i, entonces $g_z^n M = g_{\overline{z}}^n \ \overline{M}$.*

1.2.7. Gérmenes geométricos de variedades

Dos variedades punteadas M y $\overline{M}$ de E se dice que definen el mismo germen en $z \in M \cap \overline{M}$, si existe un entorno común de U de z en M y en $\overline{M}$. Escribimos entonces $g_z^{(\infty)} M = g_z^{(\infty)} \overline{M}$ y se denomina germen de M en z. Dos gérmenes $g_z^{(\infty)} M$ y $g_{\overline{z}}^{(\infty)} \overline{M}$ se dirán G-congruentes, si existen entornos U de z en M y $\overline{U}$ de $\overline{z}$ en $\overline{M}$, y existe $A \in G$ tal que $A.z = \overline{z}$, y $A.U = \overline{U}$. Esta relación de congruencia , es de equivalencia sobre la familia de todas las variedades punteadas. Denotamos por $g_z^{[\infty]} M$ a la clase definida por (M, z), que denominamos germen geométrico (o G-germen) definido por M en el punto z.

Fijada una M, se probará que existe un n de forma que cualquier difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ con G-contacto de orden n es necesariamente congruencia.

Es decir $g_z^{[n]} M = g_{\phi(z)}^{[n]} \ \overline{M}$ para todo $z \in M \Rightarrow g_z^{[\infty]} M = g_{\phi(z)}^{[\infty]} \ \overline{M}$ para todo $z \in M$, y en particular (si M es conexa) entonces $\phi : M \to \overline{M}$ es una congruencia.

1.2.8. Niveles de exigencia para la solución.

Resolver un problema de clasificación G-geométrica de variedades admisibles puede entenderse según dos niveles de exigencia, que podríamos describir así:

Nivel 1 Encontrar un sistema independiente $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ de G-invariantes con la siguiente propiedad: Si $f, \overline{f} : \mathbb{S} \to E$ definen parametrizaciones globales de variedades admisibles $M = f(\mathbb{S})$, $\overline{M} = \overline{f}(\mathbb{S})$, se tiene la equivalencia

$$\Phi_f^{(i)} = \Phi_{\overline{f}}^{(i)} \ , i = 1, \ldots, r \iff \overline{f} \circ f^{-1} : M \to \overline{M} \text{ es } G\text{-congruencia}$$

Esta propiedad caracteriza en efecto, a los sistemas completos de invariantes.

Nivel 2 Encontrar las ecuaciones de compatibilidad. Es decir, fijados un abierto $\mathbb{S}$ (simplemente conexo) de $\mathbb{R}^p$ y campos tensoriales $\phi^{(i)}$ $i = 1, \ldots r$ en $\mathbb{S}$, determinar condiciones *computables* digamos (C) necesarias y suficientes para que exista una inmersión f de forma que $\phi^{(i)} = \Phi_f^{(i)}$ $i = 1, \ldots r$. Denotemos por

$$\mathfrak{F}(\mathbb{S}) = \left\{ \left\{ \phi^{(i)} : 1 \leq i \leq r \right\} : \text{verifican las condiciones } (C) \right\}$$

Supóngase que $\left\{\phi^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$. Una vez determinada una *solución* $f : \mathbb{S} \rightarrow E$ todas las demás son de la forma $\lambda_A \circ f$ cuando $A \in G$. Por tanto, supuesto $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}$, y fijado $z \in E$ (por ejemplo el origen o) los *datos* $\phi^{(i)}$ determinan un único germen geométrico, digamos $g_z^{[\infty]} M$.

Queda aún por aclarar cuando otra familia de datos $\left\{\overline{\phi}^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen. De hecho, si $\zeta : \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}$ es un monomorfismo con $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}$, y $\zeta(0) = 0$, y $\left\{\phi^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$, entonces $\left\{\zeta^* \phi^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ induce el mismo germen geométrico. Además si $\left\{\overline{\phi}^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen $\left\{\phi^{(i)}\right\}$ entonces existe una tal ζ con $\left\{\zeta^* \phi^{(i)}\right\} = \left\{\phi^{(i)}\right\}$.

