Índice General

1 Introducción

Dada una variedad diferenciable conexa M, con $\dim M = m \geqslant 2$, suponemos que un campo de tensores (diferenciable) g en M covariante de orden 2 y simétrico es no degenerado salvo en un conjunto no vacío Σ. Sea $p \in \Sigma$ y $(\mathbb{U}, (x^1, ..., x^m))$ un sistema de coordenadas en torno a p. Entonces $\mathbb{U} \cap \Sigma$ tiene por ecuación $\det(g_{ab}) = 0$, donde $g_{ab} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right)$. Diremos que g es una *métrica trasversa* en p si

$$d_p\left(\det\left(g_{ab}\right)\right) \neq 0$$

(es fácil ver que esta condición no depende del sistema de coordenadas). Diremos simplemente que g es *trasversa* (y que (M, g) es un *espacio singular trasverso*) si lo es en todos los puntos de Σ. En estas condiciones, Σ es una hipersuperficie de M. Además, en cada punto de Σ, existe un subespacio unidimensional de T_pM que es *g-ortogonal a todo el espacio tangente* T_pM y que llamamos *radical.* El complemento $\mathbb{M} = M - \Sigma$ es una variedad semi-riemanniana (por ser un abierto que no contiene a Σ) cuya frontera es Σ, y en la que el *índice* de g (es decir, el máximo de las dimensiones de los subespacios en los que g es definida negativa) es constante en cada componente conexa. Además, el índice cambia en una unidad al atravesar la hipersuperficie Σ, por lo que Σ se conoce por *hipersuperficie de cambio de signatura.*

La motivación principal para el estudio de las métricas trasversas proviene de la Física, y en particular de la Relatividad General. En 1983, en un trabajo conjunto de S. W. Hawking y J. B. Hartle ([Ha-Haw]), y en dos trabajos sucesivos de 1990, [Gi-Ha] y [Hal-Ha], se propone un modelo de espacio-tiempo que es parte lorentziano y, en el "pasado", parte riemanniano, separados por una hipersuperficie Σ donde necesariamente la métrica degenera. Se piensa que para entender la Teoría de la Gravedad Cuántica es necesario primero comprender bien la teoría clásica asociada, es decir, la teoría de los espacio-tiempos clásicos con cambio de índice. Esta propuesta se conoce como *propuesta de no-borde*, y está motivada por la idea de que es posible obtener condiciones iniciales para la parte lorentziana, por medio de la integración de caminos sobre todas las variedades riemannianas compactas cuyo borde coincide con la hipersuperficie Σ. En esta dirección pueden encontrarse diversas referencias: [El], [De-Tu], [Hay], [Kos93a], [Kos93b] o [Kos93c].

Otras motivaciones provienen del estudio de la Geometría de subvariedades semi-riemannianas ([Kos91a], [Kos91b], [Kup87a], [Kup87b] y [Kup87c]) y de las Ecuaciones diferenciales singulares ([Kos91c], [Kos93c]).

La primera parte del trabajo, capítulos 2 y 3, consiste en una discusión de los resultados conocidos de M. Kossowski [Kos87], [Kos94] y [Kos97], y de E. Aguirre y J. Lafuente [Ag-La], en los que se estudia la extendibilidad a Σ de los objetos clásicos de la Geometría semi-riemanniana, que están bien definidos en

$\mathbb{M}$, como son las geodésicas, el trasporte paralelo o los tensores de curvatura. En particular, nos planteamos los siguientes problemas:

a) Acerca de la extendibilidad del trasporte paralelo, nos preguntamos en qué condiciones podemos trasportar vectores a lo largo de curvas trasversas a la hipersuperficie de cambio de signatura Σ.

b) Respecto a las geodésicas, el objetivo es obtener condiciones que caractericen la existencia de geodésicas trasversas a Σ con velocidad inicial dada.

c) En cuanto a los tensores, entendemos que un tensor A en $\mathbb{M}$ de tipo (r, s) *se extiende a* Σ si existe otro tensor $\mathcal{A}$ en M del mismo tipo tal que $\mathcal{A}|_{\mathbb{M}} = A$. esto es equivalente a que, dadas las formas ω^1,...,ω^r y los campos X_1,....,X_s en M, la función $A(\omega^1, ..., \omega^r, X_1, ..., X_r)$ se extiende a Σ. Nuestro interés se centra en los tensores clásicos de la Geometría semi-riemanniana, como son la curvatura covariante, el tensor de Ricci o la curvatura escalar.

Todos estos temas vienen controlados por la anulación de ciertos tensores, denominados II y III, introducidos por M. Kosowski en [Kos85] y por E. Aguirre y J. Lafuente en [Ag-La].

En la segunda parte, capítulos 4 y 5, es donde se encuentra la aportación original de este trabajo, relacionada con la Geometría conforme de un espacio singular trasverso:

Dado (M, g) un espacio singular trasverso, consideramos $\overline{g} := e^{2f}g$, con $f \in C^\infty(M)$. Es inmediato comprobar que $(M, \overline{g})$ también es un espacio singular trasverso con la misma hipersuperficie de cambio y con idéntico radical. Se determina por tanto una estructura conforme en M

$$\mathcal{C} = \left\{e^{2f}g : f \in C^\infty(M)\right\}$$

que es semi-riemanniana salvo en una hipersuperficie Σ en la que degenera, y en la que varía el índice de g al ser atravesada. Al par $(M, \mathcal{C})$ le llamaremos *espacio conforme singular trasverso*, y al complemento $\mathbb{M} = M - \Sigma$ *parte conforme semi-riemanniana*, puesto que $(\mathbb{M}, \mathcal{C}_{\mathbb{M}})$ es un espacio conforme semi-riemanniano. En éste, estudiamos la extendibilidad a Σ del paralelismo de Fermi-Walker ([Fe]) y del tensor de curvatura (covariante) de Weyl ([We]).

Una estructura conforme semi-riemanniana define, de manera canónica, un paralelismo a lo largo de curvas regulares nunca luz. En efecto, si γ es una de estas curvas, podemos encontrar, en torno a cada punto de γ, una métrica de la estructura conforme que tiene a γ por geodésica (en ese entorno). Además, si dos métricas de la estructura tienen a γ por geodésica, las derivadas covariantes a lo largo de γ asociadas a cada métrica coinciden. Por tanto, podemos definir una conexión a lo largo de γ, caracterizada por ser localmente la derivada covariante a lo largo de γ asociada a alguna métrica de la estructura, que tiene a γ por geodésica. Esta conexión induce un trasporte paralelo a lo largo de γ, que coincide (ver [Sa]) con el llamado *paralelismo de Fermi-Walker*, y que tiene al campo velocidad de γ por campo paralelo. En la parte conforme semi-riemanniana de un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, este paralelismo está perfectamente definido. Dada una curva regular γ trasversa a Σ por $\gamma(0)$, nunca luz ni radical, nos preguntamos bajo qué condiciones existe el trasporte Fermi-Walker de un vector $v \in T_{\gamma(0)}M$ a lo largo de γ. La respuesta viene controlada por una forma lineal en $\gamma(0) \in \Sigma$, que depende de $\gamma'(0)$ pero que es independiente de la métrica usada para definirla (es decir, es un invariante conforme). Resulta que el núcleo de esta forma invariante es exactamente el hiperplano de los vectores que tienen trasporte de Fermi-Walker a lo largo de γ.

El tensor de curvatura conforme de Weyl ([We]) asociado a un espacio semi-riemanniano (de dimensión mayor o igual que 4) es un invariante conforme, cuya anulación caracteriza a los espacios conformemente planos. Dado un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, este tensor está bien definido en la parte conforme semi-riemanniana. El problema que nos planteamos es el de caracterizar la extendibilidad de la curvatura covariante de Weyl, cuya anulación (que no el tensor covariante) es una condición conforme (es decir, independiente de la métrica que tomemos) que caracteriza los espacios conformemente planos. El resultado principal afirma que esta extendibilidad es equivalente a que el radical sea trasverso y el espacio *conformemente III-plano*.

A continuación hacemos una exposición más pormenorizada de los contenidos de este trabajo.

En el **capítulo 2** presentamos los *espacios singulares* ([Lar]). Diremos que la variedad diferenciable M, equipada con un tensor g covariante de orden 2 y simétrico, es un *espacio singular* si g es no degenerado salvo en un conjunto no vacío Σ. En este caso no existe una conexión de *Levi-Civita* ∇ asociada a (M, g). Sin embargo, sí que existe una *conexión dual* $\Box$ en M, única verificando que es simétrica y compatible con g ([Kos85]). Esta conexión constituye la herramienta fundamental para el estudio de la Geometría de un espacio singular. Nos permite definir una *derivada covariante dual a lo largo de curvas regulares* (2.3), así como los campos *paralelos* y las *geodésicas* (2.4). En el caso semi-riemanniano, la relación entre ∇ y $\Box$ es, naturalmente, *g-dual*: para cualquiera tres campos X, Y, Z de la variedad semi-riemanniana M, se verifica:

$$\Box_X Y(Z) = g(\nabla_X Y, Z)$$

por lo que las nociones de campo paralelo y de geodésica coinciden. La conexión dual determina además, en cada punto singular y para cada vector radical ξ, una aplicación bilineal y simétrica II_p^ξ (2.5), muy útil en el estudio de los espacios singulares.

En el **capítulo 3** consideramos los espacios singulares trasversos. El hecho de que el conjunto Σ sea una hipersuperficie nos permite definir, para un campo R radical, una aplicación II^R en Σ (coleccionando las aplicaciones $II_p^{R_p}$) caracterizada por la fórmula

$$II^R(X,Y) = \Box_X Y(R)|_\Sigma$$

Esta aplicación resulta clave a la hora de obtener condiciones de extendibilidad. Así resulta que (3.3) la derivada covariante de dos campos X e Y de M se extiende a Σ si y sólo si $II^R(X,Y) = 0$.

Las secciones 3.4 y 3.5 se dedican a estudiar la extendibilidad del trasporte paralelo y de las geodésicas, cuestión resuelta por M. Kossowski en [Kos87] y [Kos94]. Los dos resultados principales son los siguientes. Primero, dada una curva regular γ trasversa a Σ por $\gamma(0) = p$, un vector $v \in T_pM$ se traslada paralelamente a lo largo de γ si y sólo si $II_p^\xi(\gamma'(0), v) = 0$ (con $\xi \in T_pM$ en el radical). Y segundo, dado un vector $v \in T_pM - T_p\Sigma$, con $p \in \Sigma$, existe una única geodésica (maximal) trasversa a Σ por p con velocidad inicial v si y sólo si $II_p^\xi(v,v) = 0$.

En las secciones 3.6 y 3.7 estudiamos la extendibilidad de los tensores de curvatura covariante, de Ricci y escalar, presentando los resultados de M. Kossowski [Kos97] en el caso del radical trasverso a Σ, y de E. Aguirre y J. Lafuente [Ag-La] en el caso del radical tangente. La extendibilidad de los tensores citados arriba está también relacionada con la aplicación II^R, de la siguiente manera. Diremos que una métrica trasversa es *II-plana* si la restricción II_Σ^R de II^R a Σ se anula. Resulta [Kos97] que la curvatura covariante se extiende a Σ si y sólo si el radical es trasverso y la métrica es II-plana. En este caso, la aplicación II^R determina un tensor III^R en Σ, covariante de orden 2 y simétrico, definido por $III^R(X,Y) := II^R(\nabla_X Y, R)$, para X e Y campos de Σ (obsérvese que si g es II-plana, $\nabla_X Y$ se extiende a Σ siempre que X e Y sean tangentes a Σ). Cuando el radical es trasverso a Σ, decimos que una métrica II-plana es *III-plana* si el tensor III^R se anula. Sin embargo, si el radical es tangente a Σ es imposible que III^R se anule, por lo que la noción de métrica III-plana debe modificarse.

Cuando el radical es tangente a Σ (y g no necesariamente II-plana) podemos definir de manera canónica dos campos sobre Σ, uno normal y otro radical. La construcción de estos campos es la siguiente ([Ag-La]). Primero observamos que el plano ortogonal a Σ en cada punto $p \in \Sigma$, equipado con la restricción de II_p^ξ, para cualquier $\xi \in T_pM$ radical, es *un plano lorentziano*. Una de las direcciones II_p^ξ-isótropas está determinada por el radical. La otra determina (salvo signo) un vector N_p normal a Σ y g-unitario. Variando el punto $p \in \Sigma$ obtenemos (salvo signo) un campo N, normal a Σ y g-unitario. A partir de éste se define una *segunda forma fundamental* $\mathcal{H}$ en Σ, usando la conexión dual como sigue

$$\mathcal{H}(X,Y) = \Box_X Y(N)|_\Sigma$$

Esta segunda forma fundamental define a su vez (salvo signo) un campo radical R en Σ, eligiendo el signo de N para que $\mathcal{H}(R,R) = -1$. A los campos N y R les llamamos *normal* y *radical principal.* La segunda forma fundamental $\mathcal{H}$ define además una *pantalla canónica* S (una *pantalla* es una distribución en Σ trasversa al radical y de dimensión máxima), mediante la condición

$$V \in S \Leftrightarrow \mathcal{H}(V,R) = 0$$

Cuando g es II-plana, las aplicaciones III^R y $\mathcal{H}$ coinciden. Así, decimos que (en el caso del radical tangente) una métrica II-plana es *III-plana* si la restricción de $\mathcal{H}$ a la pantalla canónica S se anula.

La aplicación III^R se relaciona con la extendibilidad del tensor de Ricci, puesto que [Kos97] éste se extiende a Σ si y sólo si el radical es trasverso y g es III-plana. En este caso, la curvatura escalar también se extiende. A la vista de este resultado y del anterior, relacionado con la curvatura covariante, el caso del radical tangente requiere una discusión de la extendibilidad de los tensores en función de las direcciones en las que se evalúan. Este problema está resuelto en [Ag-La] de la siguiente manera. Resulta que la curvatura covariante, evaluada sobre cuatro campos X, Y, Z, T en M, se extiende a Σ si y sólo si

$$\nu \wedge \rho(X,Y) \cdot \nu \wedge \rho(Z,T) = 0$$

donde

$$\nu \wedge \rho(X,Y) = \det \begin{pmatrix} \nu(X) & \rho(X) \\ \nu(Y) & \rho(Y) \end{pmatrix}$$

y $\nu(X)$, $\rho(X)$ son las componentes normal y radical (principales) de $X|_\Sigma$. Respecto al tensor de Ricci, podemos destacar [Ag-La] que , dados dos campos V, W en M, tangentes a la pantalla canónica S, el tensor de Ricci evaluado sobre V, W se extiende a Σ si y sólo si $\mathcal{H}(V,W) = 0$. En cuanto a la curvatura escalar, podemos decir que no se extiende a Σ.

En el **capítulo 4** abordamos el estudio de la Geometría conforme de un espacio singular trasverso. Como ya hemos comentado más arriba, un espacio conforme singular trasverso contiene un subespacio conforme semi-riemanniano (abierto y denso) cuya frontera es la hipersuperficie Σ de cambio de signatura. En este subespacio están definidos los objetos clásicos de los espacios conformes semi-riemannianos. El problema que se plantea es el de caracterizar la extendibilidad a Σ de estos objetos. En este trabajo consideramos el paralelismo de Fermi-Walker y el tensor de curvatura de Weyl.

En la sección 4.3 tratamos el tema del paralelismo de Fermi-Walker. La existencia de este paralelismo ([Sa]) está basada en la posibilidad de adaptar localmente la métrica de la estructura conforme a las curvas regulares cuya tangente nunca es luz. Más concretamente, en torno a cada punto de una tal curva regular en un espacio semi-riemanniano, es posible encontrar una métrica de la estructura que tenga a la curva por geodésica. Resulta que en un espacio conforme singular trasverso es posible también adaptar localmente la métrica de la estructura conforme a lo largo de curvas regulares cuya tangente nunca es luz. La cuestión que se plantea es la siguiente. Dada una tal curva regular γ trasversa a Σ por $\gamma(0)$, y un vector $v \in T_{\gamma(0)}M$ ¿bajo qué condiciones existe un campo V, Fermi-Walker paralelo a lo largo de γ, que extienda a v? La condición que determina esta existencia viene dada por la anulación de la forma lineal

$$F_w^\xi(x) := \frac{1}{g(w,w)^2} \det \begin{pmatrix} II_p^\xi(w,w) & g(w,w) \\ II_p^\xi(w,x) & g(w,x) \end{pmatrix}$$

donde $w = \gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}M$ y $\xi \in T_{\gamma(0)}M$ radical. Nótese que la forma F_w^ξ es un invariante conforme, puesto que no depende de la métrica g.

En la sección 4.4 estudiamos las nociones de *estructura conformemente II-plana y III-plana*, ya que están muy relacionadas con la extendibilidad del tensor de curvatura de Weyl. Decimos que un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$ es *conformemente II-plano* si la restricción II_Σ^R, para algún campo R radical, verifica

$$II_\Sigma^R = h g_\Sigma$$

para alguna $h \in C^\infty(\Sigma)$ (no es complicado ver que esta condición es conforme, es decir, es independiente de g). Resulta que un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$ es conformemente II-plano si y sólo si, en torno a cada punto $p \in \Sigma$, existe una métrica en $\mathcal{C}$ que es II-plana. De manera similar, un espacio *conformemente III-plano* es esencialmente un espacio en el que, en torno a cada punto $p \in \Sigma$, existe una métrica en $\mathcal{C}$ que es III-plana.

En el **capítulo 5** tratamos el tema de la extendibilidad del tensor de curvatura de Weyl. En la sección 5.1 repasamos brevemente los conceptos básicos ([He]) relacionados con el tema. En la última sección 5.2 demostramos el Teorema que citábamos arriba: el tensor de curvatura de Weyl se extiende a Σ si y sólo si el radical es trasverso y el espacio es conformemente III-plano.

2 Espacios singulares

En todo el trabajo entenderemos que, salvo mención expresa, cualquier objeto geométrico es *diferenciable* si es de clase C^∞. Seguiremos además el siguiente convenio para los índices, a no ser que se diga otra cosa: las letras $a, b, c...$ recorrerán el conjunto $\{1, ..., m\}$, mientras que las letras $i, j, k...$ recorrerán $\{1, ..., m-1\}$ y las letras $\lambda, \mu, \eta, ...$ recorrerán $\{2, ..., m-1\}$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(N)$ al $C^\infty(N)$-módulo de campos (diferenciables) de una variedad diferenciable N, y por $\mathfrak{X}(\gamma)$ al $C^\infty(I)$-módulo de campos (diferenciables) a lo largo de una curva regular $\gamma : I \to N$. $\mathcal{T}_s^r(N)$ denotará al espacio de tensores (r, s) de N, y $S^2(N)$ el espacio de tensores $(0, 2)$ simétricos.

2.1 Métricas degeneradas

Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión $m \geqslant 2$, dotada de un tensor $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in S^2(M)$. Para cada punto $p \in M$, $g_p = \langle , \rangle_p$ es la forma bilineal simétrica inducida en el espacio tangente T_pM. Se define el conjunto de los *puntos singulares* de M como

$$\Sigma = \{p \in M : g_p \text{ es degenerada}\}$$

Decimos que g es una *métrica degenerada* (y que (M, g) es un *espacio singular*) si $\Sigma \neq \emptyset$. Los puntos p del conjunto $\mathbb{M} = M - \Sigma$, donde la métrica no degenera, se denominan *regulares*, y determinan un conjunto abierto de M. Entonces, siempre que no sea vacío, $\mathbb{M}$ es una subvariedad abierta de M.

El índice $Ind(p)$ de un punto $p \in M$, es por definición el índice de g_p, entendido como el máximo de las dimensiones de los subespacios de T_pM en donde g_p es definida negativa. Este índice es constante en cada componente conexa de $\mathbb{M}$, así que cada una de éstas es una variedad semi-riemanniana.

En cada punto singular $p \in \Sigma$ existe un subespacio vectorial de T_pM no nulo que es *ortogonal a todo* T_pM, y que llamamos *radical de M en p*:

$$Rad_p(M) = \{x \in T_pM : \langle x, y \rangle_p = 0 \text{ para todo } y \in T_pM\}$$

Llamaremos al conjunto

$$Rad(M) = \bigcup_{p \in \Sigma} Rad_p(M)$$

radical de M.

