Un Proyecto Investigador sobre las métricas con cambio Riemann-Lorentz de signatura.

Javier Lafuente López

Noviembre 2005 (revisado en Mayo de 2009)

1. Sobre los espacios Lorentz-Riemann transversales.

Un *espacio Lorentz-Riemann tipo transverso* (brévemente *TRL-espacio*) consta de una variedad M de dimensión $m \geq 2$, dotada de un tensor 2-covariante simétrico g, definido sobre un abierto de M. Se denota:

$$D^{\infty} = \left\{ p \in M \Big/ \ g|_p \text{ no existe} \right\}$$
$$D^{0} = \left\{ p \in M - D^{\infty} \Big/ g|_p \text{ es degenerada} \right\}$$

Los puntos de D^{∞} se llaman *polos* y los de D^0 *singulares* (de g). Si $D^{\infty} = \varnothing$, y $.D^0 \neq \varnothing$ se dice con final singular. si $D^0 = \varnothing$, y $.D^{\infty} \neq \varnothing$ se dice con final polar.

D1) *El tensor g es degenerado de tipo Lorentz-Riemann transverso sobre D^0, y con radical transverso.*
Esto significa que si $(E_1, \ldots, E_m)$ es una paralelización en un entorno U de un punto $p \in D^0$, se tiene que

$$\det\left(g\left(E_a, E_b\right)\right) = 0 \text{ es ecuación de } D^0, \text{ es decir:}$$
$$U \cap D^0 = \left\{x \in U : \det\left(g\left(E_a, E_b\right)\right)|_x = 0\right\}$$
$$d\left(\det\left(g\left(E_a, E_b\right)\right)\right)|_x \neq 0 \ \forall x \in U \cap D^0$$

Esta condición (*tipo transverso*) es independiente de la base (E_a) tomada. Esto supone que D^0 es una hipersuperficie (denominada *singular*) y el cambio de indice de la métrica al atravesar D^0 es de una unidad. Además para cada $p \in D^0$, el subespacio radical

$$Rad_p\left(g\right) = \left\{X \in T_pM : g\left(X, Y\right) = 0, \ \forall Y \in T_pM\right\}$$

es unidimensional. Nuestra hipótesis *radical transverso* afirma además que el radical $Rad_p\left(g\right)$ es transverso a T_pD^0 en todo $p \in D^0$. Nótese que sobre cada componente conexa de $M - \left(D^0 \cup D^{\infty}\right)$ el tensor g induce una estructura semiriemanniana clásica. Nuestra hipótesis afirma que es de tipo Rimanniano o Lorentziano.

Por otra parte en cada punto $p \in M - D^{\infty}$, hay definido un homomorfismo

$$T_pM \rightarrow T_p^*M, \ X \rightarrow \alpha_X = g\left(X, \bullet\right)$$

que resulta ser isomorfismo si y solo si p no es un punto singular, en este caso se denota

$$T_p^*M \rightarrow T_pM, \ \alpha \rightarrow X_\alpha$$

a su aplicación inversa, y el campo X_α viene caracterizado por la condición

$$\alpha(Y) = g(X_\alpha, Y), \forall Y \in T_pM$$

Podemos entonces convenir en definir *la métrica dual (* de g) en p, $g^*: T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R}$, por la condición

$$g^*(\alpha, \beta) = g(X_\alpha, X_\beta) \tag{1}$$

y g^* es un tensor $2-$contravariante en $M - (D^0 \cup D^\infty)$. Se exige entonces la siguiente propiedad:

D2) *La métrica dual g^*, se extiende diferenciablemente a todo $M - D^0$, y es degenerada de tipo transverso en D^∞.*
Esto significa que si $(\theta^1, \ldots, \theta^m)$ es una base de 1-formas en un entorno U de un punto $p \in D^\infty$, se tiene que

$$\begin{gathered} \det\left(g\left(\theta^a, \theta^b\right)\right) = 0 \text{ es ecuación de } D^\infty \text{, es decir:} \\ U \cap D^\infty = \left\{x \in U : \det\left(g\left(\theta^a, \theta^b\right)\right)\Big|_x = 0\right\} \\ d_x \det\left(g\left(\theta^a, \theta^b\right)\right) \neq 0 \ \forall x \in U \cap D^\infty \end{gathered}$$

La condición es independiente de la base (θ^a) tomada. En particular, D^∞ es una hipersuperficie (denominada *polar*).

Si $p \in D^\infty$, el radical $Rad_p(g^*) \subset T_p^*M$ es unidimensional. En estas condiciones el anulador

$$An(Rad_p(g^*)) = \{X \in T_pM : \mu(X) = 0, \forall \mu \in Rad_p(g^*)\}$$

es $(m-1)$-dimensional. Se impone entonces

D3) *El anulador es tangente (a D^∞).*
Es decir, $(Rad_p(g^*)) = T_pD^\infty$ para todo $p \in D^\infty$.
De hecho si $\mu \in Rad_p(g^*)$, y $\mu \neq 0$, entonces la condición se escribe en el punto p: $\ker \mu = T_pD^\infty$.

Cada componente conexa C de $M - (D^0 \cup D^\infty)$ es un abierto de M que tiene estructura natural de variedad semiriemanniana, y puede ser tipo Lorentz o Riemann. La frontera topológica ∂C de C está contenida en $D^0 \cup D^\infty$.