1.3. Sobre el método de la referencia móvil.

1.3.1. La forma de Maurer-Cartan.

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

La aplicación $G \times \mathfrak{g} \to TG$, $(A, X) \to AX = (L_A)_* X$ define una sección canónica global del fibrado tangente TG cuya aplicación inversa $TG \to G \times \mathfrak{g}$ viene definida por $X_A \to (A, \Omega_G(X_A))$, siendo $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ la forma de Maurer-Cartan. Nótese que

$$(L_A)_*^{-1} = \Omega_G : T_A G \to \mathfrak{g} \tag{4}$$

Además un cálculo de la diferencial exterior de Ω_G da

$$d\Omega_G(X, Y) = X(\Omega_G(Y)) - Y(\Omega_G(X)) - \Omega_G([X, Y])$$

Si tomamos X, Y campos invariantes por la izquierda, los dos primeros sumandos se anulan y queda

$$d\Omega_G(X, Y) + [\Omega_G(X), \Omega_G(Y)] = 0$$

pero esto es verdad punto a punto sobre vectores tangentes, por lo que se tiene la ecuación estructural

$$d\Omega_G + \frac{1}{2}[\Omega_G, \Omega_G] = 0 \tag{5}$$

Por otra parte, Ω_G es invariante por traslaciones a la izquierda, es decir si $A \in G$

$$(L_A)^* \Omega_G = \Omega_G \tag{6}$$

1.3.2. Derivada de Darboux. Condiciones de integrabilidad

Sea S es una variedad diferenciable G un grupo de Lie y ρ: $S \to G$ aplicación diferenciable. Se denomina derivada de Darboux de ρ a la 1-forma $\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \rho^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$.

Fijada $\omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ se plantea el siguiente problema

1) Establecer condiciones necesarias y suficientes para que exista ρ: $S \to G$ diferenciable con $\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \omega$

2) Determinar todas las funciones ρ.

Usando (5) se ve que también se verifica

$$d\Omega_{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2}[\Omega_{\boldsymbol{\rho}}, \Omega_{\boldsymbol{\rho}}] = 0 \tag{7}$$

Por otra parte, usando (6) es fácil probar que si $A \in G$

$$\Omega_{A\boldsymbol{\rho}} = \Omega_{\boldsymbol{\rho}} \tag{8}$$

ya que $\Omega_{A\boldsymbol{\rho}} = (L_A \circ \boldsymbol{\rho})^* \Omega_G = \rho^* (L_A)^* \Omega_G = \rho^* \Omega_G = \Omega_{\boldsymbol{\rho}}$ y tenemos el siguiente

Teorema Fundamental de Integrabilidad *Sea S variedad diferenciable, G grupo de Lie con álgebra de lie $\mathfrak{g}$ y sea $\omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$. Se plantea encontrar todas las soluciones ρ: $S \to G$ (si existen) de la ecuación*

$$\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \omega \tag{9}$$

Entonces:

(a) La condición necesaria y suficiente para que exista ρ: $S \to G$ *diferenciable tal que* $\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \omega$ *es que se verifique*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

(b) Supuesto que existe $\rho_0 : S \to G$ *diferenciable solución de (9) todas las soluciones de (9) son de la forma*

$$\boldsymbol{\rho} = A\boldsymbol{\rho}_0 \text{ con } A \in G$$

En particular, cualquier solución ρ: $S \to G$ *viene unívocamente determinada por el valor que toma sobre un punto dado de* S.