El subconjunto de puntos singulares Σ está descrito localmente por el conjunto de ceros de una función diferenciable. En efecto, si $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ es una carta de M en torno a un punto singular, entonces

$$\Sigma \cap \mathbb{U} = \{p \in \mathbb{U} : G_\varphi(p) = 0\}$$

donde $G_\varphi = \det(g^\varphi_{ab}) : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, con $g^\varphi_{ab} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right)$. Este conjunto cerrado no tiene, a priori, una estructura natural de subvariedad diferenciable. Este trabajo se centrará en espacios singulares en los que Σ sea una hipersuperficie de M.

2.2 La conexión dual

Cuando el espacio (M,g) es semi-riemanniano (es decir $\Sigma=\emptyset$), existe ([O'Ne]) una única conexión

$$\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),(X,Y)\to\nabla_XY$$

simétrica y compatible con g, es decir:

$$\begin{array}{l}1)\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]\\ 2)\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle=X\langle Y,Z\rangle\end{array}$$

para $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, llamada *conexión de Levi-Civita* de M.

Sin embargo, si (M,g) es un espacio singular no existe una conexión de Levi-Civita, aunque sí que existe en la parte semi-riemanniana $(\mathbb{M},g_{\mathbb{M}})$.

Como puede consultarse en [Kos85] (Lema 2), disponemos no obstante de la llamada *conexión dual*.

Definición 2.2.1 *Una conexión dual* $\Box$ *en una variedad diferenciable* M *es una aplicación*

$$\Box:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}^*(M)$$

tal que

$$\begin{array}{l}D1)\ \Box_XY\ \text{es } C^\infty(M)\text{-lineal en } X\\ D2)\ \Box_XY\ \text{es } \mathbb{R}\text{-lineal en } Y\\ D3)\ \Box_X(fY)=Xf\langle Y,\cdot\rangle+f\Box_XY\ \text{ para } f\in C^\infty(M)\end{array}$$

La condición $D1)$ nos dice en particular que dado un vector $v\in T_pM$ cualquiera, para cada $Y\in\mathfrak{X}(M)$ tenemos bien definido un vector

$$\Box_vY=(\Box_VY)_p\in T_pM$$

donde $V\in\mathfrak{X}(M)$ es un campo con $V_p=v$.

Teorema 2.2.1 *Dado* (M,g) *un espacio singular, existe una única conexión dual* $\Box$ *simétrica y compatible con* g*, es decir*

$$\begin{array}{l}D4)\ \Box_XY(Z)-\Box_YX(Z)=\langle[X,Y],Z\rangle\\ D5)\ \Box_XY(Z)+\Box_XZ(Y)=X\langle Y,Z\rangle\end{array}$$

para cualquiera $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$.

Para probarlo basta observar que $\Box$ está caracterizada por la *fórmula de Koszul:*

$$\begin{aligned}2\Box_XY(Z)=&X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle\\&+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

Esta conexión dual $\Box$ verifica además una condición de *compatibilidad con la conexión de Levi-Civita* ∇. En la parte semi-riemanniana $\mathbb{M}$ se tiene

$$\Box_XY(Z)=\langle\nabla_XY,Z\rangle$$

Definición 2.2.2 *Sea* $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ *un sistema de coordenadas del espacio singular* (M, g)*. Los símbolos de Christoffel de primera especie asociados a estas coordenadas son las funciones reales en* $\mathbb{U}$

$$\Gamma_{cab} = \Box_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \left(\frac{\partial}{\partial x^c} \right)$$

Como $\left[\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right] = 0$, se sigue de $D4$) que

$$\Gamma_{cab} = \Gamma_{cba}$$

En términos de las coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$, $\Box$ puede ser descrita en función de los símbolos de Christoffel por

$$\Box_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} = \sum_{c=1}^{m} \Gamma_{cab} dx^c$$

Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo cualquiera, usando $D3$), tenemos

$$\Box_{\frac{\partial}{\partial x^a}} Y = \sum_{b,c=1}^{m} \left\{ \frac{\partial Y^b}{\partial x^a} g_{bc} + \Gamma_{cab} Y^b \right\} dx^c$$

Usando $D1$) y esta fórmula podemos calcular $\Box_X Y$ en cualquier sistema de coordenadas.

Como ocurre en el caso semi-riemanniano (ver por ejemplo [O'Ne] Prop. 3.13), la métrica g determina los símbolos de Christoffel, según la fórmula

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right\}$$

2.3 Derivada covariante dual a lo largo de curvas

Para cualquier curva regular $\gamma : I \to M$, asumiremos sin mención expresa que γ es C^∞.

Análogamente a la conexión de Levi-Civita en el caso semi-riemanniano ([O'Ne], Prop. 3.18), la conexión dual $\Box$ induce una *derivada covariante dual* $\frac{\Box}{dt}$ *a lo largo de* γ, como muestra la siguiente

Proposición 2.3.1 *Dada una curva regular* $\gamma : I \to M$ *en un espacio singular* (M, g) *existe una única función* $\mathbb{R}$*-lineal* $\frac{\Box}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(\gamma)$ *tal que*

$$\begin{array}{lll} 1) & \frac{\Box fV}{dt} = \frac{df}{dt} \langle V, \cdot \rangle + f \frac{\Box V}{dt} & f \in C^\infty(I),\ V \in \mathfrak{X}(\gamma) \\ 2) & \left. \frac{\Box (X \circ \gamma)}{dt} \right|_t = \Box_{\gamma'(t)} X & t \in I,\ X \in \mathfrak{X}(M) \end{array}$$

Además

$$3) \ \frac{d}{dt} \langle U, V \rangle = \frac{\Box U}{dt}(V) + \frac{\Box V}{dt}(U) \quad U, V \in \mathfrak{X}(\gamma)$$

La demostración es análoga a la de la derivada covariante a lo largo de curvas $\frac{\nabla}{dt}$ en el caso semi-riemanniano ([O'Ne], Prop.3.18). Se observa que en la parte semi-riemanniana $(\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}})$ se verifica

$$\frac{\Box V}{dt}(U) = \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, U \right\rangle$$

para todo $U, V \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Si $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ es un sistema de coordenadas que contiene a γ, y $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ sabemos que

$$V(t) = \sum_{b=1}^{m} V^b(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^b}\right|_{\gamma(t)}$$

donde $V^b = Vx^b$. Aplicando sucesivamente 1) y 2)

$$\left.\frac{\Box V}{dt}\right|_t = \sum_{b=1}^{m} \left\{ \frac{dV^b}{dt}(t) \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^b}\right|_{\gamma(t)}, \cdot \right\rangle + V^b(t) \Box_{\gamma'(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\}$$

Introduciendo los símbolos de Christoffel en esta fórmula (denotaremos igual $g_{bc} = g_{bc} \circ \gamma$, $\Gamma_{cab} = \Gamma_{cab} \circ \gamma$, $\gamma^a = x^a \circ \gamma$) tenemos

$$\frac{\Box V}{dt} = \sum_{b,c=1}^{m} \left\{ \frac{dV^b}{dt} g_{bc} + \sum_{a=1}^{m} V^b \frac{d\gamma^a}{dt} \Gamma_{cab} \right\} dx^c \tag{2}$$

2.4 Campos $\Box$-paralelos y $\Box$-geodésicas

Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular. Decimos que el campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es *$\Box$-paralelo a lo largo de γ* si $\frac{\Box V}{dt} = 0$. La fórmula anterior muestra que el sistema de ecuaciones diferenciales de los campos $\Box$-paralelos es

$$\sum_{b=1}^{m} \left\{ \frac{dV^b}{dt} g_{bc} + \sum_{a=1}^{m} V^b \frac{d\gamma^a}{dt} \Gamma_{cab} \right\} = 0 \tag{3}$$

Definición 2.4.1 *Decimos que $\gamma : I \to M$ es $\Box$-geodésica si $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un campo $\Box$-paralelo a lo largo de γ.*

Obviamente el sistema de ecuaciones diferenciales de las $\Box$-geodésicas es

$$\sum_{b=1}^{m} \left\{ \frac{d^2\gamma^b}{dt^2} g_{bc} + \sum_{a=1}^{m} \frac{d\gamma^a}{dt} \frac{d\gamma^b}{dt} \Gamma_{cab} \right\} = 0 \tag{4}$$

Como se puede observar, se exige que la curva γ sea diferenciable al menos dos veces.

Definición 2.4.2 *Diremos que una línea es una subvariedad unidimensional C de M. Una línea C es una línea $\square$-geodésica si para cada $p \in S$ existe $\gamma : I \to C$ parametrización regular en torno a p tal que γ es* $\square$-geodésica.

Observación 2.4.1 *En contraste con el caso semi-riemanniano (ver [O'Ne] Prop. 3.19 y Prop. 3.24), en un espacio singular arbitrario no podemos asegurar la existencia de campos $\square$-paralelos a lo largo de curvas ni de $\square$-geodésicas. Una discusión sobre este tema aparece más adelante en 3.4 y 3.5.*

Naturalmente en la parte semi-riemanniana las definiciones del trasporte paralelo y de las geodésicas con $\square$ y con ∇ son equivalentes.

2.5 La aplicación II

Dado el espacio singular (M, g) definimos una aplicación en cada punto singular $p \in \Sigma$

$$\left.\begin{array}{l} II_p : T_pM \times T_pM \times Rad_p(M) \to \mathbb{R} \\ (x, y, \xi) \mapsto \square_x Y(\xi) \end{array}\right\}$$

donde $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es tal que $Y_p = y \in T_pM$ ([Kos85], Prop. 3).

Proposición 2.5.1 *La aplicación II_p está bién definida, es $\mathbb{R}$-trilineal y simétrica en las dos primeras entradas.*

Demostración:

II_p está bien definida pues si $x, y \in T_pM$, $\xi \in Rad_p(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo tal que $Y_p = y$, tomando además una carta $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ y usando $D3)$ tenemos

$$\begin{aligned} \square_x Y(\xi) &= \sum_{b=1}^{m} \left\{ x\left(Y^b\right) \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^b}\right|_p, \xi \right\rangle + Y^b(p)\, \square_x \left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)(\xi) \right\} \\ &= \sum_{b=1}^{m} y^b \square_x \left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)(\xi) \end{aligned}$$

que sólo depende de x, y, ξ.

Obviamente II_p es $\mathbb{R}$-trilineal, puesto que la aplicación $(X, Y, Z) \to \square_X Y(Z)$ lo es. Si ahora tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ con $X_p = x$ entonces de $D4)$ y por ser $\xi \in Rad_p(M)$

$$\begin{aligned} 0 &= \square_x Y(\xi) - \square_y X(\xi) - \left\langle [X, Y]_p, \xi \right\rangle \\ &= \square_x Y(\xi) - \square_y X(\xi) \end{aligned}$$

luego II_p es simétrica en las dos primeras entradas. ♣

Introduciendo en la fórmula anterior los símbolos de Christoffel asociados a $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ obtenemos una expresión local de esta aplicación

$$II_p\left(x, y, \xi\right) = \sum_{a,b,c=1}^{m} x^a y^b \xi^c \Gamma_{cab}\left(p\right)$$

Obsérvese que, en cada $p \in \Sigma$, fijado $\xi \in Rad_p\left(M\right)$ queda determinada una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal y simétrica

$$\left.\begin{array}{c} II_p^{\xi} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto II_p\left(x, y, \xi\right) \end{array}\right\}$$

3 Espacios singulares trasversos

3.1 Métricas trasversas. Radical trasverso y tangente

Sea (M, g) un espacio singular y $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ una carta de M en torno a un punto singular. Sabemos que

$$\Sigma \cap \mathbb{U} = \{p \in \mathbb{U} : G_\varphi(p) = 0\}$$

Diremos que *g es trasversa en el punto singular $p \in \Sigma$* si $d_p G_\varphi \neq 0$. Vamos a ver que esta condición no depende de la carta φ elegida en torno al punto p. En efecto, si $(\mathbb{U}, E = (E_1, ..., E_m))$ es otra referencia local en torno a p entonces

$$(g(E_a, E_b)) = A^T (g^\varphi_{ab}) A$$

donde $A : \mathbb{U} \to M_{m\times m}(\mathbb{R})$, $A(p) \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ es la matriz de cambio de base de $(E_1(p), ..., E_m(p))$ a $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right)$ en T_pM. Por tanto

$$G_E = \det(g(E_a, E_b)) = (\det A)^2 \det(g^\varphi_{ab}) = (\det A)^2 G_\varphi$$

Usando que $G_\varphi(p) = 0$, $d_p G_\varphi \neq 0$ y que $\det A \neq 0$, tenemos

$$d_p G_E = (\det A)^2 d_p G_\varphi \neq 0$$

Definición 3.1.1 *Decimos que (M, g) es un espacio singular trasverso (con cambio trasversal de signatura a través de Σ) si g es trasversa en todos los puntos singulares de M.*

En este caso, Σ resulta ser una hipersuperficie de M, determinada localmente por $G_\varphi = 0$ (en cualquier sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi)$). En efecto, como $d_p G_\varphi \neq 0$ para cualquier $p \in \mathbb{U} \cap \Sigma$, el teorema de la función implícita nos conduce a nuestra afirmación. Llamamos a Σ *hipersuperficie de cambio de signatura*, debido al siguiente

Lema 3.1.1 *Si (M, g) es un espacio singular trasverso, entonces para cada punto $p \in \Sigma$ se tiene que* $\dim Rad_p(M) = 1$. *Además Σ es la frontera topológica de dos componentes disjuntas $\mathbb{M}^-$ y $\mathbb{M}^+$, con $\mathbb{M} = \mathbb{M}^- \cup \mathbb{M}^+$, en las que el índice de g es constante y verifican:*

$$Ind_{\mathbb{M}^-}(g) - Ind_{\mathbb{M}^+}(g) = 1$$

Demostración:
Sea $(e_1, ..., e_n)$ una base de T_pM tal que

$$\langle e_a, e_b \rangle = \delta_{ab} \langle e_a, e_a \rangle$$

donde δ_{ab} es la *delta de Kronecker*. Tomemos en torno a $p \in \Sigma$, una carta $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ tal que $\frac{\partial}{\partial x^a}\big|_p = e_a$. Entonces la representación matricial de g en p es diagonal con $\nu = \dim Rad_p(M)$ ceros. Un sencillo cálculo muestra

$$d_p G_\varphi = \sum_{a=1}^{m} g_{11}(p) \ldots d_p g_{aa} \ldots g_{mm}(p) \tag{5}$$

Si $\nu \geqslant 2$ entonces la fórmula anterior queda $d_p G_\varphi = 0$, es decir g no sería trasversa en p, luego debe ser $\nu = 1$, es decir debe haber exactamente un a tal que $g_{aa}(p) = 0$. Esto prueba la primera parte. Para ver la segunda parte, reordenamos las coordenadas para que $g_{mm}(p) = 0$. Entonces la fórmula (5) queda

$$d_p G_\varphi = \prod_{i=1}^{m-1} g_{ii}(p)\, d_p g_{mm} \neq 0 \tag{6}$$

luego existe un vector $\xi \in T_p M$ (necesariamente en $T_p M - T_p \Sigma$, por ser G_φ una ecuación local de Σ), tal que $d_p g_{mm}(\xi) > 0$. Tomemos $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ una curva con $\gamma'(0) = \xi$. Existe entonces $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $g_{mm}(\gamma(t))$ cambia de signo en $(-\delta, \delta)$ al atravesar $t = 0$. Como $g_{ii}(p) \neq 0$, sólo g_{mm} cambia de signo, y por tanto el índice de g varía en una unidad al atravesar Σ. ♣

Se dice que el radical es *trasverso* en $p \in \Sigma$ si $Rad_p(M) \cap T_p\Sigma = \{0\}$, y se dice que es *tangente* si $Rad_p(M) \subset T_p\Sigma$. Claramente, si el radical es trasverso en un punto singular lo será en un entorno de éste, sin embargo no ocurre lo mismo con el radical tangente.

Antes de continuar debemos recordar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1 *Dada $\tau = 0$ una ecuación local*[1] *(en el entorno $\mathbb{U}$) de una hipersuperficie Σ en una variedad diferenciable M, una función $f \in C^\infty(\mathbb{U})$ se anula en $\Sigma \cap \mathbb{U}$ si y sólo si existe otra función $h \in C^\infty(\mathbb{U})$ tal que $f = \tau h$ (obviamente $h = \tau^{-1} f$).*

Demostración:

Es claro que si $f = \tau h$ entonces f se anula en $\Sigma \cap \mathbb{U}$. Para el recíproco tomamos $(\mathbb{U}, \varphi)$ un sistema de coordenadas adaptado a la hipersuperficie, es decir

$$\Sigma \cap \mathbb{U} = \{p \in \mathbb{U} : x^m(p) = 0\}$$

Necesitamos el siguiente

Lema 3.1.2 *Si $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $F \in C^p(\mathbb{R}^m)$ verifica $F(x_1, ..., x_{m-1}, 0) = 0$ para todo $(x_1, ..., x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, entonces existe $h \in C^{p-1}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$F(x_1, ..., x_m) = x_m h(x_1, ..., x_m)$$

[1] es decir, $d_p\tau \neq 0$ para todo $p \in \Sigma \cap \mathbb{U}$.

Demostración:

Como F se anula en $x_m = 0$, las $m-1$ primeras derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ se anulan también en $x_m = 0$. Por la regla de Barrow y la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} F(x_1,...,x_m) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(F(x_1,...,tx_m))\,dt \\ &= x_m \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_1,...,tx_m)\,dt \end{aligned}$$

Basta definir $h(x_1,...,x_m) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_1,...,tx_m)\,dt$. ♣

Sigamos con la demostración de la proposición. Aplicando el lema 3.1.2 a τ, existe $h_1 \in C^\infty(\mathbb{U})$ tal que $\tau = x^m h_1$. Como τ sólo se anula en $x^m = 0$ (es decir en $\Sigma \cap \mathbb{U}$) y

$$0 \neq d_p\tau = h_1(p)\, d_p x^m$$

en todo $p \in \Sigma$, h_1 no se anula nunca. Aplicando de nuevo el lema pero ahora a f, existe $h_2 \in C^\infty(\mathbb{U})$ tal que $f = x^m h_2$. Entonces $f = \tau h$, con $h = \frac{h_2}{h_1} \in C^\infty(\mathbb{U})$.♣

La aplicación II_p definida en 2.5 nos servirá para caracterizar los espacios singulares trasversos. Debemos observar primero que cada aplicación II_p define una *estructura conforme* en cada espacio tangente T_pM. En efecto, si $\xi, \zeta \in Rad_p(M) - \{0\}$ entonces, por ser $\dim Rad_p(M) = 1$, existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\zeta = \lambda\xi$, luego

$$II_p^\zeta = \lambda II_p^\xi$$

Escribiremos simplemente $II_p(x,y) = 0$, para $x, y \in T_pM$, si para algún (y por tanto para todo) $\xi \in Rad_p(M)$ se tiene que $II_p^\xi(x,y) = 0$.

La caracterización de los espacios singulares trasversos anunciada es la siguiente

Proposición 3.1.2 *Sea (M,g) un espacio singular. Si $p \in \Sigma$ con $\dim Rad_p(M) = 1$, entonces g es trasversa en p si y sólo si existe $x \in T_pM$ tal que $II_p^\xi(x,\xi) \neq 0$ para todo (o algún) $\xi \in Rad_p(M)$ no nulo. Además, en este caso $Rad_p(M)$ es trasverso si y sólo si $II_p^\xi(\xi,\xi) \neq 0$.*

Demostración

Tomemos $\xi \in Rad_p(M)$, una base $(e_1,...,e_m = \xi)$ de T_pM tal que $\langle e_a, e_b\rangle = \delta_{ab}\langle e_a, e_b\rangle$, y un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1,\ldots,x^m))$ en torno a p tal que $\left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_p = e_a$. Como $\dim Rad_p(M) = 1$, se verifica (reordenando si es necesario) la fórmula (6) (obsérvese en la fórmula (5) que todos los sumandos se anulan salvo el último, por ser $g_{mm}(p) = 0$)

$$d_p G_\varphi = \prod_{i=1}^{m-1} g_{ii}(p)\, d_p g_{mm}$$

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ cualquiera. Un pequeño cálculo muestra

$$\square_{\frac{\partial}{\partial x^m}} X \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \sum_{b=1}^{m} X^b \Gamma_{mbm} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{m} X^b \frac{\partial g_{mm}}{\partial x^b} = \frac{1}{2} dg_{mm}(X)$$

luego si $X_p = x$ tenemos

$$II_p^\xi(\xi, x) = \frac{1}{2} d_p g_{mm}(x) = \frac{1}{2 \prod_{i=1}^{m-1} g_{ii}(p)} d_p G_\varphi(x)$$

de lo que se sigue la primera parte. Para la segunda parte observemos que $T_p\Sigma = Ker(d_p G_\varphi)$, luego $II_p^\xi(\xi, \xi) \neq 0$ si y sólo si $\xi \notin Ker(d_p G_\varphi) = T_p\Sigma$, es decir $Rad_p(M) \cap T_p\Sigma = \{0\}$. ♣

Denotaremos por $\mathfrak{X}_\Sigma$ al $C^\infty(\Sigma)$-módulo de campos a lo largo de la hipersuperficie de cambio Σ. Diremos que un campo $R \in \mathfrak{X}_\Sigma$ es *radical* si $R_p \in Rad_p(M) - \{0\}$ para todo $p \in \Sigma$, y que un campo de M es radical si su restricción a Σ es radical.