2. Problemas abiertos.

Se ha fijado una componente Lorentz, D^- sumergida en un TLR-espacio (M, g), de dimensión $m \geq 2$ (y preferiblemente $m = 4$ para cuestiones relacionadas con relatividad), con *hiperplanos finales* D^0 y D^∞.

No puedo dejar de pensar en D^∞ como un *big-bang* y en D^0 como un *big-crunch.* O que quizás, imponiendo ciertas hipótesis adicionales podrían ser capaces de modelizar ciertas situaciones límite en Relatividad General.

Advertimos que en muchas de las cuestiones de tipo local que planteamos no es relevante el TLR-espacio total M sino mas bien el comportamiento en torno a los puntos $D^\infty \cup D^0$ El lector interpretará en cada caso a que nos referimos

2.1. Cuestiones Geodésicas [4], [1].

Los *hiperplanos finales,* D^0 y D^∞ cuando son no vacios, tienen estructura natural de variedades riemannianas. La métrica de D^0 es justamente la heredada como subvariedad de $(M - D^\infty, g)$. La g^∞ correspondiente a D^∞ es menos evidente, y proviene del hecho de que los campos X de M que son tangentes a D^∞, son exactamente los de la forma $X = X_\alpha$ para α 1-forma en M. Así se define sin ambigüedad:

$$g^\infty (X_\alpha, X_\beta) = g^* (\alpha, \beta)$$

Hay otro fenómeno geométrico común a los dos hiperplanos finales, y es la existencia en torno a ambos de un flujo canónico semigeodésico, $\Phi^\bullet : (-c, 0] \times D^\bullet \to D^- \cup D^\bullet$, donde $\bullet$ representa el símbolo o bien 0 o bien ∞. Se trata de que $\Phi^\bullet = \Phi^\bullet (t, x)$ es un difeomorfismo sobre su imagen D_c^- que es un abierto de $D^- \cup D^\bullet$, y a valor fijo de $x \in D^\bullet$ describe una *pregeodésica con final* x:

$$\gamma_x = \gamma_x (t) = \Phi^\bullet (t, x) \ \ , t \in (-c, 0] \ \text{ con } \gamma_x (0) = x \tag{2}$$

y $\gamma'_x (0) = \nu^\bullet (x) \in T_x M$ es un vector no nulo, que en el caso D^0, está en $Rad_x (g)$, y en el caso $\bullet = \infty$, es transversal a D^∞ y hace el *papel* de vector "normal". El parámetro t significa en cada caso:

$$t = cte.g \left(\gamma'_x (t), \gamma'_x (t)\right)^\varepsilon \ \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \text{ si } \bullet = 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } \bullet = \infty \end{array} \right.$$

y queda unívocamente determinado por esta condición salvo constante multiplicativa.

La aplicación inversa $(\Phi^\bullet)^{-1} = \Psi^\bullet : D^- \cup D^\bullet \to (-c, 0] \times D^\bullet$ será de la forma $\Psi^\bullet (x) = (\tau^\bullet (x), \pi^\bullet (x))$, donde $\tau^\bullet : D^- \cup D^\bullet \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable que da lugar a una *ecuación canónica* ($\tau^\bullet = 0$) para $D^\bullet$ (determinada salvo constantes multiplicativas), y $\pi^\bullet : D^- \cup D^\bullet \to D^\bullet$ proyector.

Proposición 2.1.1 *En el caso D^∞, $\tau^\infty(x)$ representa (salvo constante fija negativa) para $x \in D^-$ el cuadrado de la separación temporal entre x y D^∞ que coincide con longitud al cuadrado de la única pregeodésica $\gamma_{\pi^\infty(x)}$ entre 0 y $\tau^\infty(x)$ que une $\pi^\infty(x)$ con x. De hecho esta propiedad caracteriza las $\gamma_{\pi^\infty(x)}$.*

La pregeodésica γ_x en el caso D^0 fue descubierta por Kossowski, (ver [4]) y de hecho parametriza la *parte Lorentz* de la única *linea geodésica* Γ_x clase C^∞ (como subvariedad) que atraviesa D^0 por $x \in D^0$ en la dirección del radical. Kossowski de hecho prueba que hay una infinidad en D^- (y D^+) de pregeodésicas con final x que entran en la dirección de $\nu^0(x)$, pero solo uno de ellas que viene de D^- empalma con solo una que viene de D^+ para dar la linea geodésica Γ_x.

En el caso D^∞ , γ_x ha sido obtenida recientemente por mi mismo (ver [1]), y también con ayuda del del proyector Blow-up (ver [2]) $\rho^\pm : VB^\pm \to D^\pm \cup D^\infty$.

Proposición 2.1.2 *Para cada $x \in D^\infty$, $\gamma_x : (-c, 0] \to D^\pm \cup D^\infty$ constituye la parte Lorentz (resp. Riemann) de la única pregeodésica Γ_x clase C^1 (como subvariedad) que atraviesa D^∞ por x.*

Esta propiedad caracteriza la dirección normal $\nu^\infty(x) = \gamma'_x(0)$.