1.3.3. Referencias en un espacio de Klein.

En lo que sigue $E = (E, G, \lambda)$ es una geometría (fiel) de Klein. Fijado un origen $o \in E$, es $G_o = \{A \in G : A.o = o\}$ su grupo de isotropía. La proyección $\pi : G \ni A \to \lambda_A(o) \in E$, induce en G una estructura natural de fibrado principal (con base E y grupo $G_o = \{A \in G : \lambda_A(o) = o\}$), (ver definición y notaciones en 1.1.1). G se puede considerar como un fibrado de referencias en el siguiente sentido:

Referencias en un punto Una referencia (o mas exactamente o-referencia) en un punto (o con origen en) $z \in E$, es un elemento $\rho \in G$, tal que $\pi(\rho) = z$. Así $\pi^{-1}(z)$ es el conjunto de las referencias en el punto z. Cuando se ve a G como el conjunto de todas las referencias. Lo denotamos por $o(E) = \{\rho : \rho \in G\}$ y la proyección $\pi : o(E) \to E$, que hace corresponder a cada referencia ρ, su origen $z = \rho.o \in E$, es entonces un fibrado (de referencias) con fibra G_o. Así $o(E, z) = \{\rho K : K \in G_o\}$

Si $\rho \in o(E, z)$, y $A \in G$ transforma z en $\lambda_A(z) = b$, entonces se entiende que A transforma la referencia ρ en la $(\lambda_A)_* \rho = A\rho \in o(E, b)$. Recíprocamente si $\rho \in o(E, z)$, y $\overline{\rho} \in o(E, \overline{z})$ existe una única transformación λ_A con $A = \rho^{-1}\overline{\rho}$ que transforma la referencia ρ en la $\overline{\rho}$.

Referencias móviles. Una referencia móvil (local) en torno a un punto $z \in E$, es una sección local del fibrado de referencias $\pi : o(E) \to E$, es decir, es una aplicación diferenciable ρ: $\mathcal{U} \to G$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de z en E, y $\rho(z) \in o(E, z)$ para todo $z \in \mathcal{U}$. De hecho, E admite referencias móviles ρ en torno a cada punto z con un valor predeterminado $\rho(z) = \rho \in o(E, z)$. Esta afirmación, equivale justamente a admitir que $o(E)$ es fibrado principal de base E y grupo G_o

Referencias en variedades. Sea $f : S \to E$ variedad diferenciable sumergida en el espacio de Klein $E = (E, G, \lambda)$

El conjunto de las referencias a lo largo de f, $o(f)$ se construye como el pullback por f del fibrado de referencias $o(E)$, es decir $o(f) = \cup_{s \in S} o(f, s) = f^* G(E) \to S$ donde para cada $s \in S$ es

$$o(f, s) = o(E, f(s)) = \{\rho \in o(E) : \pi(\rho) \in f(s)\}$$

y tiene por tanto estructura natural de fibrado principal $o(f) \to S$ con fibra el grupo G_o

Referencias móviles en variedades. Una referencia (móvil) a lo largo de f es una sección (local) ρ del fibrado $o(f) \to S$ de referencias en f. Por tanto ρ: $S \to G$ es una aplicación diferenciable, tal que $\pi(\rho(s)) = f(s)$ para todo $s \in S$. Denotamos por $\Gamma(o(f))$ la familia de tales referencias.

La forma de Darboux de una referencia movil. Si $\rho \in \Gamma(o(f))$ la 1-forma $\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \rho^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ .se denomina forma Maurer Cartan asociada a ρ. El Teorema Fundamental 1.3.2 es la clave que nos permitirá usar la forma Darboux como potente herramienta para la clasificación de variedades.

1.3.4. Referencias de Frenet.

Supongamos que tenemos una familia admisible $\mathcal{F} = \{(f : S)\}$ de p-variedades de E, y que disponemos de un procedimiento algorítmico-geométrico para construir a partir de cada f una familia $\{\boldsymbol{\rho}_f\}$ de referencias móviles (elementos de $\Gamma(o(f))$), y que todas ellas se pueden determinar a partir de una dada $\rho \in \{\boldsymbol{\rho}_f\}$ por traslación a la derecha respecto a elementos de cierto subgrupo $G_\infty \subset G_0$ es decir

$$\{\boldsymbol{\rho}_f\} = \{\boldsymbol{\rho}\mathbf{K} : \mathbf{K} : S \to G_\infty \text{ diferenciable}\}$$

El procedimiento no debe depender de la parametrización en el sentido de que si $\overline{f} : \overline{S} \to E$, variedad p-dimensional sumergida, $\phi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo y $f = \overline{f} \circ \phi$ (i.e.$(f : S) = (\overline{f} : \overline{S})$) entonces $\{\boldsymbol{\rho}_f\} = \left\{\boldsymbol{\rho}_{\overline{f}} \circ \phi\right\}$.