Recordemos que de las propiedades de la conexión dual deducíamos que, dado un vector $v \in T_pM$ cualquiera, para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos bien definido un vector $\square_v Y \in T_pM$. Por tanto, dado un campo $A \in \mathfrak{X}_\Sigma$ tenemos bien definido $\square_A Y \in \mathfrak{X}_\Sigma^*$. Si $R \in \mathfrak{X}_\Sigma$ es un campo radical, podemos definir una aplicación $C^\infty(\Sigma)$-bilineal simétrica

$$II^R : \mathfrak{X}_\Sigma \times \mathfrak{X}_\Sigma \to C^\infty(\Sigma) : (A, B) \to \square_A B(R)$$

Esta aplicación está bien definida, debido a que $\square_A \mathcal{B}(R)$, para $\mathcal{B} \in \mathfrak{X}(M)$, sólo depende de $B = \mathcal{B}|_\Sigma$. En efecto, si $\mathcal{B}_1 \in \mathfrak{X}(M)$ es $\mathcal{B}_1|_\Sigma = \mathcal{B}|_\Sigma$ entonces $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}|_\Sigma = 0$. Llamemos $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}$, entonces

$$\square_A \mathcal{B}_1(R) = \square_A \mathcal{B}(R) + \square_A \mathcal{B}_2(R)$$

Como $\mathcal{B}_2$ se anula en la hipersuperficie Σ, localmente es $\tau\mathcal{B}_3$, con $\mathcal{B}_3 \in \mathfrak{X}(M)$ cualquiera y τ una ecuación local de Σ. Entonces

$$\square_A \mathcal{B}_2(R) = A(\tau)\langle \mathcal{B}_2, R \rangle + \tau \square_A \mathcal{B}_3(R) \tag{7}$$

y por tanto

$$\square_A \mathcal{B}_1(R)|_\Sigma = \square_A \mathcal{B}(R)|_\Sigma$$

Observemos que si $p \in \Sigma$ entonces

$$II^R(A,B)(p) = II_p^{R_p}(A_p, B_p) \tag{8}$$

y que si $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ son otros dos campos tales que coinciden con X, Y en Σ (respectivamente), entonces $II^R(X,Y) = II^R(Z,W)$.

Observación 3.1.1 *Si $f \in C^\infty(M)$ entonces $II^{fR}(X,Y) = fII^R(X,Y)$, por lo que escribiremos simplemente $II(X,Y) = 0$ si $II^R(X,Y) = 0$ para algún (y por tanto para todo) campo radical no nulo $R \in \mathfrak{X}(M)$.*

Por comodidad denotaremos también II^R a la aplicación

$$II^R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(\Sigma)$$

para $R \in \mathfrak{X}(M)$ radical. En términos de II^R podríamos haber enunciado la Proposición 3.1.2 diciendo: *g es trasversa en $\mathbb{U} \cap \Sigma$ si y sólo si existe $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ tal que $II^R(R,X)$ no se anula nunca, para algún $R \in \mathfrak{X}(M)$ radical.*

En un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi)$ la aplicación II^R se expresa

$$II^R(X,Y) = \sum_{a,b,c=1}^{m} X^a Y^b R^c \Gamma_{cab}$$

Debemos observar además que, si $\gamma : I \to M$ es una curva regular trasversa a la hipersuperficie de cambio por $p = \gamma(0) \in \Sigma$, y $\xi \in Rad_p(M)$, entonces para todo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se verifica

$$\left.\frac{\square V}{dt}\right|_{t=0}(\xi) = \square_{\gamma'(0)} V(\xi) = II_p^{\xi}(V(0), \gamma'(0)) \tag{9}$$

De la misma forma que con R, para cualquier campo $N \in \mathfrak{X}_\Sigma$ normal a la hipersuperficie de cambio, es decir $N_p \in (T_p\Sigma)^\perp$ en todo $p \in \Sigma$, la función $\square_X \mathcal{Y}(N)$, con $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, $\mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, sólo depende de $Y = \mathcal{Y}|_\Sigma$ (basta observar en (7) que sustituyendo R por N se obtiene que $\langle X, N\rangle = 0$, de lo que se sigue la misma conclusión). Por lo tanto, el tensor sobre la hipersuperficie

$$\mathcal{H}^N : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma) : (X,Y) \to \square_X Y(N)$$

está bien definido. Además es simétrico, ya que

$$\mathcal{H}^N(X,Y) = \square_Y X(N) + \langle [X,Y], N\rangle$$

es igual a $\square_Y X(N) = \mathcal{H}^N(Y,X)$, por ser $[X,Y] \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Observación 3.1.2 *Debido al carácter local de las cuestiones que vamos a tratar, podemos sustituir M, si es necesario, por un entorno $\mathbb{U}$ de Σ en M.*

3.2 Referencias y coordenadas adaptadas

Con el objetivo de simplificar cálculos posteriores introducimos ahora las referencias *adaptadas*. Diremos que una referencia $(\mathbb{U}, E = (E_1, ..., E_m))$ está *adaptada al radical* (ó simplemente *adaptada*) si el campo $E_m \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ es un campo radical. El siguiente lema asegura la existencia de referencias adaptadas (ver [Kos87], Lema 6.1).

Lema 3.2.1 *Dado (M, g) un espacio singular trasverso, para cada punto singular $p \in \Sigma$ de M existe un entorno abierto $\mathbb{U}$ y una referencia adaptada en ese entorno $E = (E_1, ..., E_m)$, en la que la métrica se expresa*

$$g = \sum_{i,j=1}^{m-1} g_{ij}^E \omega^i \circ \omega^j + \tau \omega^m \circ \omega^m$$

donde $g_{ij}^E = \langle E_i, E_j \rangle$, $(\omega^1, ..., \omega^m)$ es la referencia dual de E, y $\tau := \langle E_m, E_m \rangle$. Además $\tau = 0$ es una ecuación local de Σ.

Demostración

Sea $(F_1, ..., F_m)$ una referencia local en un entorno $\mathbb{U}$ de $p \in \Sigma$. Como p es singular, la matriz $\left(g_{ab}^F\right)$ tiene rango $m-1$ en p. Podemos suponer, reordenando si es necesario, que $\det\left(g_{ij}^F(p)\right) \neq 0$, y por tanto $\det\left(g_{ij}^F\right) \neq 0$ en todo el entorno $\mathbb{U} \cap \Sigma$ de p, tomando $\mathbb{U}$ más pequeño si es necesario. Sea

$$E_m = \sum_{i=1}^{m-1} f^i F_i + F_m \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$$

para ciertas funciones diferenciables $f^i : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$. Hallamos estas funciones exigiendo que $\langle E_m, F_j \rangle = 0$. En efecto, obtenemos un sistema de $m-1$ ecuaciones lineales con $m-1$ incógnitas

$$0 = \langle E_m, F_j \rangle = \sum_{i=1}^{m-1} f^i g_{ij}^F + g_{jm}$$

que tiene solución única por tener rango máximo la matriz de coeficientes $\left(g_{ij}^F\right)$. Llamemos $E = (F_1, ..., F_{m-1}, E_m)$. Necesariamente E_m es un campo radical, puesto que si no lo fuera el rango de la matriz $\left(g_{ab}^E\right)$ sería m en todo $\mathbb{U}$, contradiciendo que p sea singular.

Ahora es fácil probar la última afirmación. Como se observa

$$G_E = \tau \det\left(g_{ij}^E\right)$$

y como la referencia está adaptada al radical, $\det\left(g_{ij}^E\right) \neq 0$, luego $\tau = 0$ es una ecuación local de Σ. ♣

Definición 3.2.1 *Dado (M, g) un espacio singular trasverso, diremos que un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi)$ está adaptado si $\left(\mathbb{U}, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right)$ es una referencia adaptada.*

Lema 3.2.2 *En torno a cada punto singular de (M, g) existe un sistema de coordenadas adaptado.*

Demostración
Tomamos $(\mathbb{U}, E)$ una referencia adaptada en torno a p. Como $E_m(p) \neq 0$ existe (Lema 1.57 de [O'Ne]) un sistema de coordenadas $(\mathbb{V}, \varphi)$ en torno a p tal que $E_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$.♣

El siguiente resultado muestra cómo las referencias adaptadas pueden ser muy útiles en espacios singulares trasversos.

Lema 3.2.3 *Si (M, g) es un espacio singular trasverso, y $X, R \in \mathfrak{X}(M)$ con R campo radical, se verifica*

$$II(X, R) = 0 \Leftrightarrow X \text{ es tangente a lo largo de } \Sigma$$

Demostración
Si tomamos una referencia $(\mathbb{U}, (E_1, ..., E_m))$ adaptada y $x \in T_pM$ entonces, un sencillo cálculo muestra, usando la fórmula de Koszul

$$II_p^{E_m(p)}(x, E_m(p)) = \frac{1}{2} d_p\tau(x)$$

Como $\tau = \langle E_m, E_m \rangle = 0$ es una ecuación local de Σ, $x \in T_p\Sigma$ si y sólo si $II_p^{E_m(p)}(x, E_m(p)) = 0$. ♣

Cuando el radical mantiene su carácter en un abierto (como en el caso trasverso) podemos adaptar las referencias un poco más. Diremos que una referencia adaptada $(\mathbb{U}, E = (E_1, ..., E_m))$ está *completamente adaptada* si además está *adaptada a la hipersuperficie de cambio*, es decir, si cuando el radical es trasverso, $(E_1, ..., E_{m-1})$ son tangentes a lo largo de Σ, y cuando el radical es tangente (en todo $\mathbb{U} \cap \Sigma$), E_1 es trasverso a lo largo de Σ y $(E_2, ..., E_m)$ tangentes.

Es fácil construir referencias completamente adaptadas: si el radical es trasverso en $\mathbb{U} \cap \Sigma$ comenzamos tomando una referencia $(\mathbb{U}, F)$ tal que $(F_1, ..., F_{m-1})$ son tangentes a lo largo de Σ. Procediendo de manera análoga a la construcción de referencias adaptadas, obtenemos una referencia adaptada también a la hipersuperficie de cambio Σ. Cuando el radical es tangente en $\mathbb{U} \cap \Sigma$, podemos tomar la referencia $(\mathbb{U}, (F_1, ..., F_m))$ tal que $(F_2, ..., F_m)$ son tangentes a lo largo de $\mathbb{U} \cap \Sigma$. Necesariamente F_1 debe ser trasverso a lo largo de Σ. Procediendo de nuevo como en la construcción de referencias adaptadas, obtenemos $(\mathbb{U}, E)$ completamente adaptada.

Podemos además someter a las referencias adaptadas (o completamente adaptadas) a un proceso de ortonormalización, aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a los campos $(E_1, ..., E_{m-1})$, obteniendo lo que llamamos *referencias ortonormales adaptadas (o referencias ortonormales completamente adaptadas).*

Lema 3.2.4 *En torno a cada punto singular de un espacio singular trasverso con radical siempre trasverso o siempre tangente, existe una referencia ortonormal completamente adaptada.*

Demostración

Por la construcción anterior sabemos que, en torno a cada punto singular, existe una referencia completamente adaptada $(\mathbb{U}, E)$. Puesto que $(E_1, ..., E_{m-1})$ generan, en cada punto, subespacios no degenerados para g, se tiene que la submatriz (g_{ij}) es invertible, por lo que es aplicable el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt a los campos $(E_1, ..., E_{m-1})$. ♣

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ cualquiera, su expresión local en una referencia adaptada debe ser

$$X = \sum_{i=1}^{m-1} X^i E_i + \tau^{-1} \langle X, E_m \rangle \cdot E_m \tag{10}$$

donde los coeficientes $X^i \in C^\infty(\mathbb{U})$ vienen dados por

$$X^i = \sum_{j=1}^{m-1} \langle X, E_j \rangle g_E^{ij} \tag{11}$$

con $\left(g_E^{ij}\right)$ la matriz inversa de $\left(g_{ij}^E\right)$.

Sean Γ_{cab} los símbolos de Christoffel de primera especie asociados a $\square$, en una referencia adaptada $(\mathbb{U}, E)$. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita en $\mathbb{U} - \Sigma$, denotamos por Γ_{ab}^c a los *símbolos de Christoffel de segunda especie*, es decir $\nabla_{E_a} E_b = \sum_{c=1}^m \Gamma_{ab}^c E_c$. Entonces, en $\mathbb{U} - \Sigma$, se relacionan por

$$\Gamma_{cab} = \sum_{d=1}^{m} \Gamma_{ab}^d g_{dc}$$

Observando que la referencia es adaptada (con lo que $g_{im} = 0$, $g_{mm} = \tau$), escribimos

$$\Gamma_{iab} = \sum_{j=1}^{m-1} \Gamma_{ab}^j g_{ij} \tag{12}$$
$$\Gamma_{mab} = \tau \Gamma_{ab}^m$$

Como la matriz (g_{ij}) es invertible, las funciones Γ^j_{ab} son diferenciables en todo $\mathbb{U}$. Sin embargo, posiblemente las Γ^m_{ab} no lo sean.

Dada una curva regular $\gamma : I \to M$ contenida en $\mathbb{U}$, un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se expresará

$$V = \sum_{j=1}^{m-1} V^j (E_j \circ \gamma) + \tau_\gamma^{-1} \langle V, E_m \circ \gamma \rangle \cdot E_m \circ \gamma$$

donde $V^j = \sum_{i=1}^{m-1} \langle V, E_i \circ \gamma \rangle g^{ij}$, $\tau_\gamma := \tau \circ \gamma$. Teniendo en cuenta (12), las ecuaciones de los campos $\square$-paralelos (3) se trasforman en

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{dV^j}{dt} + \sum_{a,b=1}^{m} V^b (\gamma')^a \Gamma^j_{ab} \right\} g_{jk} = 0$$
$$\frac{dV^m}{dt} g_{mm} + \sum_{i,j=1}^{m} V^j (\gamma')^i \Gamma_{mij} = 0$$

Como la matriz (g_{jk}) es invertible, podemos escribir finalmente las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \frac{dV^j}{dt} + \sum_{a,b=1}^m V^b (\gamma')^a \Gamma^j_{ab} = 0 \\ \tau_\gamma \frac{dV^m}{dt} + \sum_{a,b=1}^m V^b (\gamma')^a \Gamma_{mab} = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Lo que resta de sección es una aportación original. Consideremos la aplicación $C^\infty(M)$-lineal

$$g(\cdot) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M) : X \mapsto g(X, \cdot)$$

Cuando g es semi-riemanniana, $g(\cdot)$ es un isomorfismo, y se conoce por *equivalencia métrica* de campos y 1-formas (ver [O'Ne], Prop. 3.10). Sin embargo, cuando g es una métrica degenerada trasversa, $g(\cdot)$ es inyectiva pero no sobre. En efecto, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $g(X, Z) = g(Y, Z)$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces en particular $(X - Y)|_{\mathbb{M}} = 0$. Por tanto debe ser $X = Y$. Además, el conjunto imagen $\operatorname{Im} g(\cdot)$ coincide con

$$\{\omega \in \mathfrak{X}^*(M) : \omega(R)|_\Sigma = 0\}$$

(observemos que la definición de este conjunto no depende del campo radical $R \in \mathfrak{X}(M)$). Claramente, $g(X)(R)|_\Sigma = 0$. Recíprocamente, tomemos una referencia adaptada $(\mathbb{U}, E)$ y una forma $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que $\omega(E_m)|_\Sigma = 0$. Tenemos entonces que $\tau^{-1}\omega(E_m)$ se extiende diferenciablemente a Σ. Entonces el campo $X = \sum_{a=1}^m X^a E_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$, con

$$\begin{cases} X^j = \sum_{i=1}^{m-1} \omega(E_i) g^{ij} \\ X^m = \tau^{-1}\omega(E_m) \end{cases}$$

verifica que $g(X) = \omega$.

Sea $f \in C^{\infty}(M)$. El campo $grad_g(f) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, métricamente equivalente en $\mathbb{M}$ a la 1-forma $df \in \mathfrak{X}^*(M)$, es decir, el único campo en $\mathbb{M}$ tal que $g(grad_g(f)) = df$, se conoce por *gradiente de f con respecto a g*.

Lema 3.2.5 *Dada una función $f \in C^{\infty}(M)$, el campo $grad_g(f) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si $Rf|_{\Sigma} = 0$, para algún (y todo) campo $R \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración:
Se deduce de los siguientes dos hechos. Primero, $df \in \operatorname{Im} g(\cdot)$ si y sólo si (por definición de conjunto imagen) existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $df = g(X)$. Y segundo, $df \in \operatorname{Im} g(\cdot)$ si y sólo si (como acabamos de ver) $df(R)|_{\Sigma} = 0$, es decir, $Rf|_{\Sigma} = 0$. Por tanto $Rf|_{\Sigma} = 0$ si y sólo si el campo $X = grad_g(f)$ se extiende a Σ. ♣

Corolario 3.2.1 *Un espacio singular trasverso (M, g) tiene radical tangente si y sólo si el campo $grad_g(\tau)$, para $\tau := \langle R, R \rangle$ con $R \in \mathfrak{X}(M)$ radical, se extiende diferenciablemente a Σ.*

3.3 Extendibilidad de la Derivada Covariante

Dado un espacio singular con cambio trasversal de signatura (M, g), existe en la parte semi-riemanniana $\mathbb{M}$ la derivada covariante $\nabla_X Y$ de dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Bajo ciertas condiciones, $\nabla_X Y$ existe en todo el espacio M ([Kos87], Tma. 6).

Proposición 3.3.1 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces $\nabla_X Y$ se extiende diferenciablemente a todo M si y sólo si $II(X, Y) = 0$*

Demostración:
Tomemos una referencia adaptada $(\mathbb{U}, (E_1, ..., E_m))$. La expresión de la derivada covariante (en $\mathbb{U} - \Sigma$) de X e Y en esta referencia es (usando la fórmula (10))

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{m-1} (\nabla_X Y)^i E_i + \tau^{-1} \Box_X Y(E_m) \cdot E_m$$

De la fórmula (11) deducimos

$$(\nabla_X Y)^i = \sum_{j=1}^{m-1} \langle \nabla_X Y, E_j \rangle g_E^{ij} = \sum_{j=1}^{m-1} \Box_X Y(E_j) g_E^{ij}$$

luego estas funciones se extienden diferenciablemente a $\mathbb{U} \cap \Sigma$. Por tanto, por la Proposición 3.1.1, $\nabla_X Y$ se extiende diferenciablemente a $\mathbb{U} \cap \Sigma$ si y sólo si la función $\Box_X Y(E_m)$ se anula en $\mathbb{U} \cap \Sigma$, es decir si $0 = II^{E_m}(X, Y)$. ♣

Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva regular. Diremos que es *trasversa a la hipersuperficie de cambio por* $p = \gamma(0) \in \Sigma$ si $\gamma'(0) \in T_pM - T_p\Sigma$ (supondremos además que $\gamma(t) \in \Sigma$ si y sólo si $t = 0$). Sea $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, entonces, para $t \neq 0$ (es decir, en $\mathbb{M}$), en la referencia adaptada $(E_1, ..., E_m)$ es

$$\frac{\nabla V}{dt} = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\nabla V}{dt}\right)^i E_i \circ \gamma + (\tau_\gamma)^{-1} \frac{\square V}{dt} (E_m \circ \gamma) \cdot E_m \circ \gamma$$

donde $\tau_\gamma = \tau \circ \gamma$. Las funciones $\left(\frac{\nabla V}{dt}\right)^i$ se extienden diferenciablemente a $t = 0$, ya que verifican

$$\left(\frac{\nabla V}{dt}\right)^i = \sum_{j=1}^{m-1} \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, E_j \right\rangle g_E^{ij} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\square V}{dt} (E_j)\, g_E^{ij}$$

Es claro entonces que el campo $\frac{\nabla V}{dt}$ se extiende diferenciablemente a $t = 0$ si y sólo si lo hace la función $(\tau_\gamma)^{-1} \frac{\square V}{dt} (E_m \circ \gamma)$.