Sin embargo por cada punto $x \in D^0$ atraviesan una infinidad de pregeodésicas de clase C^1(ver [4])

Usando el flujo geodésico normal y la técnica Blow-up, hemos conseguido probar (ver [1])

Teorema 2.1.1 *en un entorno de cada punto $p \in D^\infty$, existen unas coordenadas locales clase C^∞ $(U, x = (x^i, x^m))$ en la variedad con borde $D^- \cup D^\infty$, con respecto a la cual la matriz (g_{ab}) de la métrica se escribe*

$$\begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & 1/x^m \end{pmatrix}$$

Naturalmente el mismo argumento permite hacer lo propio en componente riemannianas.

Problema 1 *Demostrar que la carta obtenida* pegando a la carta anterior *la correspondiente a $D^+ \cup D^\infty$ es Clase C^∞.*

2.2. Cuestiones de extendibilidad [6], [2].

Interesa estudiar el comportamiento en las proximidades de los hiperplanos finales en TRLD-espacio, de algunos objetos bien definidos en $M -$

$(D^0 \cup D^\infty)$ por su estructura semiriemanniana. Por ejemplo las curvaturas. Tipicamente se parte de un objeto diferenciable bien definido en cada componente $M - (D^0 \cup D^\infty)$, digamos $\bigcirc$ (puede ser la conexión de Levi-Civita alguna curvatura, o una geodésica maximal, una función, un campo...etc). Intentaremos explicar con un ejemplo la simbología $\overset{\bullet}{\approx}$, y $\overset{\bullet}{\cong}$

1. Decir $\bigcirc \overset{\bullet}{\approx} 0$, significa que el objeto inicialmente definido en una componente de $M - (D^0 \cup D^\infty)$ tiene extensión diferenciable al borde $D^\bullet$. Se denota al objeto extendido por el mismo símbolo $\bigcirc$ y por por $\bigcirc_\bullet$ su restricción a $D^\bullet$.
2. Si el objeto $\bigcirc$ está definido en dos componentes que tienen zona de borde común $D^\bullet$ escribimos, $\bigcirc \overset{\bullet}{\cong} 0$ si se extiende a $D^\bullet$.
3. Si $\bigcirc$ es un tensor semiriemanniano escribir $\bigcirc \overset{\bullet}{\approx} 0$, (resp.$\bigcirc \overset{\bullet}{\cong} 0$) significa $\bigcirc(A, B, \ldots) \overset{\bullet}{\approx} 0$ (resp.$\bigcirc(A, B, \ldots) \overset{\bullet}{\cong} 0$) para campos cualesquiera $A, B, \ldots$.

Nos referiremos también en un sentido obvio a la $\left(\overset{\bullet}{\approx}\right)$-extendibilidad (a un lado) y $\left(\overset{\bullet}{\cong}\right)$-extendibilidad (a ambos lados)

Con esta terminología Kossowski probó ([6]) que si K es la curvatura covariante entonces:

$$D^0 \text{ II-plana} \Leftrightarrow K \overset{0}{\cong} 0$$

Esto no es exactamente cierto con el tensor contravariante de curvatura, sin embargo utilizando la técnica Blow-up, Kossowski consigue $\left(\overset{\bullet}{\approx}\right)$-extender para ciertas paralelizaciones adaptadas, las formas de curvatura. Gracias a esto puede construir en los TLR-espacios Teoremas tipo Gauss-Bonnet. (ver epígrafe 2.3)

Por otra parte, con nuestra ayuda, Victor Fernández [3] ha probado:

$$D^0 \text{ conforme III-plana} \Leftrightarrow W \overset{0}{\cong} 0$$

donde W es el tensor de curvatura de Weil.

Usando justamente la carta del Teorema 2.1.1 puede analizarse el comportamiento del tensor de curvatura contravariante R, y los tensores Ric de Ricci covariante Ric, contravariante $\uparrow Ric$ y curvatura escalar S, y curvatura de Weil contravariante W. Y hemos llegado al siguiente resultado

Teorema 2.2.1 *Sea $D^\pm$ una componente de $M - (D^0 \cup D^\infty)$ cuya frontera contiene a D^∞, y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(D^\pm \cup D^\infty)$, entonces:*

1. *Si* $Z_\infty \in \mathfrak{X}(D^\infty)$*, o bien si* $X_\infty, Y_\infty \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ *, entonces* $R(X,Y)Z \overset{\infty}{\approx} 0$.

2. *Además el tensor* R^∞ *de* g^∞ *en* D^∞ *verifica la propiedad se tiene*

$$(R(X,Y)Z)_\infty = R^\infty(X_\infty, Y_\infty)Z_\infty$$

si X_∞*,* $Y_\infty, Z_\infty \in \mathfrak{X}(D^\infty)$*.*

3. $\tau^\infty R \overset{\infty}{\approx} 0$

4. $R \overset{\infty}{\approx} 0 \Leftrightarrow (L_{\nu^\infty} g)|_{D^\infty} = 0$

5. *Si* X^∞*,* $Y^\infty \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ *entonces* $Ric(X,Y) \overset{\infty}{\approx} 0$

6. $\uparrow Ric \overset{\infty}{\approx} 0$*,* $S \overset{\infty}{\approx} 0$

7. *Si* $Z^\infty \in \mathfrak{X}(D^\infty)$*, o bien si* X^∞*,* $Y^\infty \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ *, entonces* $W(X,Y)Z \overset{\infty}{\approx} 0$.