Además se debe verificar la siguiente propiedad:

$$\widetilde{f} = \lambda_A \circ f \text{ para } A \in G, \text{ y } \rho \in \{\boldsymbol{\rho}_f\} \Rightarrow A\rho = \widetilde{\boldsymbol{\rho}} \in \left\{\boldsymbol{\rho}_{\widetilde{f}}\right\}$$

Denotamos $\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\{\rho_f\}}\right\}$.

De esta forma nos aseguramos que la asignación $f \rightsquigarrow \{\Omega_f\}$ constituye un invariante.

Teorema. La asignación $f \rightsquigarrow \{\Omega_f\}$ constituye un invariante completo para la clasificación de variedades de $\mathcal{F}$. Es decir:

Sean $f, \widetilde{f} : S \to \mathcal{E}$, subvariedades de $\mathcal{F}$ entonces:

$$\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\widetilde{f}}\right\} \Longleftrightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{f} = \lambda_A \circ f$$

Demostración.

La afirmación $\Rightarrow$ es consecuencia directa del TFC 1.3.2 pues si $\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \Omega_{\widetilde{\boldsymbol{\rho}}}$ para ciertos $\rho \in \{\boldsymbol{\rho}_f\}$, $\widetilde{\boldsymbol{\rho}} \in \left\{\boldsymbol{\rho}_{\widetilde{f}}\right\}$ entonces

$$\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \Omega_{\widetilde{\boldsymbol{\rho}}} \Rightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{\boldsymbol{\rho}} = A\boldsymbol{\rho} \Rightarrow \widetilde{f} = \widetilde{\boldsymbol{\rho}}.o = (A\boldsymbol{\rho}).o = \lambda_A \circ f$$

La implicación $\Leftarrow$. es consecuencia de que si $\rho \in \{\boldsymbol{\rho}_f\} \Rightarrow A\rho = \widetilde{\boldsymbol{\rho}} \in \left\{\boldsymbol{\rho}_{\widetilde{f}}\right\}$, y por TCF 1.3.2 es $\Omega_{\boldsymbol{\rho}} = \Omega_{\widetilde{\boldsymbol{\rho}}}$ y $\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\widetilde{f}}\right\}$.

Corolario. *Sean $f : S \to \mathcal{E}$, $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$ subvariedades de $\mathcal{F}$, $M = (f : S)$, $\overline{M} = (\overline{f} : \overline{S})$ entonces son equivalentes*

i) $\exists \phi : S \to \overline{S}$ *difeomorfismo tal que* $\phi^* \left\{\Omega_{\overline{f}}\right\} = \{\Omega_f\}$

ii) *La aplicación $\varphi : M \to \overline{M}$, $f(s) \to \overline{f}(\phi s)$ es una congruencia.*

Observación. En el caso extremo $G_\infty = \{id\}$, entonces $\{\Omega_f\}$ consta de un único elemento Ω_f, y hay una única referencia móvil de Frenet ρ_f para cada $f \in \mathcal{F}$. La *formula* que nos da $\Omega_f \in \Omega^1(\mathbb{S}, \mathfrak{g})$ a partir de f, nos resuelve el problema a Nivel 1 el problema de clasificación.

Esto también es así en el caso G_∞ discreto, donde la colección de las $\{\Omega_f\} = \{Ad_K\omega : K \in G_\infty\}$ es *calculable* a partir de un cierto $\omega \in \{\Omega_f\}$.

Por el contrario el método pierde efectividad a medida que G_∞ aumenta. Así en el caso trivial en que $G_\infty = G_0$, el procedimiento apenas dice nada.