Proposición 3.3.2 *Si $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, entonces $\frac{\nabla V}{dt}$, la derivada covariante de V a lo largo de γ, se extiende diferenciablemente a $t = 0$ si y sólo si $II_{\gamma(0)}(\gamma'(0), V(0)) = 0$.*

Demostración
Por lo que acabamos de ver, basta que usemos la Proposición 3.1.1 para la función $\frac{\square V}{dt}(E_m \circ \gamma) \in C^\infty(\gamma)$ (sabiendo que $\tau_\gamma = 0$ es una ecuación de $t = 0$) y la expresión (9). ♣

3.4 Extendibilidad del trasporte paralelo

Dada $\gamma : I \rightarrow M$ una curva regular trasversa a Σ por $\gamma(0) = p$ y un vector $v \in T_pM$, nos preguntamos si existe un campo $\square$-paralelo a lo largo de γ que extiende al vector v. Naturalmente nos estamos preguntando acerca de la posibilidad de trasportar $\square$-paralelamente a lo largo de curvas trasversas a la hipersuperficie de cambio, vectores que están sobre ella.

Sea $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que $\frac{\square V}{dt} = 0$. Si $\xi \in Rad_p(M)$ entonces, de la fórmula (9), deducimos que

$$0 = \left.\frac{\square V}{dt}\right|_{t=0} (\xi) = II_p^\xi (V(0), \gamma'(0))$$

Por tanto, si podemos trasladar un vector $v \in T_pM$ $\square$-paralelamente a lo largo de γ, entonces necesariamente $II_p^\xi(v, \gamma'(0)) = 0$. De hecho esta condición es suficiente, como afirma el resultado principal de esta sección: ([Kos87], Tma. 7)

Teorema 3.4.1 *Si $\gamma : I \to M$ es una curva regular trasversa a Σ por $\gamma(0) = p$ y $v \in T_pM$, existe el trasporte $\Box$-paralelo del vector v a lo largo de γ, es decir existe un único campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, con $V(0) = v$, tal que $\frac{\Box V}{dt} = 0$, si y sólo si $II_p(\gamma'(0), v) = 0$*

A continuación describimos la demostración, que puede encontrarse en [Am] (Tma 3.3), aunque la primera demostración, que apareció en [Kos87] (Tma. 7), es distinta.

Demostración

La condición necesaria es consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.2. Probaremos la condición suficiente. Sea $(\mathbb{U}, (E_1, ..., E_m))$ una referencia adaptada en torno a $\gamma(0) = p \in \Sigma$, y $\left(\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_m\right)$ su restricción a la curva γ. Las ecuaciones locales de los campos $\Box$-paralelos $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ a lo largo de γ, vienen dadas por la fórmula (13). Los teoremas usuales de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, asumen la forma general $x' = F(t, x)$, ,por lo que no son aplicables al sistema (13). Se hace necesario estudiar sistemas de la forma más general

$$\left.\begin{array}{r} \frac{dx^k}{dt} = F^k(t,x) \\ h(t,x)\frac{dx^m}{dt} = F^m(t,x) \end{array}\right\} \tag{14}$$

donde $F, h : I \times \mathbb{U}$ son diferenciables, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Para probar la condición suficiente necesitamos un teorema de existencia y unicidad de soluciones del sistema (14), que aplicaremos al sistema (13), tomando $x^b = V^b$, $x_0 = V(0) = v$, $h(t, x) = \tau_\gamma(t)$, y

$$\left\{\begin{array}{l} F^k(t,x) = -\sum_{a,b=1}^m x^b(\gamma')^a(t)\,\Gamma^k_{ab}(t) \\ F^m(t,x) = -\sum_{a,b=1}^m x^b(\gamma')^a(t)\,\Gamma_{mab}(t) \end{array}\right.$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones del sistema (14) es el siguiente.(Teorema 2.2 de [Am])

Teorema 3.4.2 *supongamos que $h(0, x_0) = F^m(0, x_0) = \frac{\partial h}{\partial x^m}(0, x_0) = 0$ y que los números*

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{\partial h}{\partial t}(0,x_0) + \sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}F^i\right)(0,x_0) \\ \mu = \frac{\partial F^m}{\partial x^m}(0,x_0) \end{array}\right.$$

son distintos de 0 y tienen distinto signo. Entonces el sistema (14) tiene solución trasversal $x(t)$, es decir

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(t, x(t)) \neq 0$$

única (salvo el tamaño de su dominio) con $x(0) = x_0$.

En primer lugar, veamos que el sistema (14) que pretendemos resolver verifica las hipótesis del Teorema 3.4.2. En efecto: $h(0,x_0) = \tau_\gamma(0) = 0$, $F^m(0,x_0) = -II_p^{E_m(p)}(v,\gamma'(0)) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x^m}(0,x_0) = 0$ (ya que h no depende de x), y los números

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\partial h}{\partial t}(0,x_0) + \sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}F^i\right)(0,x_0) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,x_0) = d_p\tau(\gamma'(0)) \\ \mu = \frac{\partial F^m}{\partial x^m}(0,x_0) = -II_p^{E_m(p)}(x,E_m(p)) = -\frac{1}{2}d_p\tau(x) \end{cases}$$

son no nulos y tienen distinto signo, por la trasversalidad de γ.

Por último (y con ello concluimos la demostración del Teorema 3.4.1), esbozamos la demostración del Teorema 3.4.2. La herramienta básica para encontrar soluciones de (14) es el *teorema de las variedades estables*, que aparece enunciado en [Ab-Ma] en el contexto de los sistemas dinámicos, y cuya demostración puede encontrarse en el apéndice de A. Kelley en [Ab-Ro] (Tma. 1), o bien en [Har], [Hi].

Teorema 3.4.3 *Sea M una variedad diferenciable, un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un punto $p \in M$ tal que $X_p = 0$. Sea $L_X : T_pM \to T_pM$ la* linealización *de X en p (es decir el endomorfismo que tiene por matriz las derivadas parciales de las coordenadas del campo X en una carta cualquiera en torno a p respecto de la base de T_pM que esa carta proporciona). Sean P^+, P^- y P^0 la suma directa de los autoespacios de L_X correspondientes a los autovalores con parte real positiva,negativa y nula, respectivamente. Entonces existen dos subvariedades S^+, S^- a través de p, invariantes por el flujo ϕ_t de X, tales que $T_pS^+ = P^+, T_pS^- = P^-$. Además si $q \in S^+$ (respectivamente $q \in S^-$) la curva integral $\alpha(t) = \phi(t,q)$ está definida para todo $t \geqslant 0$ (resp. $t \leqslant 0$) y*

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha(t) = p \textit{ (resp. } \lim_{t\to-\infty}\alpha(t) = p\textit{)}$$

S^+ y S^- se llaman *variedades estables de X a través de p*, y son localmente únicas. Podemos entender que la linealización de un campo describe localmente el flujo de éste. Por tanto los autoespacios de la linealización deben proporcionar localmente subvariedades invariantes por el flujo.

Para ver la existencia de soluciones de (14), se toma el campo $W \in \mathfrak{X}(I \times \mathbb{U})$ definido por

$$W_{(t,x)} = h(t,x)e_0 + h(t,x)\sum_{i=1}^{m-1}F^i(t,x)e_i + F^m(t,x)e_m$$

donde $(e_0,...,e_m)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{m+1}$ (identificamos $t = x^0$). Como $h(0,x_0) = F^m(0,x_0) = 0$, W se anula en $(0,x_0)$. Calculamos la linealización L_W en $(0,x_0)$. Resulta que L_W posee precisamente tres autovalores, los tres reales, que son λ, μ, y 0, con multiplicidades 1, 1 y $m-1$ (ver detalles en [Am]). El Teorema 3.4.3 proporciona una subvariedad estable unidimensional S, cuyo espacio tangente $T_{(0,x_0)}S$ es el autoespacio correspondiente a λ. Esta subvariedad admite localmente una parametrización de la forma $\sigma(t) = (t, x(t))$, es decir S es localmente la gráfica de una función $t \to x(t)$, que resulta ser solución trasversal de (14) con $x(0) = x_0$.

Para ver la unicidad de soluciones de (14), se toman $x_\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{U}$, $\alpha = 1, 2$, dos soluciones trasversales de (14) con $x_1(0) = x_0 = x_2(0)$. Resulta entonces ([Am]) que $\sigma_1, \sigma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $\sigma_\alpha = (t, x_\alpha(t))$ $\alpha = 1, 2$, son dos difeomorfismos sobre la misma variedad (estable) unidimensional con $\sigma_1(0) = (0, x_0) = \sigma_2(0)$. Por tanto existe un difeomorfismo $r : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $r(0) = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 \circ r$, en particular $t = (\sigma_1)^0(t) = (\sigma_2)^0(r(t)) = r(t)$, luego $\sigma_1 = \sigma_2$. ♣

Observación 3.4.1 *Si ocurre que $II_p(\gamma'(0), \cdot) = 0$, entonces podemos demostrar que para cada v existe su trasporte $\Box$-paralelo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ sin usar el Teorema de las variedades estables. En efecto, en este caso*

$$F^m(0, x) = -II_p^{E_m(p)}(x, \gamma'(0)) = 0$$

para todo $x \in T_pM$. Aplicando la Proposición 3.1.1 a la función $F^m(t, x)$ resulta que factoriza como producto de la funcion h por otra funcion C^∞, pudiendo así cancelar h en la ultima ecuación del sistema (14). El sistema resultante sería de la forma usual $x' = F(t, x)$, resoluble usando los teoremas clásicos.

3.5 Extendibilidad de las geodésicas

En un espacio singular (M, g) con cambio trasversal de signatura existen, al menos en la parte semi-riemanniana, multitud de $\Box$-geodésicas: dado un punto $p \in \mathbb{M}$ y una dirección $v \in T_pM$ existe una única ∇-geodésica maximal $\gamma : I \to \mathbb{M}$ empezando en p con velocidad inicial v (ver [O'Ne] Prop. 3.24). Nos preguntamos si existirán $\Box$-geodésicas atravesando trasversalmente la hipersuperficie de cambio Σ, o equivalentemente, si existen $\Box$-geodésicas empezando en puntos singulares con velocidad inicial trasversa a la hipersuperficie de cambio. La respuesta es que existen bajo cierta condición sobre la velocidad inicial, determinada por la aplicación II_p.

Dado un espacio singular con cambio trasversal de signatura (M, g), y $\pi : TM \to M$ su *fibrado tangente*, sabemos que existe en la parte semi-riemanniana $\mathbb{M}$ un único campo $\Lambda \in \mathfrak{X}(T\mathbb{M})$ caracterizado por la condición: $\gamma : I \to \mathbb{M}$ *es una $\Box$-geodésica de* $(\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}})$ *si y sólo si* $\dot\gamma : I \to T\mathbb{M}$, $\dot\gamma(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ *es una curva integral de* Λ, es decir

$$\Lambda_{\dot\gamma(t)} = \frac{d\dot\gamma}{dt}(t)$$

Este campo Λ se conoce por *spray geodésico* de $(\mathbb{M}, g_M)$ ([O'Ne]). Este campo no está definido, en principio, en todo M.

La respuesta a la pregunta inicial de la sección viene dada por el siguiente ([Kos94])

Teorema 3.5.1 *Sea $p \in \Sigma$, y $v \in T_pM - T_p\Sigma$. Entonces, existe una única $\square$-geodésica γ con $\gamma'(0) = v$, si y solamente si $II_p(v,v) = 0$.*

A continuación comentamos la demostración de este teorema, que puede encontrarse en [Kos94] (Tma. 1) (también aparece en [Am], Tma. 3.4).

Demostración

Si $\gamma : I \to M$ es una $\square$-geodésica trasversa a la hipersuperficie Σ por $p = \gamma(0)$, el campo $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es $\square$-paralelo a lo largo de γ, luego por el Teorema 3.4.1, $II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = 0$, así que basta ver la otra implicación. Supongamos que $II_p(v,v) = 0$ y tomemos una referencia adaptada $(\mathbb{U}, E)$. Supongamos también que disponemos de un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$. Resulta que $(\pi^{-1}\mathbb{U}, \psi)$, con $\psi^a(q,w) = x^a(q)$ y $\psi^{m+a}(q,w) = w^a$ la coordenada a-ésima de w en $(E_1(q), ..., E_m(q))$, determina un sistema de coordenadas del fibrado tangente TM, llamado *sistema de coordenadas mixtas*. Son estas coordenadas mixtas las que se usan en la demostración. Definimos el campo $W \in \mathfrak{X}(\pi^{-1}\mathbb{U})$ por

$$W = (\tau \circ \pi)\Lambda$$

Se trata de calcular curvas integrales de W, puesto que parametrizan líneas $\square$-geodésicas de M. Para ello usamos el teorema de las variedades estables. La condición $II_p(v,v) = 0$ permite afirmar que $W_{(p,v)} = 0$. Calculamos la linealización L_W de W en (p,v) y observamos que posee precisamente tres autovalores, los tres reales, que son $d_p\tau(v)$, $-d_p\tau(v)$ y 0, con multiplicidades 1, 1 y $m-1$. Tomamos S la variedad estable unidimensional a través de (p,v) correspondiente al autovalor $d_p\tau(v)$. Se tiene entonces que ([Am]) existe una parametrización de S, $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\sigma(0) = (p,v)$, $\sigma'(0) \in T_{(p,v)}S$ tal que

$$W \circ \sigma = \tau_\gamma \sigma'$$

La proyección $\gamma = \pi \circ \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es la $\square$-geodésica buscada, pues como $\tau_\gamma(t)$ sólo se anula en $t = 0$, podemos cancelar τ_γ en ambos lados de la igualdad

$$\tau_\gamma \sigma' = W \circ \sigma = (\tau \circ \pi \circ \sigma)(\Lambda \circ \sigma) = \tau_\gamma (\Lambda \circ \sigma)$$

Además es única con la condición $\gamma'(0) = v$. Si γ_1, γ_2 son dos $\square$-geodésicas con $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = v$, entonces las curvas $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$ parametrizan en un entorno de $t = 0$ sendas variedades estables (unidimensionales) de TM. Por la unicidad local de las variedades estables, deben ser iguales en un entorno de (p,v). Por tanto $\dot{\gamma}_2$ es una reparametrización de $\dot{\gamma}_1$, y lo mismo se puede decir de γ_1 y γ_2. Como γ_2 y γ_1 son $\square$-geodésicas resulta que $\gamma_2 = \gamma_1$. ♣

Este resultado asegura que existen $\square$-geodésicas empezando en puntos singulares $p \in \Sigma$ con velocidad inicial $v \in T_pM - T_p\Sigma$, siempre que $II_p(v,v) = 0$. Como podemos observar en la Proposición 3.1.2, cuando el radical es trasverso se tiene $II_p(\xi,\xi) \neq 0$, para todo $\xi \in Rad_p(M) - \{0\}$, luego no existen $\Box$-geodésicas trasversales a Σ con dirección inicial radical. Sin embargo existen cierto tipo de curvas trasversales a Σ con dirección inicial radical, que son $\Box$-geodésicas en la parte semi-riemanniana $\mathbb{M}$.

Definición 3.5.1 *Sea C una subvariedad C^2 unidimensional de (M,g). Decimos que C es una línea semigeodésica si existe $p \in \Sigma$ tal que cada componente conexa de $C - \{p\}$ es una línea $\Box$-geodésica pero no lo es C, es decir, C no admite una parametrizacion $\Box$-geodésica en torno a p.*

En el abierto semi-riemanniano $(\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}})$, la extendibilidad C^0 de una geodésica implica ([O'Ne], Lema 5.8) su extendibilidad como geodésica, por lo que no existen líneas semi-geodésicas en $(\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}})$. Sin embargo sí existen a través de Σ en la dirección radical donde éste es trasverso.

Teorema 3.5.2 *Sea $p \in \Sigma$, y $\xi \in T_pM - T_p\Sigma$. Entonces $\xi \in Rad_p(M)$ si y solamente si existe una única línea semigeodésica maximal C trasversal a Σ por p tal que $\xi \in T_pS$.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en [Kos94] (Tma. 2). El argumento es el mismo que en el Teorema 3.5.1, pero con un pequeño refinamiento del teorema de las variedades estables.

Observación 3.5.1 *Debemos resaltar que el hecho de imponer clase (al menos) C^2 a las semigeodésicas permite concluir la unicidad en el Teorema anterior, puesto que existen infinitas curvas de clase C^1 atravesando la hipersuperficie de manera trasversa y que además son $\Box$-geodésicas en la parte semi-riemanniana $\mathbb{M}$. En la sección 3.8 mostramos en un ejemplo de esta situación.*

3.6 Métricas II y III-planas

En adelante denotaremos por $\mathfrak{C}N$ al espacio de tensores en N de tipo curvatura, donde $N = M, \mathbb{M}$ o Σ. Recordemos que, por definición, $T \in \mathcal{I}_4^0(M)$ es de *tipo curvatura* si verifica

$$\begin{aligned} &1)\ T(x,y,z,t) = -T(y,x,z,t) \\ &2)\ T(x,y,z,t) = T(z,t,x,y) \\ &3)\ T(x,y,z,t) + T(y,z,x,t) + T(z,x,y,t) = 0 \end{aligned}$$

Uno de los problemas más relevantes en espacios singulares trasversos, que tratamos en 3.7, es la cuestión de la extendibilidad de los tensores clásicos de la Geometría semi-riemanniana, como son el tensor de curvatura covariante $K \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$, la curvatura de Ricci $Ric \in S^2(\mathbb{M})$ y la curvatura escalar $Sc \in C^\infty(\mathbb{M})$. Una discusión acerca de este tema puede encontrarse en [Kos97], en el caso del radical trasverso, y en [Ag-La], en el caso del radical tangente.

En esta cuestión es significativo el papel de la restricción de la aplicación $II^R : \mathfrak{X}_\Sigma \times \mathfrak{X}_\Sigma \to C^\infty(\Sigma)$ a la hipersuperficie de cambio Σ, siendo $R \in \mathfrak{X}(M)$ un campo radical. Denotaremos por

$$II_\Sigma^R : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$$

a esta restricción $II_\Sigma^R \in S^2(\Sigma)$. Recordemos que la condición $II^R(X,Y) = 0$ es independiente del campo radical R.

Definición 3.6.1 *Dado un espacio singular trasverso (M,g), diremos que g es II-plana (o que Σ es II-plana) si $II_\Sigma = 0$, es decir, si $II(X,Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a Σ.*

Esta definición de métrica II-plana es la extensión natural, para radical arbitrario, de la definición original ([Kos97]) para radical trasverso. En el caso del radical tangente, resulta equivalente a que la métrica en la hipersuperficie no varía bajo el flujo de cualquier campo radical ([Ag-La]).

Proposición 3.6.1 *Dado un espacio singular trasverso (M,g) con radical tangente, g es II-plana si y sólo si existe un campo radical $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ de Killing, es decir, tal que la derivada de Lie de la métrica en Σ se anula*

$$L_R(g_\Sigma) = 0$$

En este caso, cualquier campo radical es de Killing.