Sería conveniente estudiar, si el teorema anterior sigue siendo válido si sustituimos el símbolo $\overset{\infty}{\approx}$ por $\overset{\infty}{\cong}$. Este asunto quedaría atomáticamente resuelto si se si se resuelve el problema 1

2.3. Cuestiones Geométricas [6],[5].

Sea C una componente conexa de $M - (D^0 \cup D^\infty)$. Se dice que C es un sandwich si , $C \cup \partial C$ es compacta, y se verifica:

$$\partial C \cap D^0 \neq \varnothing, \text{ y } \partial C \cap D^\infty \neq \varnothing$$

Ejercicio 1 *Si* M *es compacta,* D^∞*, y .*D^0 *son conexos y no vacios, y existe un sandwich Lorentz puede demostrarse este es único y se denota por* D^-*.*

$$\partial D^- = D^0 \cup D^\infty$$

Por tanto $D^- \cup \partial D^-$ *es una una variedad con borde* $D^0 \cup D^\infty$*.*
En este caso, respecto a las componentes conexas riemannianas de $M - (D^0 \cup D^\infty)$ *se da una de las siguientes posibilidades :*
a) Hay exactamente dos componentes D^+_∞*,* D^+_0 *con* $\partial D^+_\infty = D^\infty$*, y* $\partial D^+_0 = D^0$*.*
b) Hay solo una componente D^+*, y* $\partial D^+ = D^0 \cup D^\infty$

Problema 2 *Nos preguntamos que tipo de restricciones topológicas suponen para una variedad M compacta , el que sea capaz de soportar una estructura de TLR-espacio (D^{∞}, y .D^{0} son conexos y no vacios) con sandwich Lorentz. También cabe preguntarse por la misma cuestión en relación con una variedad abstracta $D^{\pm}$, para que pueda realizarse como componente (riemann o Lorentz) de tal espacio.*

Los trabajos de Kossowski para el caso de D^{0} II-plano *[6], usando la técnica Blow-up,* marchan en esta dirección. Puede ser mas accesible (y esclarecedor) comenzar por el caso $m = 2$.
En esta misma linea conviene establecer ejemplos globales de TLR-espacios con una o dos CR, en dimensiones arbitrarias. Posiblemente la esfera S^{m} pueda ser soporte de una TLR-estructura con dos CR pero no con una. Quizá el toro m-dimensional $T^{m} = (\mathbb{S}^{1})^{m}$, soporte una TLR-estructura con una CR, pero no con dos, y por supuesto, $\mathbb{R}^{m}$ admite trivialmente una TLR-estructura ¡no compacta!.

Otra pregunta consiste en dar condiciones necesarias y/o suficientes para que una variedad semiriemanniana conexa M^{ε} (Lorentziana si $\varepsilon = -1$, Riemanniana si $\varepsilon = 1$), puede sumergirse isométricamente como parte de un TLR-espacio (M, g). .

El estudio del caso Riemanniano es radicalmente distinto al Lorentziano. Sin embargo el comportamiento de los tensores de curvatura en la proximidad de los hiperplanos finales, puede ser una herramienta común para ambos casos.

Problema 3 *En las condiciones del ejercicio 1 una componente riemaniana D^{+} es geodésicamente (y por tanto métricamente) incompleta. Supuesto $D^{+} \cup D^{\bullet}$ compacto, estudiar si $D^{+} \cup D^{\bullet}$ es la complección métrica de D^{+} ($\bullet = 0, \infty$). En el caso de una única componente Riemann D^{+}¿será $D^{+} \cup D^{\infty} \cup D^{0}$ la complección métrica de D^{+} en el caso de dos componentes riemann?.*

Alguna respuesta afirmativa impone ya significativas restricciones geométricas a una variedad riemanniana M^{+} para ser sumergida como $D^{+}_{\bullet}$*, o* D^{+}*.*
Observese tanto D^{0} como D^{∞} admiten estructuras riemannianas canónicas. Pero sin embargo el tratamiento de los casos $\bullet = 0$*,* o $\bullet = \infty$ es bastante distinto. Por ejemplo, hay resultados de Kosowski [5] que garantizan en ciertas condiciones la extendibilidad local (como variedad riemanniana) de D^{+}_{0} en torno a puntos de D^{0}. Dudo que esto sea cierto para D^{∞}.

2.4. Cuestiones conformes.[1]

We consider the conformal class $(M, \mathcal{C})$ of a Riemann-Lorentz space (M, g) with polar end D^{∞}. We recall that

$$\mathcal{C} = \left\{ e^{2\sigma} g : \sigma \in C^{\infty}(M) \right\}$$

We remark that $(M, \overline{g})$ is also a Riemann-Lorentz space with polar end D^{∞} for any $\overline{g} \in \mathcal{C}$.

However we was proved that the family of the polar-normal pregeodesics are the same for all the metrics of the conformal subclass

$$\mathcal{C}'_g = \left\{ e^{2\sigma} g : \sigma = f \circ \tau_g \text{ with } f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \right\} \tag{3}$$

where $\tau_g = 0$ is the canonical equation for D^{∞} (with respect to (M, g)).Moreover $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_g$ depends only to the family of the polar-normal pregeodesic and not of the initial metric g. This means that: if $g, \overline{g} \in \mathcal{C}$ then $\overline{g}$ has the same polar normal pregeodesics that g, if and only if $\overline{g} \in \mathcal{C}'_g$.

On the other hand the family of hypersurfaces D^{∞}_t with equation $(\tau_g = t)$ depends only to $\mathcal{C}'_g$. This is the family of the *simultaneity hypersurfaces* which determines the *simultaneity distribution* $\mathcal{D}_g$. We define a (abstract) simultaneity distribution as a completely integrable $(m-1)$-distribution $\mathcal{D}$ such that D^{∞} is an integral manifold.

Se ha conseguido probar que

Teorema 2.4.1 *Given an abstract simultaneity distribution $\mathcal{D}$ then there exist $g \in \mathcal{C}$ such that $\mathcal{D} = \mathcal{D}_g$, y las $\overline{g} \in \mathcal{C}'_g$ son exactamente las que verifican $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\overline{g}}$. Es consistente por tanto escribir $\mathcal{C}'_g = \mathcal{C}'_{\mathcal{D}}$*

We consider the conformal class $(M, \mathcal{C})$ of a Riemann-Lorentz space (M, g) with polar end D^{∞}. This is the support to a causality structure of the Lorentz component D^{-}. The aim of this section, is to know if it is possible to find a big-bang.*cosmologically* privileged metric (around D^{∞}). Of Course we must to impose to $(M, \mathcal{C})$ some initial restriction as for example that should be D^{∞} conformal flat.

We recall that a Robertson-Walker space is a warped product $I \times_f S = (I \times S, g_{RW})$ where $I = (0, t^*)$ is an open interval and $f : I \to \mathbb{R}$ is a smooth function and (S, g_S) is a Riemannian manifold with constant sectional curvature.C_0 Finally

$$g_{RW} = -dt^2 + f(t)^2 g_S = f(t)^2 g$$

where $g = -f(t)^{-2} dt^2 + g_S$. Recall that $\{t\} \times S$ are simultaneity hypersurfaces of constant curvature $C(t) = C_0 f(t)^{-2}$.

We remark that the flow $\zeta_t : S \to \{t\} \times S$, $x \to (t, x)$ are homoteties of ratio $f(t)^2$

This suggest that in (M, g), near to D^{∞} the metric $g_c = -(\tau_g) g$ is the cosmologically relevant one. In fact we have:

Proposición 2.4.1 *Let (M, g) be a 4- dimensional Riemann-Lorentz space with polar end D^{∞} the flow $\zeta^g : D^{\infty} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ in section moves D^{∞} by*

$$\zeta^g_t : D^{\infty} \to D^{\infty}_t = \zeta^g (D^{\infty} \times \{t\})$$

Suppose that D^∞ has constant (Riemannian) curvature and $\zeta_t^g : D^\infty \to D_t^\infty$ are homoteties. Then the simultaneity distribution $\mathcal{D}_g$ has integral manifolds which are of constant curvature[1] *, and $g_c = -(\tau_g)\, g$ becomes (locally) D^- into a Robertson Walker space.*

Note that g_c induces the same causality structure as $[g]$ on D^-. However $g_c \notin \mathcal{C}_g$ since τ_g is null over D^∞.

Of course the physical relevant metric $g_c = -(\tau_g)\, g$ is not determined by the conformal structure $\mathcal{C} = \mathcal{C}_g$. but neither by the restricted conformal class $\mathcal{C}'_g$. However the physical relevant metric are determined up the selection of an *universal time* τ in $(M, \mathcal{C})$.

Observación 2.4.1 *To say that the integral hypersurfaces of a simultaneity distribution $\mathcal{D}$ are of constant curvature has meaning into the conformal Riemann Lorentz space space $(M, \mathcal{C})$. This means that their integral hypersurfaces has constant curvature with respect to any (or some) g belonging to the restricted conformal class $\mathcal{C}'_{\mathcal{D}}$ induced by $\mathcal{D}$ according Theorem 2.4.1*

Finally we set out the following conjecture that explain the philosophical motivation mentioned at the beginning of this subsection.

Problema 4 *Let $(M, \mathcal{C})$ be a Riemann-Lorentz conformal space with polar end D^∞. Suppose that D^∞ is conformal- flat. Then there exist (locally) a simultaneity distribution $\mathcal{D}$ of constant curvature. Moreover $\mathcal{D}$ is univocally determined.*

Problema 5 *Probar que análogamente a la observación 2.4.1, tiene sentido decir que las hipersuperficies integrales de una distribución de simultaneidad $\mathcal{D}$ son de curvatura media constante. Estudiar la existencia y unicidad de distribuciones de simultaneidad de estas características.*

Problema 6 *Reconsiderar todas estas cuestiones para el caso singular D^0*

2.5. Cuestiones de Causalidad. [5]

No puedo dejar de pensar en D^∞ como un *big-bang* y en D^0 como un *big-crunch* de un espacio-tiempo que consiste en el sandwich Lorentz de un TLR-espacio (M, g).