Demostración ([Ag-La])
Si $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ es un campo radical, entonces para cualquier par $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se verifica, usando (1)

$$R\langle X,Y\rangle = \langle [R,X], Y\rangle + \langle X, [R,Y]\rangle - 2II^R(X,Y)$$

de lo que se deduce la proposición. ♣

Podemos relacionar el concepto de métrica II-plana con la extendibilidad del trasporte paralelo y de las $\square$-geodésicas, usando los Teoremas 3.4.1 y 3.5.1, según la siguiente

Proposición 3.6.2 *Sea (M,g) un espacio singular trasverso y sea $p \in \Sigma$. Entonces, el radical es trasverso en $p \in \Sigma$ y la métrica es II-plana en p si y sólo si, para cada curva regular $\gamma : I \to M$ trasversa a Σ por $\gamma(0) = p$, existe el trasporte $\square$-paralelo del hiperplano tangente $T_p\Sigma$ a lo largo de γ. En este caso, no existen $\square$-geodésicas trasversas a Σ por p.*

Demostración

Supongamos que el radical es trasverso en p. Sean $w, x \in T_pM$, con w trasverso a Σ (es decir, $w = w_\Sigma + w^m\xi \in T_pM$, con $\xi \in Rad_p(M) - \{0\}$ y $w^m \neq 0$). Si g es II-plana en p entonces, por el Lema 3.2.3

$$II_p^\xi (w, x) = w^m x^m II_p^\xi (\xi, \xi)$$

que es nulo si y sólo si $x \in T_p\Sigma$. Basta aplicar ahora el Teorema 3.4.1 para concluir que existe el trasporte $\Box$-paralelo de todo el hiperplano $T_p\Sigma$.

Para ver el recíproco, primero observamos que si el radical es tangente en p y $w \in T_pM$ es trasverso a Σ, entonces $II_p^\xi (w, \xi) \neq 0$; pero entonces, por el Teorema 3.4.1, no existe el trasporte $\Box$-paralelo de $\xi \in T_p\Sigma$ a lo largo de una curva γ trasversa a Σ tal que $\gamma'(0) = w$. Como, por hipótesis, existe dicho trasporte, el radical debe ser trasverso en p. Para ver que además g es II-plana en p, tomamos dos vectores tangentes $u, v \in T_p\Sigma$, y definimos el vector $w := u + \xi \in T_pM - T_p\Sigma$. Entonces, por hipótesis y el Teorema 3.4.1, si $\gamma : I \to M$ es trasversa a Σ por $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = w$, se tiene

$$0 = II_p^\xi (w, v) = II_p^\xi (u, v) + II_p^\xi (\xi, v) = II_p^\xi (u, v)$$

Como $u, v \in T_p\Sigma$ son arbitrarios, se concluye que g es II-plana en p.

Para terminar basta observar que si $w = w_\Sigma + w^m\xi \in T_pM$ es trasverso a Σ, entonces usando que g es II-plana y el radical trasverso, se tiene que

$$II_p^\xi (w, w) = (w^m)^2 \, II_p^\xi (\xi, \xi) \neq 0$$

Por el Teorema 3.5.1 concluimos que no existe una $\Box$-geodésica γ trasversa a Σ por p con $w = \gamma'(0)$. ♣

Corolario 3.6.1 *Si $\gamma : I \to M$ es una $\Box$-geodésica trasversa a Σ por p y el radical es trasverso en p, entonces g no es II-plana.*

Como veremos en la sección siguiente, el concepto de métrica II -plana está fuertemente relacionado con la extendibilidad de los tensores de curvatura antes mencionados. La Proposición 3.3.1 relaciona también este concepto con la extendibilidad de la conexión de Levi-Civita ∇ de $\mathbb{M}$.

Proposición 3.6.3 *Una métrica trasversa g en M es II-plana si y sólo si para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a Σ, $\nabla_X Y$ se extiende diferenciablemente a Σ.*

Este resultado nos lleva, en el caso II-plano, a la definición de un tensor en la hipersuperficie de cambio, relacionado también, como veremos, con cuestiones de extendibilidad de curvaturas. Dado $R \in \mathfrak{X}(M)$ un campo radical, definimos ([Kos97])

$$\left.\begin{array}{c} III^R : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma) \\ (X,Y) \mapsto III^R(X,Y) := II^R(\nabla_X Y, R) \end{array}\right\}$$

Es inmediato comprobar que III^R es, en efecto, $C^\infty(\Sigma)$-bilineal y simétrico.

En el resto de este apartado, consideraremos por separado los casos en que el radical es trasverso o tangente.

Definición 3.6.2 *Sea (M,g) un espacio singular trasverso con radical trasverso. Diremos que g es III-plana si es II-plana y $III^R = 0$.*

De la Proposición 3.3.1 y del Lema 3.2.3 deducimos que, en el caso del radical trasverso, g es III-plana si y sólo si, siempre que alguno de $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sea tangente a Σ, la derivada covariante $\nabla_X Y$ se extiende a un campo que también es tangente a Σ.

El caso en que el radical es tangente merece ciertas consideraciones previas (debidas a [Ag-La]). Para comenzar, existe una dirección normal en cada punto singular caracterizada por ser II-nula. Esto proporciona una manera de determinar canónicamente un campo normal unitario y un campo radical.

Supongamos que (M,g) es un espacio singular trasverso con radical tangente, es decir $Rad_p(M) \subset T_p\Sigma$ para todo $p \in \Sigma$. En cada punto singular $p \in \Sigma$, el espacio normal $(T_p\Sigma)^\perp$ es un plano tal que

$$T_p\Sigma \cap (T_p\Sigma)^\perp = Rad_p(M)$$

Consideremos una referencia completamente adaptada $(\mathbb{U}, E)$, entonces la aplicación $II_p^{E_m}$ define sobre el plano $(T_p\Sigma)^\perp$ una métrica lorentziana, ya que

$$\det \begin{pmatrix} II^{E_m}(E_1,E_1) & II^{E_m}(E_1,E_m) \\ II^{E_m}(E_1,E_m) & II^{E_m}(E_m,E_m) \end{pmatrix} = -\left(II^{E_m}(E_1,E_m)\right)^2 < 0$$

Existen por tanto dos direcciones en $(T_p\Sigma)^\perp$ que son $II_p^{E_m}$-nulas, una de ellas dada por $E_m(p) \in Rad_p(M)$. La otra dirección determina, salvo signo, un vector unitario $N(p) \in (T_p\Sigma)^\perp$.

Proposición 3.6.4 *Dado un espacio singular trasverso (M,g) con radical tangente en $p \in \Sigma$, existe una única $\Box$-geodésica ortogonal y trasversa a Σ por p.*

Demostración
Basta usar el Teorema 3.5.1 para $N(p) \in (T_p\Sigma)^{\perp}$. ♣

Al variar el punto p a lo largo de Σ, obtenemos un campo normal unitario $N \in \mathfrak{X}_\Sigma$ tal que $II(N,N) = 0$, que llamamos *normal principal*. Este campo define, salvo signo, una *segunda forma fundamental* en la hipersuperficie de cambio Σ, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^N$, por $\mathcal{H}(X,Y) = \Box_X Y(N)$. Esta segunda forma fundamental nos permite a su vez definir un campo radical $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, caracterizado por ser $\mathcal{H}(R,R) = -1$. En efecto, resulta que si $p \in \Sigma$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_p(E_m(p), E_m(p)) &= \Box_{E_m(p)} E_m(N_p) \\ &= -\Box_{E_m(p)} N(E_m(p)) + E_m(p)\langle N, E_m\rangle \\ &= -II_p^{E_m(p)}(E_m(p), N_p) \neq 0\end{aligned}$$

Eligiendo adecuadamente el signo del campo normal principal $N \in \mathfrak{X}_\Sigma$ determinamos canónicamente, salvo signo, un campo radical $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, que llamamos *radical principal*, tal que $\mathcal{H}(R,R) = -1$. La aplicación $II = II^R$ verifica por tanto

$$\begin{cases} II(N,N) = 0 \\ II(N,X) = -\mathcal{H}(X,R), \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(\Sigma) \\ II(A,R) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{X}(\Sigma) \end{cases}$$

El siguiente paso es construir una *distribución pantalla* (o *Screen*) en la hipersuperficie de cambio de signatura Σ, es decir una distribución en Σ trasversa al radical (de dimensión máxima). Lo conseguimos de manera canónica eligiendo, en cada punto singular $p \in \Sigma$, el subespacio

$$S_p = \{v \in T_p\Sigma : \mathcal{H}_p(R_p, v) = 0\}$$

Llamamos a $S \to \Sigma$ *distribución pantalla canónica* ([Ag-La]), y denotamos por $\Gamma(S)$ al $C^\infty(\Sigma)$-módulo de secciones de S. Asimismo, denotamos por

$$\mathcal{H}^S : \Gamma(S) \times \Gamma(S) \to C^\infty(\Sigma)$$

a la restricción del tensor $\mathcal{H} \in S^2(\Sigma)$ a la pantalla canónica S.

Sabemos que $\mathcal{H}(R,R) = -1 \neq 0$, donde $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ es el campo radical principal, por lo que no puede exigirse que $\mathcal{H}$ se anule. Diremos que g es $\mathcal{H}$*-plana* si $\mathcal{H}^S = 0$, es decir si $\mathcal{H}(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in \Gamma(S)$.

Es claro que cualquier campo a lo largo de la hipersuperficie de cambio de signatura $A \in \mathfrak{X}_\Sigma$ puede descomponerse en la forma

$$A = \nu(A)N + A^S + \rho(A)R$$

donde $A^S \in \Gamma(S)$ es la componente en el Screen y

$$\begin{cases} \nu(A) := \langle A, N \rangle \\ \rho(A) := -\mathcal{H}(A - \nu(A)N, R) \end{cases}$$

son las componentes normal y radical, respectivamente. Por comodidad denotaremos $\nu(X) = \nu(X|_\Sigma)$ y $\rho(X) = \rho(X|_\Sigma)$ para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Entre todas las posibles extensiones locales de campos sobre Σ, existen unas particulares, llamadas *extensiones canónicas*, que nos interesa definir. La construcción es la siguiente: apelando a la Proposición 3.6.4, por cada punto singular podemos encontrar una $\Box$-geodésica trasversa a Σ con velocidad inicial $N_p \in (T_p\Sigma)^\perp$. Existe entonces una extensión (local) $\mathbf{N} \in \mathfrak{X}(M)$ del campo normal principal, caracterizada por $\Box_\mathbf{N}\mathbf{N} = 0$. Usando el flujo de este campo, para cada $A \in \mathfrak{X}_\Sigma$ existe una extensión (local) $\mathbf{A} \in \mathfrak{X}(M)$, caracterizada esta vez por

$$[\mathbf{A}, \mathbf{N}] = 0$$

A estas extensiones las llamamos *extensiones canónicas* ([Ag-La]). Nos resultará útil saber que, si $A \in \mathfrak{X}_\Sigma$, las extensiones canónicas verifican

$$\mathbf{N}\langle \mathbf{A}, \mathbf{N} \rangle = 0$$

ya que $\mathbf{N}\langle \mathbf{A}, \mathbf{N} \rangle = \Box_\mathbf{N}\mathbf{A}(\mathbf{N}) = \Box_\mathbf{A}\mathbf{N}(\mathbf{N}) = \mathbf{A}\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 0$. Por tanto, si $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ entonces su extensión canónica verifica

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle = 0 \tag{15}$$

Si g es II-plana, el tensor simétrico $III^R \in S^2(\Sigma)$ definido arriba verifica, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} III^R(X,Y) &= II^R(\nabla_X Y, R) = \langle \nabla_X Y|_\Sigma, N \rangle \\ &= \Box_X Y(N) = \mathcal{H}(X,Y) \end{aligned}$$

Obsérvese que la existencia del tensor $\mathcal{H} \in S^2(\Sigma)$ está asegurada para cualquier métrica trasversa con radical tangente, mientras que el tensor $III^R \in S^2(\Sigma)$ necesita que g sea II-plana para existir. La relación entre III^R y $\mathcal{H}$, cuando g es II-plana, motiva la siguiente definición de métrica III-plana, en el caso del radical tangente ([Ag-La]).

Definición 3.6.3 *Sea (M, g) un espacio singular trasverso con radical tangente. Diremos que g es III-plana si g es II-plana y $\mathcal{H}$-plana.*

3.7 Extendibilidad de los tensores de curvatura

En la parte semi-riemanniana $(\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}})$ de un espacio singular trasverso tenemos perfectamente definidos los tensores clásicos de la Geometría semi-riemanniana ([O'Ne]). Dado un tensor $A \in \mathcal{I}_s^r(\mathbb{M})$ en $\mathbb{M}$, diremos que A *se extiende diferenciablemente a* Σ si existe otro tensor $\mathcal{A} \in \mathcal{I}_s^r(M)$ en M tal que $\mathcal{A}|_{\mathbb{M}} = A$. Nótese que esto es equivalente a que, dados $\omega^1,...,\omega^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_1,....,X_s \in \mathfrak{X}(M)$, la función

$$A\left(\omega^1, ..., \omega^r, X_1, ..., X_r\right) \in C^\infty(\mathbb{M})$$

se extiende diferenciablemente a Σ.

Existen diversos resultados de extendibilidad de los tensores de curvatura de la Geometría semi-riemanniana ([Kos97],[Ag-La]), que comentaremos más adelante.

Dados $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ cuatro campos de un espacio singular trasverso (M, g), y $(\mathbb{U}, (E_1, ..., E_m))$ una referencia ortonormal adaptada, podemos expresar su curvatura covariante $K \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$, definida por ([O'Ne])

$$K(X, Y, Z, T) := \Box_X(\nabla_Y Z)(T) - \Box_Y(\nabla_X Z)(T) - \Box_{[X,Y]}Z(T)$$

como un polinomio en la variable $\tau^{-1} := \langle E_m, E_m\rangle^{-1}$ con coeficientes en $C^\infty(\mathbb{U})$; concretamente,

$$K(X, Y, Z, T) = (K(X, Y, Z, T))_0 + \tau^{-1}(K(X, Y, Z, T))_1 \tag{16}$$

donde

$$\begin{aligned}
(K(X, Y, Z, T))_0 :=& \sum_{i=1}^{m-1}\{X(\Box_Y Z(E_i)) - Y(\Box_X Z(E_i))\} + \\
&+\sum_{i=1}^{m-1}\{\Box_Y Z(E_i)\Box_X E_i(T) - \Box_X Z(E_i)\Box_Y E_i(T)\} + \\
&+X\left(\tau^{-1}\langle E_m, T\rangle \Box_Y Z(E_m)\right) - Y\left(\tau^{-1}\langle E_m, T\rangle \Box_X Z(E_m)\right) \\
&-\Box_{[X,Y]}Z(T) \\
(K(X, Y, Z, T))_1 :=& \Box_X Z(E_m)\Box_Y T(E_m) - \Box_Y Z(E_m)\Box_X T(E_m)
\end{aligned}$$

Para comprobar esta fórmula basta usar la expresión de los campos (10) en una referencia adaptada $(\mathbb{U}, E)$, y las propiedades de la conexión dual.

Lema 3.7.1 $K(X, Y, Z, T)$ *se extiende diferenciablemente a* Σ *si y sólo si*

$$\det\begin{pmatrix} II^R(X, Z) & II^R(X, T) \\ II^R(Y, Z) & II^R(Y, T)\end{pmatrix} = 0$$

En efecto, basta observar que, usando la Proposición 3.1.1, $K(X, Y, Z, T)$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si la función diferenciable $(K(X, Y, Z, T))_1$ se anula sobre la hipersuperficie de cambio Σ, y recordar la observación (8)

$$\Box_X Y(E_m)|_\Sigma = II^{E_m}(X, Y)$$

Siguiendo la misma idea, caracterizamos la extendibilidad del tensor de Ricci y de la curvatura escalar de $\mathbb{M}$. Es fácil expresar localmente el tensor de Ricci $Ric := C_3^1(R) \in S^2(\mathbb{M})$ ([O'Ne]), con $R \in \mathcal{I}_3^1(\mathbb{M})$ el tensor de curvatura de Riemann, en una referencia ortonormal adaptada $(\mathbb{U}, E)$

$$Ric\,(X,Y) = \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i K\,(X, E_i, Y, E_i) + \tau^{-1} K\,(X, E_m, Y, E_m) \tag{17}$$

Sustituyendo según la expresión (16) llegamos a

$$Ric\,(X,Y) = (Ric\,(X,Y))_0 + \tau^{-1}(Ric\,(X,Y))_1 + \tau^{-2}(Ric\,(X,Y))_2 \tag{18}$$

donde

$$\begin{cases} (Ric\,(X,Y))_0 := \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \left(K\,(X, E_i, Y, E_i)\right)_0 \\ (Ric\,(X,Y))_1 := \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \left(K\,(X, E_i, Y, E_i)\right)_1 + \left(K\,(X, E_m, Y, E_m)\right)_0 \\ (Ric\,(X,Y))_2 := \left(K\,(X, E_m, Y, E_m)\right)_1 \end{cases}$$

Lema 3.7.2 *$Ric\,(X,Y)$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si las funciones $(Ric\,(X,Y))_2$ y $(Ric\,(X,Y))_1 + \tau^{-1}(Ric\,(X,Y))_2$ se anulan sobre Σ.*

La expresión polinómica de la curvatura escalar $Sc := C\,(Ric) \in C^\infty(\mathbb{M})$ ([O'Ne]) la obtenemos de su expresión local en la referencia ortonormal adaptada $(\mathbb{U}, E)$

$$Sc = \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i Ric\,(E_i, E_i) + \tau^{-1} Ric\,(E_m, E_m) \tag{19}$$

Sustituyendo según la expresión (18), obtenemos

$$Sc = (Sc)_0 + \tau^{-1}(Sc)_1 + \tau^{-2}(Sc)_2 \tag{20}$$

donde

$$\begin{cases} (Sc)_0 := \sum_{i,j=1}^{m-1} \varepsilon_i \varepsilon_j \left(K\,(E_j, E_i, E_j, E_i)\right)_0 \\ (Sc)_1 := \sum_{i,j=1}^{m-1} \varepsilon_i \varepsilon_j \left(K\,(E_i, E_j, E_i, E_j)\right)_1 + m \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \left(K\,(E_i, E_m, E_i, E_m)\right)_0 \\ (Sc)_2 := 2 \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \left(K\,(E_i, E_m, E_i, E_m)\right)_1 \end{cases}$$

Nótese además que el término de la forma $\tau^{-3}(Sc)_3$ se anula, ya que $(Sc)_3 = (Ric\,(E_m, E_m))_2 = 0$. Es claro entonces el siguiente

Lema 3.7.3 *Sc se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si $(Sc)_2$ y $(Sc)_1 + \tau^{-1}(Sc)_2$ se anulan sobre Σ.*

Repasemos los resultados principales acerca de la extendibilidad de estos tensores ([Kos97],[Ag-La]). Primeramente debemos destacar que, si el tensor de curvatura covariante $K \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$ se extiende diferenciablemente a Σ (es decir, si para cualquiera $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, $K(X, Y, Z, T)$ se extiende diferenciablemente a Σ), entonces el radical necesariamente es trasverso. En efecto, si el radical es tangente en $p \in \Sigma$, podemos tomar una referencia ortonormal adaptada $(\mathbb{U}, E)$ en torno a p, tal que $E_1(p) \notin T_p\Sigma$. Pero entonces $II^{E_m}(E_m(p), E_m(p)) = 0$ y $II^{E_m}(E_1(p), E_m(p)) \neq 0$, y por el Lema 3.7.1, $K(E_1, E_m, E_1, E_m)$ no se extiende a Σ.

Este resultado, junto al siguiente, aparecieron por primera vez en [Kos97] (Tma.3).

Teorema 3.7.1 *Dado (M, g) un espacio singular trasverso, la curvatura covariante $K \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si el radical es trasverso y g es II-plana.*

En algunas demostraciones, como en la siguiente, por razones de simplicidad en la notación, dada una referencia $(\mathbb{U}, E)$ y un tensor $A \in \mathcal{I}_s^r$, convendremos en llamar

$$A_{a_1 \dots a_s}^{b_1 \dots b_r} := A\left(\omega^{b_1}, ..., \omega^{b_r}, E_{a_1}, ..., E_{a_s}\right)$$

donde $(\omega^1, ..., \omega^m)$ es la referencia dual de E.