En todo caso nuestra principal referencia en este epígrafe está en el artículo [5] de Kossowski & Kriele.

Supondremos aquí que M es una variedad conexa y compacta, y que los hiperplanos finales son conexos. Además la componente Lorentz D^- (ver ejercicio 1) está orientada tiempo de forma que D^∞ queda hacia el pasado, y D^0 hacia el futuro.

[1] Note that such property depends only of the conformal subclass $\mathcal{C}'_g$.

Problema 7 *Si el sandwich Lorentz D^- es (¿fuertemente?) causal entonces es globalmente hiperbólico.*

Afortunadamente .la TLR-Geometría define canonicamente el desplazamiento finito $D_t^0 = \Phi_t^0 (D^0)$ de D^0y el $D_t^\infty = \Phi_t^\infty (D^\infty)$ de D^∞ para $t < 0$ suficientemente pequeño (ver epígrafe 2.1). La idea es demostrar que las hipersuperficies de *simultaneidad* D_t^0, y D_t^∞ son de Cauchy y están arbitrariamente próximas a D^0 y D^∞ respectivamente. Para ello se cuenta con que la compacidad de M *obliga* a toda curva temporal inextendible a tener sus *extremos* sobre los hiperplanos finales,

Problema 8 *Supóngase que el sandwich Lorentz D^- es fuertemente causal y orientada tiempo con el futuro en D^0. ¿será D^0 el borde causal futuro? ¿Que tiene que ver D^∞ con el borde causal pasado?*

Los teoremas de singularidad de Hawking-Penrose me sugieren un último problema (ahora debería llamarse *propuesta*) de impreciso enunciado y altamente expeculativo:

Problema 9 *Supuesto el sandwich Lorentz, D^- (fuertemente) causal, el problema 7 nos garantizaría que D^- es entonces globalmente hiperbólico, y las hipersuperficies $D_t^\bullet$ determinan superficies de Cauchy. Las D_t^∞ próximas al* supuesto *big-bang D^∞ y las D_t^0 próximas al* supuesto *big-crunch D^0.*
La propuesta consiste en estudiar que tipo de condiciones deben imponerse a g^* en las proximidades de D^∞ y a g en las proximidades de D^0 para que ${}^\infty g_c$, y ${}^0 g_c$ describan de forma físicamente aceptable las supuestas *situaciones big-bang, big-crunch.*

Nos referimos a condiciones infinitesimales (a primer o segundo orden) de la métrica g, *o* g^* *sobre* las hipersuperficies finales.
Observese que nuestro modelo $D^\infty \cup D^- \cup D^0$ venría solo determinado en entornos de D^∞ *y* D^0

2.6. Sobre las métricas con signatura cambiante.

Se pretende aquí plantear la validez de algunas afirmaciones, para ciertas métricas de signatura cambiante que ahora definiremos, y que contienen en particular a los TLR-espacios.

2.6.1. Volumen de orientación cambiante

Denotemos por Σ cierta hipersuperficie de M, que será el lugar sobre el que se producirá el cambio de orientación. Diremos que $f : M \to \mathbb{R}$, es ecuación simple de Σ, si es diferenciable, $f^{-1}(0) = \Sigma$ y $d_x f \neq 0$, para todo $x \in \Sigma$.

En primer lugar, una notación:

Si $\alpha \geq 0, x \neq 0$ son número reales, denotamos $x^{(\alpha)} = sgn(x)\,|x|^{\alpha}$, donde $sgn(x) \in \{1, -1\}$ es el signo de x. Si $\alpha < 0$, definimos $x^{(\alpha)} = 1/x^{(-\alpha)}$. En particular $x^{(0)} = sgn(x)$, $x^{(2n+1)} = x^{2n+1}$ para n entero, y $\left(x^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = x^{(\alpha\beta)}$. Además convenimos en afirmar que $0^{(\alpha)}$ no está definido.

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $f^{-1}(0) = \Sigma$, y $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $M - \Sigma$, la función $f^{(\alpha)} : M - \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por, $f^{(\alpha)}(x) = f(x)^{(\alpha)}$ también lo es. Diremos que $f : M - \Sigma \to \mathbb{R} - \{0\}$ es una (α)-ecuación para Σ, si $f^{(1/\alpha)}$ es ecuación simple de Σ. Esto significa implícitamente que la aplicación $f^{(1/\alpha)} : M - \Sigma \to \mathbb{R}$ es diferenciable y se extiende diferenciablemente (con el mismo nombre) a todo M.

Obsérvese que si $f : M \to \mathbb{R}$ es una ecuación simple de Σ, entonces $f^{(1)} = f|_{M-\Sigma} : M - \Sigma \to \mathbb{R} - \{0\}$ es (1)-ecuación de Σ, por lo que ambos conceptos son esencialmente equivalentes.