Demostración

Si K se extiende diferenciablemente a Σ, acabamos de ver que el radical es trasverso. Tomando una referencia ortonormal completamente adaptada $(\mathbb{U}, E)$, se tiene que $II_{mm}^{E_m} \neq 0$ y $II_{mi}^{E_m} = 0$. Como K_{imim} se extiende, tenemos (Lema 3.7.1)

$$0 = II_{mm}^{E_m} II_{ii}^{E_m} - \left(II_{mi}^{E_m}\right)^2 = II_{mm}^{E_m} II_{ii}^{E_m}$$

luego $II_{ii}^{E_m} = 0$. Además, como K_{ijij} se extiende, deducimos

$$0 = II_{ii}^{E_m} II_{jj}^{E_m} - \left(II_{ij}^{E_m}\right)^2 = -\left(II_{ij}^{E_m}\right)^2$$

luego g es II-plana. Recíprocamente, si el radical es trasverso y g es II-plana, asumiendo que $(\mathbb{U}, E)$ es una referencia ortonormal completamente adaptada, tenemos que $II^{E_m}(X, E_i) = 0$ para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$, luego $\nabla_X E_i$ se extiende diferenciablemente a Σ (por la Proposición 3.3.1). Entonces $K(X, Y, E_i, T)$ se extiende diferenciablemente a Σ para cualquiera $X, Y, T \in \mathfrak{X}(M)$. Y esto es suficiente, pues usando las simetrías de K restaría probar el caso K_{mmmm}, que obviamente se extiende por ser nulo. ♣

Proposición 3.7.1 *Dado (M, g) un espacio singular trasverso, el tensor de Ricci $Ric \in S^2(\mathbb{M})$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si el radical es trasverso y g es III-plana. En este caso la curvatura escalar también se extiende a Σ.*

Demostración

Primero veamos que si el tensor de Ricci se extiende a Σ, el radical necesariamente es trasverso. En efecto, si el radical es tangente a Σ en algún $p \in \Sigma$, podemos encontrar una referencia ortonormal adaptada $(\mathbb{U}, E)$ en torno a p tal que E_1 y E_2 son trasversos a Σ en p, es decir $E_1(p)$,$E_2(p) \notin T_p\Sigma$. Como

$$\begin{aligned}(Ric\,(E_1, E_2))_2\,(p) &= (K\,(E_1, E_m, E_2, E_m))_1\,(p) \\ &= -II_p^{E_m(p)}\,(E_1\,(p)\,, E_m\,(p))\,II_p^{E_m(p)}\,(E_2\,(p)\,, E_m\,(p)) \neq 0\end{aligned}$$

el Lema 3.7.2 nos dice que $Ric\,(E_1, E_2)$ no se extiende a Σ.

A continuación veamos que, cuando además de ser el radical trasverso, la métrica g es II-plana, el tensor de Ricci se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si g es III-plana. En efecto, del Teorema 3.7.3 y de la expresión (17) se deduce que $Ric\,(X, Y)$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si la función $K\,(X, E_m, Y, E_m)$ se anula en la hipersuperficie Σ, para $(\mathbb{U}, E)$ una referencia ortonormal completamente adaptada. Por tanto $Ric\,(E_i, E_m)$ se extiende. Puesto que g es II-plana, se tiene

$$\begin{aligned}K_{imjm}|_\Sigma &= II^{E_m}\,(E_i, \nabla_{E_m} E_j) - II^{E_m}\,(E_m, \nabla_{E_i} E_j) - \\ &\quad -II^{E_m}\,([E_i, E_m]\,, E_j) = -II^{E_m}\,(E_m, \nabla_{E_i} E_j) \\ &= -III_{ij}^{E_m}\end{aligned} \tag{21}$$

luego Ric_{ij} se extiende si y sólo si $III_{ij}^{E_m} = 0$, de lo que se sigue nuestra afirmación.

Para terminar la demostración resta comprobar que, si el tensor de Ricci se extiende diferenciablemente a Σ (y el radical es trasverso), entonces g es II-plana. Para esto observamos que, del Lema 3.7.2,

$$0 = (Ric_{ij})_2\big|_\Sigma = (K_{imjm})_1\big|_\Sigma = -II_{ij}^{E_m} II_{mm}^{E_m}$$

y como el radical es trasverso debe ser $II_{ij}^{E_m} = 0$.

En cuanto a que la curvatura escalar también se extiende diferenciablemente a Σ basta tener en cuenta (20) y que

$$Ric_{mm}|_\Sigma = \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i\; K_{mimi}|_\Sigma = -\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i III_{ii}^{E_m} = 0$$

con lo que terminamos. ♣

El teorema siguiente, que apareció por vez primera en [Ag-La] (Tma. 5), aborda la cuestión de la extendibilidad de la curvatura covariante K de cuatro campos $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}\,(M)$, en el caso del radical tangente. Utilicemos la notación

$$\nu \wedge \rho\,(X, Y) = \det \begin{pmatrix} \nu\,(X) & \rho\,(X) \\ \nu\,(Y) & \rho\,(Y) \end{pmatrix}$$

Teorema 3.7.2 *Dado un espacio singular trasverso* (M, g) *con radical tangente,* g *es* II*-plana si y sólo si para cualquiera cuatro campos* $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ *tales que* $\nu \wedge \rho(X, Y) \cdot \nu \wedge \rho(Z, T) = 0$*, su curvatura covariante* $K(X, Y, Z, T)$ *se extiende diferenciablemente a* Σ*. Además, si* g *es* II*-plana y* $K(X, Y, Z, T)$ *se extiende diferenciablemente a* Σ*, entonces* $\nu \wedge \rho(X, Y) \cdot \nu \wedge \rho(Z, T) = 0$*.*

Demostración

El teorema se deduce fácilmente de los dos hechos siguientes. Si g es II-plana entonces

$$\det \begin{pmatrix} II(X, Z) & II(X, T) \\ II(Y, Z) & II(Y, T) \end{pmatrix} = -\nu \wedge \rho(X, Y) \cdot \nu \wedge \rho(Z, T)$$

de lo que se sigue (por el Lema 3.7.1) que $K(X, Y, Z, T)$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si $\nu \wedge \rho(X, Y) \cdot \nu \wedge \rho(Z, T) = 0$. Por último, si $V, W \in \Gamma(S)$ entonces $\nu \wedge \rho(N, V) \cdot \nu \wedge \rho(R, W) = 0$, luego resulta

$$0 = \det \begin{pmatrix} II(N, R) & II(N, W) \\ II(V, R) & II(V, W) \end{pmatrix} = -II(V, W)$$

por tanto, g es II-plana. ♣

Para finalizar la sección enunciamos la Proposición 7 de [Ag-La], que trata la cuestión de la extendibilidad del tensor de Ricci, en el caso del radical tangente.

Proposición 3.7.2 *Sea* (M, g) *un espacio singular trasverso con radical tangente, y* $\mathcal{N}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{R} \in \mathfrak{X}(M)$ *extensiones arbitrarias de los campos normal principal* $N \in \mathfrak{X}_\Sigma$*,* $V, W \in \Gamma(S)$ *y radical principal* $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*. Entonces*

1)*$Ric(\mathcal{V}, \mathcal{R})$ se extiende a Σ, pero ni $Ric(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ ni $Ric(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ lo hacen.*
2)*Si $[V, R] \in \Gamma(S)$ entonces $Ric(\mathcal{N}, \mathbf{V})$ se extiende a Σ.*
3)*Sea g II-plana. Entonces $Ric(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ se extiende a Σ. Además $Ric(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ se extiende a Σ si y sólo si $\mathcal{H}(V, W) = 0$; en particular, si g es III-plana entonces siempre $Ric(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ se extiende a Σ.*

Aquí $\mathbf{V}$ y $\mathbf{R}$ denotan las extensiones canónicas de V y R.

Corolario 3.7.1 *En un espacio singular trasverso con radical tangente, la curvatura escalar* Sc *no se extiende diferenciablemente a la hipersuperficie singular* Σ*.*

En efecto, si consideramos una referencia $(\mathbb{U}, E)$ completamente adaptada, con $E_1|_\Sigma = N$, entonces Ric_{11} no se extiende a Σ, y por tanto Sc tampoco.

3.8 Ejemplos coordenados

En esta sección estudiamos dos ejemplos de espacios singulares trasversos, el primero trata el caso del radical trasverso, y el segundo el del radical tangente. Los ejemplos se obtienen a partir de sistemas de coordenadas completamente adaptados, por lo que podemos decir que estos *son todos los ejemplos locales* cuando el radical mantiene su carácter. A cada ejemplo le precede el resultado teórico de existencia de sistemas de coordenadas completamente adaptados que permite su definición. El primero de los resultados se debe a [Kos94] (Lema 3), y es consecuencia del Teorema (3.5.2) de existencia y unicidad de líneas semigeodésicas. El segundo se debe a [Ag-La] (Rem. 3), y es consecuencia de la Proposición 3.6.4.

Sea (M, g) un espacio singular trasverso, con radical trasverso. En virtud del Teorema 3.5.2 podemos afirmar que, dado un vector radical $\xi \in Rad_p(M)$ trasverso a Σ, existirá una única línea semigeodésica maximal C_p cuyo tangente en p está generado por ξ. Por tanto, dado $R \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ un campo radical, existe una única familia de semigeodésicas trasversas a Σ tales que, en cada punto singular $p \in \Sigma$, la recta tangente está generada por $R_p \in Rad_p(M)$. Esta familia nos permite definir sistemas de coordenadas (de clase C^1) completamente adaptados.

Proposición 3.8.1 *Sea (M, g) un espacio singular trasverso, con radical trasverso. Entonces, en torno a cada punto singular $p \in \Sigma$ existe un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$, con x^m al menos de clase C^1, completamente adaptado, y tal que las líneas coordenadas $x^1 = cte, ..., x^{m-1} = cte$ son semigeodésicas. La métrica en estas coordenadas se expresa*

$$g = \sum_{i,j=1}^{m-1} g_{ij} dx^i \circ dx^j + \tau dx^m \circ dx^m$$

donde $\tau = g_{mm}$.

Demostración ([Kos94], Lema 3)

Para encontrarlo se toma primero $(\mathbb{V}, (y^1, ..., y^{m-1}))$ un sistema de coordenadas en Σ, y un entorno abierto $\mathbb{U}$ en M tal que para cada $q \in \mathbb{U}$ existe una única línea semigeodésica maximal C_p (ver Tma. 3.5.2), con $p \in \mathbb{V}$, tal que $q \in C_p$. Puede demostrarse ([Kos94]) que cada línea semigeodésica C_p admite una parametrización de clase C^1, $\gamma_p : I_p \to C_p$ tal que $\gamma_p(0) = p$ y $g\left(\gamma'_p(t), \gamma'_p(t)\right) = t$. Definimos $x^i(q) = y^i(p)$, $x^m(q) = t$ el único número real tal que $\gamma_p(t) = q$. Obviamente $\frac{\partial}{\partial x^m} \circ \gamma_p = \gamma'_p$, luego $\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p \in Rad_p(M)$. Resulta además (ver detalles en [Kos94]) que $g_{im} = 0$, luego las coordenadas $(\mathbb{U}, (x^1, ..., x^m))$ están completamente adaptadas. ♣

Aunque este teorema únicamente garantiza clase C^1 para la coordenada x^m, no impide que pueda ser de clase C^p, para $p > 1$, en ejemplos concretos, como el que vemos a continuación.

Ejemplo 3.8.1 *Dotamos a $M = \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ de la métrica*

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} (g_{ij}) & \\ & x^m \end{pmatrix}$$

donde (g_{ij}) es una matriz de rango constante máximo $m-1$, con $g_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Es fácil ver $(\mathbb{R}^m, g)$ es un espacio singular, con hipersuperficie de cambio de signatura

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^m : x^m = 0\}$$

y parte semi-riemanniana $\mathbb{M} = \mathbb{M}^+ \cup \mathbb{M}^-$, donde $(\varepsilon = +, -)$

$$\mathbb{M}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m : \varepsilon x^m > 0\}$$

En cada punto singular $p \in \Sigma$ el radical es trasverso, ya que

$$Rad_p(\mathbb{R}^m) = Span\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p \right)$$

De hecho, las coordenadas cartesianas $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})$ son completamente adaptadas. Calculamos los símbolos de Christoffel en estas coordenadas:

$$\begin{cases} \Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} \\ \Gamma_{mij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \\ \Gamma_{mmj} = 0 \\ \Gamma_{mmm} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones de las $\square$-geodésicas (4) se convierte en

$$\begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d^2\gamma^j}{dt^2} g_{jk} + \sum_{i=1}^m \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\Gamma_{kij} \right\} + \frac{d\gamma^m}{dt}\sum_{j=1}^m \frac{d\gamma^j}{dt}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \\ 0 = \gamma^m \frac{d^2\gamma^m}{dt^2} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m-1} \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma^m}{dt}\right)^2 \end{cases} \tag{22}$$

(recordemos que denotamos igual $g_{bc} = g_{bc} \circ \gamma$, $\Gamma_{cab} = \Gamma_{cab} \circ \gamma$). Las componentes de la aplicación $II^{\frac{\partial}{\partial x^m}}$ en las coordenadas cartesianas son

$$\begin{cases} II_{ij} = \Gamma_{mij}|_\Sigma = -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right|_\Sigma \\ II_{mj} = 0 \\ II_{mm} = \Gamma_{mmm}|_\Sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, g es II-plana si y sólo si $\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right|_{\Sigma} = 0$, es decir (Prop. 3.1.1), si existen unas funciones $f_{ij} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ tales que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = x^m f_{ij}$. Puede verse, estudiando la ecuación diferencial $y' = xk(x)$, que esto es equivalente a

$$g_{ij} = x^m \frac{\partial k_{ij}}{\partial x^m} - k_{ij}$$

con $k_{ij} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$.

Cuando g es II-plana, la Proposición 3.6.2 nos dice que no existen $\square$-geodésicas trasversas a la hipersuperficie de cambio Σ. Ahora podemos verlo de otra forma pues, si $\gamma : I \to M$ es una curva regular trasversa a Σ por $\gamma(0) \in \Sigma$, entonces $\gamma^m \in C^{\infty}(I)$ verifica $\gamma^m(0) = 0$ y $\frac{d\gamma^m}{dt}(0) \neq 0$, luego no satisface la última ecuación del sistema (22) para $t = 0$ (teniendo en cuenta que $\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right|_{\Sigma} = 0$):

$$\gamma^m(0) \frac{d^2\gamma^m}{dt^2}(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma^m}{dt}(0)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma^m}{dt}(0)\right)^2 \neq 0$$

y por tanto γ no es $\square$-geodésica.

En cualquier caso, el Teorema 3.5.2 nos dice que, por ser el radical trasverso, existen siempre líneas semigeodésicas que atraviesan Σ con dirección radical. Veámoslo con un ejemplo sencillo. Supongamos que las funciones g_{ij} son constantes (con lo que g es II-plana). Entonces el sistema (22) se escribe

$$\begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^{m} \frac{d^2\gamma^j}{dt^2} g_{jk} \\ 0 = \gamma^m \frac{d^2\gamma^m}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma^m}{dt}\right)^2 \end{cases} \tag{23}$$

Las primeras $m-1$ ecuaciones nos dicen que las $\frac{d^2\gamma^j}{dt^2}$ deben ser nulas (por ser (g_{jk}) invertible), es decir $\frac{d\gamma^j}{dt} = a_j \in \mathbb{R}$. Definimos, para cada $a = (a_1, ..., a_m)$, con $a_m \neq 0$, y cada $\varepsilon = \pm 1$, la curva regular $\gamma_a : (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \to \mathbb{M}^{\varepsilon}$ por

$$\gamma_a(t) = \left(a_1 t + p_1, ..., a_{m-1} t + p_{m-1}, \varepsilon \left(\frac{3}{2} a_m t\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Esta curva verifica el sistema (23), por lo que es $\square$-geodésica (en $\mathbb{M}^{\varepsilon}$). Además

$$\lim_{t \to 0} \gamma_a(t) = (p_1, ..., p_{m-1}, 0) \in \Sigma$$

por lo que podemos extenderla con continuidad a una curva $\gamma_a : (-\delta, \delta) \to \mathbb{M}^{\varepsilon} \cup \Sigma$. Sin embargo, es claro que no existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{d\gamma_a^m}{dt}(t) = \varepsilon a_m \lim_{t \to 0} \left(\frac{3}{2} a_m t\right)^{-\frac{1}{3}}$$

por lo la curva no admite una extensión diferenciable.

Las curvas γ_a que acabamos de definir están contenidas en una única componente conexa $\mathbb{M}^\varepsilon$ de la parte semi-riemanniana $\mathbb{M}$, por lo que no atraviesan Σ. No obstante, podemos concatenar con continuidad dos trozos de estas curvas para conseguir curvas continuas que atraviesan Σ, tomando $\alpha_a : (-\delta, \delta) \to M$ definida por

$$\alpha_a(t) = \begin{cases} \left(a_1 t + p_1, ..., a_{m-1} t + p_{m-1}, -\left(\frac{3}{2} a_m t\right)^{\frac{2}{3}}\right) & \text{si } t \leqslant 0 \\ \left(a_1 t + p_1, ..., a_{m-1} t + p_{m-1}, \left(\frac{3}{2} a_m t\right)^{\frac{2}{3}}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Nótese que las direcciones tangentes de cada α_a convergen a $Rad_p(M)$ cuando t tiende a 0, por lo que la trayectoria $C_p^a = \alpha_a((-\delta, \delta))$ es una subvariedad de clase C^1 que atraviesa Σ, tal que $C_p^a - \{p\}$ es una línea $\Box$-geodésica. Este hecho no contradice la unicidad de las líneas semigeodésicas (ver Tma. 3.5.2), ya que entre todas estas trayectorias que atraviesan Σ en la dirección radical, sólo hay una que es línea semigeodésica, es decir, sólo hay una trayectoria que admite una parametrización al menos de clase C^2 (de hecho en este ejemplo, es de clase C^∞), a saber, la línea C_p^a para $a = (0, ..., 0, a_m)$, es decir:

$$C_p^a = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x^1 = p_1, ..., x^{m-1} = p_{m-1}\right\}$$

A continuación pasamos a considerar el caso del radical tangente.

Proposición 3.8.2 *Sea (M, g) un espacio singular trasverso con radical tangente. Entonces, en torno a cada punto singular, existe un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ completamente adaptado tal que $\frac{\partial}{\partial x^1} = \mathbf{N}$, $\frac{\partial}{\partial x^m} = \mathbf{R}$ son las extensiones canónicas de los campos principales, $x^1 = 0$ es una ecuación de Σ, y la métrica se escribe*

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (g_{\lambda\mu}) & x^1 g_\lambda \\ & (x^1 g_\lambda)^T & x^1 g_m \end{pmatrix}$$

donde λ, μ recorren $\{2, ..., m-1\}$, $(g_{\lambda\mu})$ es una matriz de rango constante $m-2$, $g_{\lambda\mu}, g_\lambda, g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y $g_m(0, x^2, ..., x^m) = 2$.

Demostración ([Ag-La], Remark 3)

La construcción del sistema consiste en tomar primero $(\mathbb{V}, (y^2, ..., y^m))$ unas coordenadas de Σ tales que $\frac{\partial}{\partial y^m} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ sea radical, y usar el flujo del campo $\mathbf{N}$ para definir las coordenadas $(\mathbb{U}, (x^1, ..., x^m))$ tales que $\frac{\partial}{\partial x^a}$ son extensiones canónicas. Claramente, $x^1 = 0$ es una ecuación de Σ. Por (15), $g_{1j} = 0$ $(j = 2, ..., m)$, y como $g_{im}|_\Sigma = 0$ existen $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tales que $g_{im} = x^1 g_i$ $(i =$

$2, ..., m)$. Finalmente, como $\tau = g_{mm} = x^1 g_m$, entonces

$$\begin{aligned} g_m|_\Sigma &= \left.\frac{\partial g_{mm}}{\partial x^1}\right|_\Sigma = N(\tau) = 2\square_N R(R) \\ &= -2\mathcal{H}(R,R) = 2 \end{aligned}$$

con lo que terminamos. ♣

En contraste con el caso del radical trasverso (Prop. 3.8.1), el sistema de coordenadas completamente adaptado que encontramos es diferenciable (es decir, de clase C^∞).

Ejemplo 3.8.2 *En la misma variedad diferenciable $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 3$) definimos la métrica como en la Proposición 3.8.2:*

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (g_{\lambda\mu}) & x^1 g_\lambda \\ & (x^1 g_\lambda)^T & x^1 g_m \end{pmatrix}$$

donde λ, μ recorren $\{2, ..., m-1\}$, $(g_{\lambda\mu})$ es una matriz de rango constante $m-2$, $g_{\lambda\mu}, g_\lambda, g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y $g_m(0, x^2, ..., x^m) = 2$.