Ejercicio 2 *Probar que si τ es una ecuación simple de Σ, entonces $f : M - \Sigma \to \mathbb{R} - \{0\}$ es (α)-ecuación de Σ, si y solo si existe una función $h : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y nunca nula, tal que $f = \tau^{(\alpha)} h$.*

Sea . Diremos que Ω es un volumen (de orientación) cambiante sobre Σ, si Ω un elemento de volumen en $M - \Sigma$, y para cada punto $p \in \Sigma$, existe $\alpha \neq 0$, y una paralelización local $(E_1, \ldots E_m)$ definida sobe un entorno $\mathcal{U}$ de p en M, de forma que $\Omega(E_1, \ldots E_m)$ es una $(\alpha/2)$-ecuación para Σ en $\mathcal{U}$ (diremos que Ω es de tipo α en $\Sigma \cap \mathcal{U}$)

Ejercicio 3 *No es dificil probar, que la condición no depende de la paralelización local $(E_1, \ldots E_m)$ tomada, y que en todo caso el tipo α queda asociado a cada componente conexa de Σ. Además Ω induce una forma de volumen sobre cada componente conexa de $M - \Sigma$, y si M está globalmente orientada, Ω invierte la orientación sobre dos componentes con frontera común.*

Se dice que g métrica semiriemanniana en $M - \Sigma$, define en M un volumen de orientación cambiante, si existe Ω volumen en M de orientación cambiante sobre Σ, tal que Ω es forma canónica de volumen en cada componente conexa de $M-\Sigma$. Denotamos a $\Omega=\Omega_g$.

Ejercicio 4 *Demostrar que en estas condiciones si M es conexa Ω_g viene determinada salvo el signo.*

Una métrica (en M) de signatura cambiante (sobre Σ) viene definida a partir de *una métrica semiriemanniana g en $M-\Sigma$* que verifica las siguientes propiedades.

SC1) Para cada $p\in\Sigma$, existe $\mathcal{U}$ abierto de M, con $p\in\mathcal{U}$, y $\alpha\in\mathbb{R}$ de forma que Ω_g define en $\mathcal{U}$ un volumen de orientación cambiante tipo α sobre $\mathcal{U}\cap\Sigma$, y entonces

- Si $\alpha>0$, entonces la métrica g se extiende en $\mathcal{U}$ de forma continua. En este caso el punto p se llama *singular* (de g).
- Si $\alpha<0$ entonces la cométrica g^*, dual de g se extiende en $\mathcal{U}$ de forma continua. En este caso el punto p se llama *polar* (de g).

Ejercicio 5 *Demostrar que si g es semiriemanniana en $M-\Sigma$, y verifica SC1) entonces dos componentes distintas de $M-\Sigma$ con frontera común tienen distinta signatura.y el cambio de signatura es exactamente de una unidad. Además en cada punto singular (resp. polar) $p\in\Sigma$, queda definida sin ambigüedad una forma bilineal $g(p)$ en T_pM (resp $g^*(p)$ en T_p^*M) extensión continua de g (resp g^*) y tiene radical unidimensional. Sea $g_p : T_p\Sigma\times T_p\Sigma\to\mathbb{R}$ la restricción de $g(p)$ a $T_p\Sigma$.*

Ejercicio 6 *(Continuación) Por otra parte si $0\neq\mu\in rad\,(g^*(p))$ queda inducida sin ambigüedad una estructura métrica g_p sobre* $\ker\mu = Ann\,(rad\,(g^*(p)))$ *definida por $g_p(X_\alpha,X_\beta)=g_p^*(\alpha,\beta)$ donde*

$$T_p^*M\to T_pM,\ \alpha\to X_\alpha$$

y el campo X_α viene caracterizado por la condición

$$\beta(X_\alpha)=g^*(p)(\alpha,\beta)\,,\ \forall\beta\in T_p^*M$$

SC2) En cada punto $p\in\Sigma$ singular (resp. polar) se impone que $rad\,(g(p))$ sea transversal a $T_p\Sigma$ (resp. $Ann\,(rad\,(g^*(p)))=T_p\Sigma$), y que la asignación (ver ejercicios 5 y 6) $g_\Sigma:\Sigma\ni p\to g_p:T_p\Sigma\times T_p\Sigma\to\mathbb{R}$ defina un tensor diferenciable sobre Σ.

Observación 2.6.1 *En particular, (Σ,g_Σ) es una variedad semiriemanniana con posiblemente distintas signaturas en cada componente conexa. Además de acuerdo con el ejercicio 3, sobre cada componente conexa de Σ, la forma de volumen canónica Ω_g es de orientación cambianate de tipo constante α.*

Ejercicio 7 *Demostrar que en un entorno $\mathcal{U}$ suficientemente pequeño de cada $p \in \Sigma$, puede construirse una paralelización (E_i, E_m) de forma que los E_i,son tangentes a Σ y si $g_{ab} = g(E_a, E_b)$ se tiene que la matriz (g_{ab}) se de la forma*

$$\begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & g_{mm} \end{pmatrix} \tag{4}$$

donde las g_{ij} son funciones diferenciables en $\mathcal{U}$, y g_{mm} es (α)-ecuación de Σ. Se denomina a (E_i, E_m) base adaptada.