El espacio $(\mathbb{R}^m, g)$ no es, en general, un espacio singular trasverso, a menos que exijamos cierta condición sobre las funciones $g_{\lambda\mu}, g_\lambda, g_m$. Para verlo, hemos de calcular $\det(g_{ab})$. Si definimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (g^{\lambda\mu}) & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det[A \cdot (g_{ab})] = \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & I_{m-2} & B \\ & (x^1 g_\lambda)^T & x^1 g_m \end{pmatrix}$$

donde

$$B = (g^{\lambda\mu})(x^1 g_\lambda)$$

Desarrollando el determinante $\det[A \cdot (g_{ab})]$ por adjuntos en la última columna (y teniendo en cuenta que $\det A = \det(g^{\lambda\mu})$), obtenemos

$$\begin{aligned} \det(g^{\lambda\mu}) \det(g_{ab}) &= x^1 g_m + (x^1 g_\lambda)^T (g^{\lambda\mu})(x^1 g_\lambda) \\ &= x^1 \left\{ g_m + x^1 (g_\lambda)^T (g^{\lambda\mu})(g_\lambda) \right\} \end{aligned}$$

Despejando $\det(g_{ab})$ tenemos la expresión que necesitamos

$$\det(g_{ab}) = x^1 \det(g_{\lambda\mu}) \left\{ g_m + x^1 (g_\lambda)^T \left(g^{\lambda\mu}\right)(g_\lambda) \right\} \tag{24}$$

No hay ninguna razón, a priori, que nos diga que la función

$$f := g_m + x^1 (g_\lambda)^T \left(g^{\lambda\mu}\right)(g_\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$$

nunca se anula en $\mathbb{R}^m$, puesto que tenemos total libertad de elección de las funciones g_λ. Tomamos el abierto $\mathbb{U} := \mathbb{R}^m - f^{-1}(0)$, entonces, como $f|_{x^1=0} = 2 \neq 0$, el hiperplano $x^1 = 0$ está contenido en $\mathbb{U}$. Por tanto, la fórmula (24) nos dice que $(\mathbb{U}, g_\mathbb{U})$ es un espacio singular, cuyo conjunto de puntos singulares es el hiperplano

$$\Sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x^1 = 0 \right\}$$

Un pequeño cálculo muestra que, si $p \in \Sigma$, se verifica $d_p(\det(g_{ab})) \neq 0$, por lo que g es trasversa en los puntos singulares Σ, y así, $(\mathbb{U}, g_\mathbb{U})$ es un espacio singular trasverso.

En cada punto $p \in \Sigma$ el radical es tangente, ya que

$$Rad_p(\mathbb{R}^m) = Span\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p \right)$$

Los símbolos de Christoffel de primera especie resultan ser

$$\begin{cases} \Gamma_{111} = \Gamma_{11b} = 0 & \Gamma_{\eta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial g_{\mu\eta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\eta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\eta} \right\} \\ \Gamma_{1\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^1} & \Gamma_{m\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left\{ x^1\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_\mu}{\partial x^\lambda} \right) - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^m} \right\} \\ \Gamma_{1\lambda m} = -\frac{1}{2}\left\{ g_\lambda + x^1 \frac{\partial g_\lambda}{\partial x^1} \right\} & \Gamma_{m\lambda m} = \frac{1}{2}x^1 \frac{\partial g_\lambda}{\partial x^m} \\ \Gamma_{1mm} = -\frac{1}{2}\left\{ g_m + x^1 \frac{\partial g_m}{\partial x^1} \right\} & \Gamma_{mmm} = \frac{1}{2}x^1 \frac{\partial g_m}{\partial x^m} \end{cases}$$

Es fácil ver que las curvas coordenadas $\gamma(t) = (t, p_2, ..., p_m)$ verifican el sistema de ecuaciones diferenciales de las $\Box$-geodésicas (4), por lo que las líneas coordenadas $x^2 = cte$,..., $x^m = cte$ son $\Box$-geodésicas. Entonces $\frac{\partial}{\partial x^1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ es la extensión canónica del campo normal principal de Σ, es decir $\frac{\partial}{\partial x^1} = \mathbf{N}$, y además los campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ también son extensiones canónicas de campos de Σ.

En estas coordenadas, la aplicación $II^{\frac{\partial}{\partial x^m}}$ tiene por coeficientes

$$\begin{cases} II_{11} = 0 & II_{\lambda\mu} = \Gamma_{m\lambda\mu}|_\Sigma = -\frac{1}{2} \left.\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^m}\right|_\Sigma \\ II_{1\mu} = \Gamma_{m1\mu}|_\Sigma = -\frac{1}{2}\, g_\mu|_\Sigma & II_{\lambda m} = 0 \\ II_{1m} = \Gamma_{m1m}|_\Sigma = -\frac{1}{2}\, g_m|_\Sigma & II_{mm} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

mientras que los coeficientes de la aplicación $\mathcal{H}$ son

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\lambda\mu} = \Gamma_{1\lambda\mu}|_\Sigma = -\frac{1}{2} \left.\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^1}\right|_\Sigma \\ \mathcal{H}_{\lambda m} = \Gamma_{1\lambda\mu}|_\Sigma = -\frac{1}{2}\, g_\lambda|_\Sigma \\ \mathcal{H}_{mm} = \Gamma_{1\lambda\mu}|_\Sigma = -\frac{1}{2}\, g_m|_\Sigma = -1 \end{cases} \tag{26}$$

Como $\mathcal{H}_{mm} = -1$, deducimos que $\frac{\partial}{\partial x^m} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ es la extensión canónica del campo radical principal de Σ, es decir $\frac{\partial}{\partial x^m} = \mathbf{R}$, y por tanto las coordenadas cartesianas $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})$ son completamente adaptadas.

Teniendo en cuenta (25), es claro que g es II-plana si y sólo si $\left.\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^m}\right|_\Sigma = 0$, es decir $\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^m} = x^1 f_{\lambda\mu}$ con $f_{\lambda\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, lo que equivale a que

$$g_{\lambda\mu} = x^1 k_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu}$$

para algunas $k_{\lambda\mu}, c_{\lambda\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, con $\left.\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial x^m}\right|_\Sigma = 0$. Teniendo en cuenta ahora (26), es claro que g es $\mathcal{H}$-plana si y sólo si $\left.\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^1}\right|_\Sigma = 0$, es decir $\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^1} = x^1 f_{\lambda\mu}$, con $f_{\lambda\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, que equivale a que

$$g_{\lambda\mu} = x^1 \frac{\partial d_{\lambda\mu}}{\partial x^1} - d_{\lambda\mu}$$

para alguna $d_{\lambda\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Cuando la pantalla canónica S es una distribución *integrable* ([Bi]) es posible encontrar sistemas de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (y^1, ..., y^m))$ completamente adaptados como en la Prop. 3.8.2, en los que las subvariedades $y^1 = 0$, $y^m = cte$ son integrales de S. En este caso, las $\mathcal{H}_{\lambda m}$ son nulas, luego de (26) y la Prop. 3.1.1, $g_\lambda = x^1 h_\lambda$, con $h_\lambda \in C^\infty(M)$. Recíprocamente, si existen sistemas de coordenadas completamente adaptados $(\mathbb{U}, \varphi = (y^1, ..., y^m))$ como en la Prop. 3.8.2, en los que $g_\lambda = x^1 h_\lambda$, entonces la pantalla canónica S es integrable, y las subvariedades $y^1 = 0$, $y^m = cte$ son integrales de S.

4 Espacios conformes singulares trasversos

Existen diversas formas de definir una estructura conforme en una variedad semi-riemanniana (ver por ejemplo [Ku88]). En este trabajo, dada una variedad semi-riemanniana (M, g), entenderemos que una *estructura conforme semi-riemanniana asociada a g* es una clase de métricas semi-riemannianas *conformemente equivalentes* a g, es decir

$$\mathcal{C} = \left\{e^{2f} g : f \in C^{\infty}(M)\right\}$$

Decimos que $(M, \mathcal{C})$ es una *variedad conforme semi-riemanniana*, y que f es la *función de escala* entre g y $\overline{g} = e^{2f} g$. Nuestro objetivo en esta sección es establecer una construcción análoga para espacios singulares trasversos.

4.1 Estructuras conformes degeneradas. Espacios conformes singulares. Fórmulas de transformación.

Tomemos un espacio singular (M, g) y llamemos $\mathcal{C}$ a la clase de métricas conformemente equivalentes a g, es decir

$$\mathcal{C} = \left\{e^{2f} g : f \in C^{\infty}(M)\right\}$$

Es claro que todas las métricas de $\mathcal{C}$ son degeneradas, y que el conjunto de puntos singulares de M es independiente de la métrica de $\mathcal{C}$. En efecto, consideremos la métrica $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$. Así $(M, \overline{g})$ es también un espacio singular y

$$\overline{\Sigma} = \{p \in M : \overline{g}_p = e^{2f(p)} g_p \text{ es degenerada}\} = \Sigma$$

Además, en cada punto singular $p \in \Sigma$, coinciden los subespacios radicales

$$\overline{Rad}_p(M) = \left\{x \in T_pM : e^{2f(p)} g_p(x, y) = 0 \ \forall y \in T_pM\right\} = Rad_p(M)$$

Definición 4.1.1 *Decimos que $(M, \mathcal{C})$ es un espacio conforme singular si alguna (y por tanto toda) $g \in \mathcal{C}$ es degenerada.*

Podemos hablar, por tanto, del *conjunto de puntos singulares* Σ de un espacio conforme singular $(M, \mathcal{C})$, así como del *radical $Rad(M)$ de $(M, \mathcal{C})$*, y (siempre que $\mathbb{M} \neq \emptyset$) de la *parte conforme semi-riemanniana $(\mathbb{M}, \mathcal{C}_{\mathbb{M}})$ de $(M, \mathcal{C})$*.

Dado $(M, \mathcal{C})$ un espacio conforme singular, cada $g \in \mathcal{C}$ proporciona una conexión dual asociada $\Box$. Si dos métricas $g, \overline{g} \in \mathcal{C}$ se relacionan por $\overline{g} = e^{2f} g$, las conexiones duales asociadas $\Box, \overline{\Box}$ se relacionan, usando la fórmula de Koszul, por

$$\overline{\Box}_X Y(Z) = e^{2f} \left\{\Box_X Y(Z) + L_g^f(X, Y, Z)\right\} \tag{27}$$

donde $L_g^f : \mathfrak{X}(M)^3 \to C^{\infty}(M)$ es el tensor definido por

$$L_g^f(X, Y, Z) := (Xf)\, g(Y, Z) + (Yf)\, g(Z, X) - (Zf)\, g(X, Y) \tag{28}$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Obsérvese que en la variedad conforme semi-riemanniana $(\mathbb{M}, \mathcal{C}_{\mathbb{M}})$, se verifica

$$L_g^f (X, Y, Z) = g \left(\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z \right)$$

Usando la fórmula (27) deducimos fácilmente la relación entre los símbolos de Christoffel de g y $\overline{g}$ en las coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$

$$\overline{\Gamma}_{cab} = e^{2f} g \left\{ \Gamma_{cab} + \frac{\partial f}{\partial x^a} g_{bc} + \frac{\partial f}{\partial x^b} g_{ac} - \frac{\partial f}{\partial x^c} g_{ab} \right\}$$

y la relación entre las aplicaciones $\overline{II}_p^\xi$ y II_p^ξ para $p \in \Sigma$ y $\xi \in Rad_p (M) - \{0\}$

$$\overline{II}_p^\xi = e^{2f(p)} \left\{ II_p^\xi - \xi f \cdot g_p \right\} \tag{29}$$

Finalmente, dada la curva regular $\gamma : I \to M$, las derivadas covariantes duales $\frac{\overline{\square}}{dt}$ y $\frac{\square}{dt}$ a lo largo de γ se relacionan por la fórmula (usando la Prop. 2.3.1 y (27))

$$\frac{\overline{\square} V}{dt} = e^{2(f \circ \gamma)} \left\{ \frac{\square V}{dt} + L_g^f (\gamma', V, \cdot) \right\} \tag{30}$$

para $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

4.2 Estructuras conformes trasversas

Sea $(M, \mathcal{C})$ un espacio conforme singular, y $g \in \mathcal{C}$. Supongamos que g es trasversa en Σ. Veamos que esta trasversalidad es independiente de la métrica elegida en $\mathcal{C}$, es decir,que si $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ es una métrica conformemene equivalente a g, entonces $\overline{g}$ también es trasversa en Σ.

Tomemos unas coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi)$ en torno a un punto singular $p \in \Sigma$. Como $\overline{G}_\varphi = \det (\overline{g}_{ab}^\varphi) = e^{2mf} G_\varphi$ y $G_\varphi (p) = 0$ tenemos

$$d_p \overline{G}_\varphi = e^{2mf(p)} d_p G_\varphi$$

de lo que deducimos que $\overline{g}$ es trasversa en p si y sólo si g lo es.

Definición 4.2.1 *Decimos que $(M, \mathcal{C})$ es un espacio conforme singular trasverso (con cambio trasversal de signatura a través de Σ) si (M, g) es un espacio singular trasverso (con Σ su hipersuperficie de cambio), para alguna (y por tanto para toda) $g \in \mathcal{C}$.*

Otra forma de probar que la trasversalidad en $\mathcal{C}$ es independiente de la métrica $g \in \mathcal{C}$, se obtiene usando la Proposición 3.1.2 y la relación (29). Si tomamos $\xi \in Rad_p (M) - \{0\}$, entonces, por (29), para cualquier $x \in T_p M$

$$\overline{II}_p^\xi (x, \xi) = e^{2f(p)} \left\{ II_p^\xi (x, \xi) - \xi f \cdot g (x, \xi) \right\} = e^{2f(p)} II_p^\xi (x, \xi)$$

con lo que, por la Proposición 3.1.2, $\overline{g}$ es trasversa en p si y sólo si g lo es.

4.3 Extendibilidad del paralelismo de Fermi-Walker

Como puede consultarse en [Sa], una estructura conforme riemanniana $\mathcal{C}$ define una conexión a lo largo de curvas regulares $\frac{D^\gamma}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$, caracterizada por coincidir localmente con la derivada covariante de Levi-Civita $\frac{\nabla}{dt}$ (a lo largo de γ) asociada a alguna métrica riemanniana $g \in \mathcal{C}$ que tiene a γ por geodésica. Esta conexión se conoce por *conexión de Fermi-Walker* a lo largo de la curva γ. Los dos hechos que posibilitan esta definición son los siguientes (ver [Sa]). Primero, dado $t \in I$ existe $\varepsilon > 0$ y $g \in \mathcal{C}$ tales que $\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}$ es g-geodésica, y segundo, si $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$ son dos métricas que tienen a la curva γ por geodésica, entonces sus derivadas covariantes a lo largo de γ coinciden.

Si la estructura conforme es semi-riemanniana, es posible definir también la conexión de Fermi-Walker a lo largo de curvas regulares γ que nunca son luz, esto es, tales que $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \neq 0$, para todo $t \in I$ (es claro que esta condición es conforme).

En un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$ existe, por tanto, la conexión de Fermi-Walker a lo largo de curvas regulares nunca luz $\gamma : I \to \mathbb{M}$ contenidas en la parte conforme semi-riemanniana $(\mathbb{M}, \mathcal{C}_{\mathbb{M}})$. Diremos que un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es *Fermi-Walker paralelo* a lo largo de γ si $\frac{D^\gamma V}{dt} = 0$. El trasporte paralelo inducido por la conexión de Fermi-Walker se conoce por *paralelismo de Fermi-Walker*.

El objetivo de esta sección es estudiar la extendibilidad del paralelismo de Fermi-Walker a lo largo de curvas regulares $\gamma : I \to M$ trasversas a la hipersuperficie de cambio de signatura Σ (por $p = \gamma(0)$), y que nunca son luz, ni radicales al atravesar Σ. Más concretamente, dado $v \in T_{\gamma(0)}M$, se pretende estudiar en qué condiciones existe un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, Fermi-Walker paralelo en $\mathbb{M}$, con $V(0) = v$.

Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular en un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$. Supongamos además que $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \neq 0$, para todo $t \in I$, $g \in \mathcal{C}$, es decir γ nunca es luz, ni radical en el caso que interseque a Σ.

Tomemos dos métricas g y $\overline{g}$ en la clase $\mathcal{C}$, relacionadas por $\overline{g} = e^{2f} g$, con $f \in C^\infty(M)$. Entonces, usando (30) para $V = \gamma'$, se obtiene:

$$\frac{\overline{\Box}\gamma'}{dt} = e^{2f\circ\gamma} \left\{ \frac{\Box\gamma'}{dt} + L_g^f(\gamma', \gamma', \cdot) \right\} \tag{31}$$

lo que conduce al siguiente

Lema 4.3.1 *γ es $\overline{\Box}$-geodésica si y sólo si*

$$\frac{\Box\gamma'}{dt} = \frac{2}{g(\gamma', \gamma')} \frac{\Box\gamma'}{dt}(\gamma')\, g(\gamma', \cdot) + g(\gamma', \gamma')\, df|_\gamma \tag{32}$$

Demostración:
De (31) se deduce que γ es $\overline{\Box}$-geodésica si y sólo si

$$\frac{\Box\gamma'}{dt} = -\left\{ 2\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} g(\gamma', \cdot) - g(\gamma', \gamma')\, df|_\gamma \right\} \tag{33}$$

Evaluando en γ' vemos que

$$\frac{\Box\gamma'}{dt}(\gamma') = -\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}g(\gamma',\gamma')$$

Basta sustituir esta expresión en (33) para obtener (32). ♣

Lema 4.3.2 *Sea $\alpha \in \mathfrak{X}^*(\gamma)$ una 1-forma a lo largo de una curva regular $\gamma : I \to M$ en una variedad diferenciable M. Entonces, para cada $t_0 \in I$ existe una función diferenciable $f \in C^\infty(\mathbb{U}_0)$ en un entorno abierto $\mathbb{U}_0$ de $\gamma(t_0)$ en M, tal que*

$$df|_{\gamma(t)} = \alpha_t, \text{ para todo } t \in I \text{ tal que } \gamma(t) \in \mathbb{U}_0$$

Demostración:

Tomemos un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}_0, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ en torno a $\gamma(t_0)$ tal que $\varphi\circ\gamma(t) = (t, 0, ..., 0)$. En estas coordenadas, la forma α puede expresarse

$$\alpha = \sum_{a=1}^{m} \alpha_a \, dx^a|_\gamma$$

donde $\alpha_a \in C^\infty(I)$. Elijamos $f_1 \in C^\infty(I)$ una primitiva de α_1, es decir $\alpha_1 = f_1'$. Definimos la función $f \in C^\infty(\mathbb{U}_0)$ tal que

$$f\left(x^1, ..., x^m\right) = f_1\left(x^1\right) + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i\left(x^1\right) x^i$$

Entonces

$$df = \left(\sum_{i=2}^{m} \alpha_i'\left(x^1\right) x^i\right) dx^1 + \sum_{a=1}^{m} \alpha_a\left(x^1\right) dx^a$$

que al restringir a la curva γ nos da $df|_{\gamma(t)} = \alpha_t$. ♣

Proposición 4.3.1 *Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular del espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, nunca luz ni radical. Para cada $t_0 \in I$ existen $\varepsilon > 0$ y una métrica $g \in \mathcal{C}$ tales que la restricción $\gamma|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)}$ es $\Box$-geodésica, es decir*

$$\left.\frac{\Box\gamma'}{dt}\right|_t = 0, \text{ para todo } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

Demostración:

Partimos de una métrica $g = \langle\cdot,\cdot\rangle \in \mathcal{C}$, y tomamos $\alpha \in \mathfrak{X}^*(\gamma)$ definida por

$$\alpha = -\frac{2}{g(\gamma',\gamma')^2}\frac{\Box\gamma'}{dt}(\gamma')\, g(\gamma',\cdot) + \frac{1}{g(\gamma',\gamma')}\frac{\Box\gamma'}{dt}$$

Por el Lema 4.3.2, para cada $t_0 \in I$ existe un entorno abierto $\mathbb{U}_0$ de $\gamma(t_0)$ en M, y una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{U}_0)$, tal que

$$df|_{\gamma(t)} = \alpha_t, \text{ para todo } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

donde $\varepsilon > 0$ verifica $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) = \gamma(I) \cap \mathbb{U}_0$. Por el Lema 4.3.1, tomando la métrica conforme $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ deducimos que γ es $\overline{\square}$-geodésica en $\mathbb{U}_0$. ♣

Observación 4.3.1 *Como acabamos de ver, en torno a cada punto de cualquier curva regular, nunca luz ni radical, es posible encontrar una métrica de la estructura conforme que tenga a la curva inicial por $\square$-geodésica. Sin embargo, en contraste con las derivadas covariantes en el caso semi-riemanniano (ver [Sa]), las derivadas covariantes duales asociadas a dos métricas que tienen a γ por $\square$-geodésica no coinciden necesariamente, por lo que no es posible a priori una definición conforme de una conexión dual de Fermi-Walker. En efecto, si $g, \overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ son tales que $\frac{\overline{\square}\gamma'}{dt} = 0 = \frac{\square\gamma'}{dt}$, usando el Lema 4.3.1 y el hecho de que $g(\gamma', \gamma') \neq 0$, se deduce que $df|_{\gamma} = 0$, es decir la función de escala f es constante a lo largo de la curva γ. Entonces la fórmula (30) queda*

$$\frac{\overline{\square}V}{dt} = e^{2C} \frac{\square V}{dt} \tag{34}$$

No obstante, podemos definir la buscada conexión dual de Fermi-Walker exigiendo que coincida con la conexión dual de una métrica $g \in \mathcal{C}$ que tenga a γ por $\square$-geodésica g-unitaria, ya que, si $g, \overline{g}$ son dos tales métricas, se tendría

$$1 = \overline{g}(\gamma', \gamma') = e^{2C} g(\gamma', \gamma') = e^{2C}$$

y sustituyendo en (34)

$$\frac{\overline{\square}V}{dt} = \frac{\square V}{dt}$$

Sea $v \in T_p\Sigma$, con $p \in \Sigma$. Para formular con precisión en qué condiciones existe un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, Fermi-Walker paralelo en $\mathbb{M}$ y con $V(0) = v$, resulta muy conveniente introducir la 1-forma $F^{\xi}_{\gamma'(0)} \in T^*_p\Sigma$ que se define a continuación.