2.6.2. Métricas Lorentz-Riemann tipo α.

Diremos que la métrica (en M) de signatura cambiante (sobre Σ) es *Lorentz-Riemann* si g solo induce sobre las componentes de $M-\Sigma$ estructuras Lorentz o Riemann. En este caso la estructura métrica sobre Σ es necesariamente riemanniana. Se denomina a (M, g) espacio (o variedad) Lorentz-Riemann (brevemente LR-espacio). En adelante no consideraremos ningún otro tipo de métrica con signatura cambiante. La métrica es de tipo α si Ω_g es cambiante de tipo α sobre Σ. En las coordenadas (x^a) (en torno a un punto $p \in \Sigma$) donde $g = g_{ab}dx^a \otimes dx^a$, Ω_g se escribe

$$\Omega_g = \pm\sqrt{|\det(g_{ab})|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

y se concluye que $\det(g_{ab})$ es una (α)-ecuación para Σ dentro de la carta, por lo que $\det(g_{ab})$ cambia el signo al atravesar Σ.

De acuerdo con el Ejercicio 7 podemos usar una base adaptada (E_i, E_m) (en torno a cada punto de Σ) con matriz (g_{ab}) como la (4), y se concluye entonces que $g_{mm}^{(\alpha)}$ es ecuación (local) de Σ.

Para $\alpha = 1$, tenemos un TLR-espacio con final singular, y para $\alpha = -1$, con final polar.

El siguiente problema pretende generalizar los resultados dados en el epígrafe 2.1, y en particular en la proposición 2.1.1 y el problema 1.

Problema 10 *Si g es una métrica LR tipo (α-) en Σ sobre M, demostrar que en torno a cada punto $p \in \Sigma$, existe una carta C^∞ de M, digamos (x^i, t) en donde la matriz de g es de la forma*

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & t^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

Si esto es así, ¿Es $t = \tau_g$ canónica (independiente de la carta)?

La resolución del problema anterior implica (o pasa por demostrar) la existencia de una pregeodésica γ, la pregeodésica polar (en la carta adaptada, con ecuaciones $\gamma(t) = (x^i = cte,\ t)$) que atraviesa Σ ya conocidas para el caso $\alpha = \pm 1/2$

Problema 11 *Reconsiderar los problemas de esxtendibilidad planteados en el epígrafe 2.2 para cada tipo α de métrica Lorentz Riemann.*

Problema 12 *Para métricas LR tipo (-1), usando la técnica Blow-up, puede demostrarse ([2]) que fijado $\xi \in T_p D^\infty$ hay infinitas geodésicas (digo geodésicas, no pregeodésicas) γ con $\gamma'(0) = \xi$ y no atraviesan D^∞. De hecho, cualquier geodésica que llegue a tocar a D^∞ la toca tangencialmente, y no la atraviesa. Para el caso M compacto, sucede que todas las geodésicas inextendibles incompletas de $D^\pm$ mueren tangenciamente en D^∞ salvo la geodésica polar.*

Problema 13 *Demostrar que el resultado del problema anterior sigue siendo válido para el caso (α)-cambiante tipo de tipo LR con $-2 < \alpha \leq -1$.*

Sugerencia: Ensayar con $m = 2$, $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{(\alpha)} \end{pmatrix}$ *para* $-2 < \alpha \leq -1$.

En relación con las métricas Lorentz-Riemann de tipo α sobre Σ, para $\alpha > 0$, mantenemos la notación $D^0 = \Sigma$ y se denomina hiperplano singular. Si $\alpha < 0$, entonces $\Sigma = D^\infty$, y se denomina hiperplano polar. En este sentido:

Problema 14 *Se propone considerar métricas LR tipo (α, β)- con $\alpha < 0 < \beta$ como una generalización de los TLR-espacios dada en la intoducción inicial 1 (que pasarían a llamarse ahora espacios LR tipo $(-1, 1)$). Reconsidérese en el caso de M compacto D^∞, y $.D^0$ son conexos y no vacios, el ejercicio 1. En la componente Lorentz D^- reconsiderense los problemas 7 y 8 del epígrafe 2.5.*

Problema 15 *Continuando con el problema anterior y supuesto $\alpha \leq -2$, demostrar que $I^+(\gamma) = D^-$ para toda curva temporal inextendible hacia el pasado. Esto responde a la idea de de D^∞ como big-bang. En efecto esto indica que cualquier suceso ($p \in D^-$) está causalmente conectado a un pasado suficientemente remoto de cualquier partícula (γ).*

Pero esto no sucede si $0 > \alpha > -2$

Por último, desearía tambien reconsiderar la geometría *polar o singular conforme* en este contexto, generalizando para el tipo α, con $\alpha < 0$ el Teorema 2.4.1, la observación 2.4.1, y los problemas 4 y 5.

Referencias

[1] J. Lafuente. *Transverse Riemann-Lorentz metrics with polar end.* Preprint.

[2] J. Lafuente *Notas manuscritas*

[3] E. Aguirre, V. Fernández, J. Lafuente.*On the Conformal Geometry of Transverse Riemann-Lorentz Manifolds.* Journal of Geom and Phys 1541-1547

[4] M. Kossowski and M. Kriele. *Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics.* Proc. R. Soc. Lond. A 444, 297-306,1994.

[5] M. Kossowski and M. Kriele. *The Einstein equation for signature type-changing spacetimes.* Proc. R. Soc. Lond. A 446, 115-126, 1994.

[6] M. Kossowski and M. Kriele. *The volume blow-up and characteristic classes for transverse, type changing, pseudo-riemannian metrics.* Geom. Dedicata 64, 1-16. 1997.