Dados $w \in T_pM$ con $\langle w, w \rangle \neq 0$, y $\xi \in Rad_p(M) - \{0\}$, $p \in \Sigma$, definimos una forma lineal $F^{\xi}_w : T_pM \to \mathbb{R}$

$$F^{\xi}_w(x) := \frac{1}{g(w,w)^2} \det \begin{pmatrix} II^{\xi}_p(w,w) & g(w,w) \\ II^{\xi}_p(w,x) & g(w,x) \end{pmatrix} \tag{35}$$

Proposición 4.3.2 *La forma F^{ξ}_w definida en (35) es un invariante conforme de $(M, \mathcal{C})$.*

Demostración:

Si $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$, basta usar (29) para ver que $\overline{F}_w^\xi(x) = F_w^\xi(x)$ para cualquier $x \in T_pM$. ♣

Si $\zeta \in Rad_p(M) - \{0\}$ es otro vector radical, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $F_w^\zeta = \lambda F_w^\xi$, por lo que la condición $F_w^\xi(x) = 0$ es independiente de ξ. Escribiremos simplemente

$$F_w(x) = 0$$

si $F_w^\xi(x) = 0$ para algún $\xi \in Rad_p(M) - \{0\}$.

Teorema 4.3.1 *Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular de $(M, \mathcal{C})$, trasversa a Σ por $p = \gamma(0)$, nunca luz ni radical, y sea $v \in T_pM$. Entonces existe un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ Fermi-Walker paralelo a lo largo de γ, con $V(0) = v$, si y sólo si*

$$F_{\gamma'(0)}(v) = 0$$

Demostración:

Consideremos $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}$ y $\mathbb{U}$ un entorno de p en M tal que γ es $\square$-geodésica en $\mathbb{U}$. Como las conexiones de Fermi-Walker $\frac{D^\gamma}{dt}$ y de Levi-Civita $\frac{\nabla}{dt}$ a lo largo de γ coinciden en $\mathbb{U} - \Sigma$, la existencia de un campo Fermi-Walker paralelo a lo largo de γ es equivalente a la existencia de un campo $\square$-paralelo en $\mathbb{U}$ a lo largo de γ. Por el Teorema 3.4.1 sabemos que existe $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ $\square$-paralelo a lo largo de γ, con $V(0) = v$, si y sólo si $II_p(\gamma'(0), v) = 0$. Ahora bien, si $g \in \mathcal{C}$ es una métrica que tiene a γ por geodésica en torno a $p = \gamma(0)$, entonces, puesto que $I_p^\xi(\gamma'(0), \gamma'(0)) = 0$, para $\xi \in Rad_p(M) - \{0\}$, se sigue de (35) que

$$F_{\gamma'(0)}^\xi(x) = \frac{-II_p^\xi(\gamma'(0), x)}{\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle}$$

con lo que la condición $II_p(\gamma'(0), v) = 0$ es equivalente a $F_{\gamma'(0)}(v) = 0$. ♣

Observemos que $F_{\gamma'(0)}^\xi$ es una forma no nula, ya que γ es trasversa a Σ, luego $II_p^\xi(\gamma'(0), \xi) \neq 0$ (Lema 3.2.3). Entonces $\ker\left(F_{\gamma'(0)}^\xi\right)$ es un hiperplano de T_pM. Además, existe $x \in T_p\Sigma$ tal que $II_p^\xi(\gamma'(0), x) \neq 0$, pues en caso contrario II_p^ξ sería nula, contradiciendo la trasversalidad de la métrica (Prop. 3.1.2). Por tanto, se tiene el siguiente

Corolario 4.3.1 *Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular de $(M, \mathcal{C})$, trasversa a Σ por $p = \gamma(0)$, nunca luz ni radical. El conjunto de vectores de T_pM que admiten trasporte de Fermi-Walker a lo largo de γ es un hiperplano Π trasverso a la hipersuperficie de cambio Σ, que contiene a $\gamma'(0)$, pero no al radical $Rad_p(M)$.*

4.4 Estructuras conformes trasversas conformemente II y III-planas

Consideremos un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$. Diremos que una métrica $g \in \mathcal{C}$ es *conformemente* II*-plana* si existe una función diferenciable en la hipersuperficie de cambio $h \in C^{\infty}(\Sigma)$ tal que, para cada $R \in \mathfrak{X}(M)$ radical, el tensor $II_{\Sigma}^{R} \in S^{2}(\Sigma)$ asociado a g definido en 3.6 verifica

$$II_{\Sigma}^{R} = h g_{\Sigma}$$

donde $g_{\Sigma} = g|_{\Sigma}$. Esta es una condición que no depende del campo radical R, y lo que es más importante, es una condición conforme, es decir independiente de la métrica $g \in \mathcal{C}$. En efecto, si $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ es una métrica conformemente equivalente a g entonces

$$\overline{II}_{\Sigma}^{R} = e^{2f} \left\{ II_{\Sigma}^{R} - Rf|_{\Sigma}\, g_{\Sigma} \right\} \tag{36}$$

luego g es conformemente II-plana si y sólo si $\overline{g}$ es conformemente II-plana. Esta independencia con respecto a la métrica nos permite definir

Definición 4.4.1 *Decimos que un espacio conforme singular trasverso* $(M, \mathcal{C})$ *es conformemente* II*-plano si alguna (y por tanto toda) métrica* $g \in \mathcal{C}$ *es conformemente* II*-plana.*

Los espacios conformes singulares trasversos conformemente II-planos son, en cierto sentido que veremos a continuación, localmente II-planos. Más concretamente, dado un punto singular $p \in \Sigma$ es posible encontrar una métrica de la estructura conforme que es II-plana en un entorno de p.

Lema 4.4.1 *Sea* M *una variedad diferenciable,* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $h \in C^{\infty}(M)$*. Si* $X_p \neq 0$ *existe un entorno abierto* $\mathbb{U}$ *de* p *en* M *y una función* $f \in C^{\infty}(\mathbb{U})$ *tal que* $Xf = h$ *en* $\mathbb{U}$*.*

Demostración:

Como $X_p \neq 0$ existe (Lema 1.57 de [O'Ne]) un sistema de coordenadas $(\mathbb{U}, \varphi)$ en torno a p tal que $\frac{\partial}{\partial x^m} = X$. Entonces, la ecuación diferencial $Xf = h$ se escribe, en $\mathbb{U}$

$$\frac{\partial f}{\partial x^m} = h$$

Esta ecuación puede verse como una ecuación lineal de primer orden (en la variable x^m), por tanto resoluble (en un entorno $\mathbb{U}$ más pequeño si es necesario).♣

Proposición 4.4.1 *Un espacio conforme singular trasverso* $(M, \mathcal{C})$ *es conformemente* II*-plano si y sólo si, para cada* $p \in \Sigma$*, existe un entorno abierto* $\mathbb{U}$ *en* M *y una métrica* $g \in \mathcal{C}$ *que es* II*-plana en* $\mathbb{U}$*, es decir*

$$II_{\Sigma \cap \mathbb{U}} = 0$$

Demostración:

Sea $p \in \Sigma$, $(\mathbb{U}, E)$ una referencia adaptada en torno a p y $g \in \mathcal{C}$ una métrica cualquiera de la estructura conforme $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es conformemente II-plana, por definición, existe $h \in C^{\infty}(\Sigma)$ tal que

$$II_{\Sigma}^{E_m} = h g_{\Sigma}$$

Sea $\widehat{h} \in C^{\infty}(\mathbb{U})$ una extensión local de h (tomando $\mathbb{U}$ más pequeño si es necesario). Por el Lema 4.4.1, existe una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{U})$ (reduciendo el abierto $\mathbb{U}$ de nuevo si es necesario) tal que $E_m f = \widehat{h}$, luego

$$II_{\Sigma}^{E_m} = E_m f|_{\Sigma}\, g_{\Sigma}$$

Tomemos ahora una extensión diferenciable $\widehat{f} \in C^{\infty}(M)$ de f. Entonces, usando (36) para g y $\overline{g} := e^{2\widehat{f}} g \in \mathcal{C}$ resulta que $\overline{II}_{\Sigma}^{E_m} = 0$, es decir, $\overline{g}$ es II-plana.

Para ver el recíproco tomamos una métrica trasversa $g \in \mathcal{C}$ cualquiera. Como la propiedad *ser conformemente* II*-plano* es una cuestión local, basta que tomemos un punto $p \in \Sigma$ arbitrario y la métrica $\overline{g} = e^{2\widehat{f}} g \in \mathcal{C}$, II-plana en torno a p, que por hipótesis sabemos que existe. Entonces, la fórmula (36) para g y $\overline{g}$ muestra que

$$II_p^{\xi} = (\xi f)\, g_p$$

con $\xi \in Rad_p(M) - \{0\}$, luego g es conformemente II-plana. ♣

En el resto de este apartado estudiamos las estructuras *conformemente* III*-planas* de los espacios singulares trasversos. Para ello distinguiremos entre los casos de radical trasverso y radical tangente. Sin embargo, como veremos en la Proposición 4.4.2, en ambos casos estos espacios están caracterizados por la misma condición.

En cualquier caso, sabemos que, si g es II-plana, para cada $R \in \mathfrak{X}(M)$ radical existe el tensor $III^R \in S^2(\Sigma)$ asociado a g definido en 3.6.

Lema 4.4.2 *Si* g *y* $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ *son dos métricas trasversas y* II*-planas en* M*, entonces el campo* $grad_g(f) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ *se extiende a* Σ*. Además verifica*

$$\overline{III}^R = e^{2f} \left\{ III^R - II^R \left(grad_g(f), R \right) g_{\Sigma} \right\} \tag{37}$$

Demostración:
Como g y $\overline{g} = e^{2f}g \in \mathcal{C}$ son II-planas, de (36) se deduce que $Rf|_\Sigma = 0$, y del Lema 3.2.5 que $grad_g(f) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ se extiende a Σ.
Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son dos campos tangentes a Σ, en virtud de la Proposición 3.6.3, los campos $\nabla_X Y$ y $\overline{\nabla}_X Y$ también se extienden a Σ. Recordando que debe verificarse $g\left(\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z\right) = L_g^f(X, Y, Z)$, usando que $Zf = g(grad_g(f), Z)$ y la fórmula (28), se concluye que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + l_g^f(X, Y) \tag{38}$$

donde

$$l_g^f(X, Y) := (Xf)\,Y + (Yf)\,X - g(X, Y)\,grad_g(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

Sólo nos resta calcular, usando la definición de III^R, la expresión (36), que $Rf|_\Sigma = 0$ y que X, Y son tangentes a Σ:

$$\begin{aligned}\overline{III}^R(X, Y) &= \overline{II}^R\left(\overline{\nabla}_X Y, R\right) = \overline{II}^R(\nabla_X Y, R) + \overline{II}^R\left(l_g^f(X, Y), R\right)\\ &= e^{2f} II^R(\nabla_X Y, R) + e^{2f} II^R\left(l_g^f(X, Y), R\right)\\ &= e^{2f}\left\{III^R(X, Y) - II^R(grad_g(f), R)\, g(X, Y)\right\}\end{aligned}$$

obteniendo la fórmula deseada. ♣

Consideremos un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, con radical trasverso. Diremos que una métrica $g \in \mathcal{C}$ es *conformemente III-plana* si es II-plana y existe $k \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $III^R = kg_\Sigma$, para $R \in \mathfrak{X}(M)$ radical.

Para ver la definición en el caso de radical tangente, necesitamos previamente estudiar el tensor $\mathcal{H} \in S^2(\Sigma)$, introducido en 3.6.

Lema 4.4.3 *Si g y $\overline{g} = e^{2f}g \in \mathcal{C}$ son dos métricas trasversas y II-planas en M, con radical tangente, entonces los campos principales normal y radical asociados a g y $\overline{g}$ se relacionan por $\overline{N} = e^{-f}N$, $\overline{R} = \pm e^{\frac{-f}{2}}R$. Además, se verifica*

$$\overline{\mathcal{H}} = e^f\left\{\mathcal{H} - (Nf)\, g_\Sigma\right\} \tag{39}$$

En particular, las pantallas canónicas $\overline{S}$ y S coinciden.

Demostración:
Hemos visto en la sección 3.6 que N y R determinan las direcciones II-nulas en cada $(T_p\Sigma)^\perp$ (y análogamente $\overline{N}$ y $\overline{R}$ determinan las direcciones $\overline{II}$-nulas). Puesto que g y $\overline{g}$ son II-planas, se deduce de (36) que $Rf|_\Sigma = 0$, y por tanto, la fórmula (29) queda $\overline{II}^R = e^{2f}II^R$. En consecuencia, las direcciones

II-nulas y $\overline{II}$-nulas coinciden. Como N es g-unitario (y análogamente $\overline{N}$ es $\overline{g}$-unitario) deben ser $\overline{N} = \pm e^{-f} N$. Para determinar el signo, observemos que $-1 = \overline{\mathcal{H}}\left(\overline{R}, \overline{R}\right) = \overline{\square}_{\overline{R}} \overline{R}\left(\overline{N}\right)$; entonces, teniendo en cuenta que $\overline{R} = \rho\left(\overline{R}\right) R$ y (27), se verifica

$$\begin{aligned} -1 &= \rho\left(\overline{R}\right)^2 \overline{\square}_R R\left(\overline{N}\right) = \pm e^{-f} \rho\left(\overline{R}\right)^2 \overline{\square}_R R\left(N\right) \\ &= \pm e^{f} \rho\left(\overline{R}\right)^2 \left\{\square_R R\left(N\right) + L_g^f\left(R, R, N\right)\right\} \\ &= \pm e^{f} \rho\left(\overline{R}\right)^2 \mathcal{H}\left(R, R\right) = \mp e^{f} \rho\left(\overline{R}\right)^2 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\overline{N} = e^{-f} N$ y además, que $\overline{R} = \pm e^{\frac{-f}{2}} R$ (recordemos que el campo radical principal está canónicamente determinado, salvo signo). Entonces se tiene, para $X,Y \in \mathfrak{X}\left(\Sigma\right)$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}\left(X, Y\right) &= \overline{\square}_X Y\left(\overline{N}\right) = e^{-f} \overline{\square}_X Y\left(N\right) \\ &= e^{f}\left\{\square_X Y\left(N\right) + L_g^f\left(X, Y, N\right)\right\} \\ &= e^{f}\left\{\mathcal{H}\left(X, Y\right) - \left(Nf\right) g\left(X, Y\right)\right\} \end{aligned}$$

que es la expresión buscada.

En particular, si $\xi \in Rad_p\left(M\right) - \{0\}$ entonces $\overline{\mathcal{H}}_p\left(x, \xi\right) = e^{f(p)} \mathcal{H}_p\left(x, \xi\right)$, luego $\overline{S}_p = S_p$. ♣

Consideremos un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, con radical tangente. Diremos que una métrica $g \in \mathcal{C}$ es *conformemente III-plana* si es II-plana y existe $k \in C^\infty\left(\Sigma\right)$ tal que $\mathcal{H}^S = k g_S$, donde $g_S : \Gamma\left(S\right) \times \Gamma\left(S\right) \to C^\infty\left(\Sigma\right)$ es la restricción de la métrica g a la pantalla canónica S.

Tal como se ha definido (e independientemente de que el radical sea trasverso o tangente), una métrica conformemente III-plana debe ser II-plana, pues ésa es una condición necesaria y suficiente para la existencia del tensor $III^R \in S^2\left(\Sigma\right)$. Por esta razón, esta definición de métrica conformemente III-plana no es conforme en la clase $\mathcal{C}$. Sin embargo, basta usar la fórmula (37) para ver que la definición sí es conforme en la subclase de las métricas II-planas

$$\mathcal{C}_2 = \{g \in \mathcal{C} : g \text{ es } II\text{-plana}\}$$

Definición 4.4.2 *Diremos que un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, con radical siempre trasverso o siempre tangente, es conformemente III-plano si es conformemente II-plano y se verifica que: cada $g \in \mathcal{C}$ que es II-plana en algún abierto $\mathbb{U}$ de M es además conformemente III-plana en $\mathbb{U}$.*

Nótese que en un espacio conformemente III-plano no se asegura la existencia de representantes conformemente III-planos, pues ni siquiera se asegura la existencia de representantes II-planos. Sin embargo, sí que existen localmente, por la Proposición 4.4.1, ya que en torno a cada punto singular de $(M, \mathcal{C})$ existe una métrica II-plana (por ser en particular conformemente II-plano). Veamos que, de hecho, existe una métrica III-plana en torno a cada punto singular de $(M, \mathcal{C})$.

Proposición 4.4.2 *Un espacio conforme singular trasverso $(M, \mathcal{C})$, con radical siempre trasverso o siempre tangente, es conformemente III-plano si y sólo si, para cada $p \in \Sigma$, existe un entorno abierto $\mathbb{U}$ en M y una métrica $g \in \mathcal{C}$ que es III-plana en $\mathbb{U}$.*

Demostración:
Sea $p \in \Sigma$ y $(\mathbb{U}, E)$ una referencia completamente adaptada en torno a p. Si $(M, \mathcal{C})$ es conformemente III-plano, existe (por la Def. 4.4.2 y la Prop. 4.4.1) $g \in \mathcal{C}$ que es II-plana en $\mathbb{U}$ (sin pérdida de generalidad), y una función $k \in C^\infty(\Sigma \cap \mathbb{U})$ tal que $III^{E_m} = k g_\Sigma$, si el radical es trasverso, ó $\mathcal{H}^S = k g_S$, si el radical es tangente.

En el primer caso, cuando el radical es trasverso, como $II^{E_m}_{mm} \neq 0$, la función

$$k_1 := \frac{k}{II^{E_m}_{mm}}$$

es diferenciable en $\Sigma \cap \mathbb{U}$. Tomemos $\widehat{k_1} \in C^\infty(\mathbb{U})$ una extensión local de k_1 y, aplicando el Lema 4.4.1, la función $f \in C^\infty(\mathbb{U})$ tal que

$$E_m f = \tau \widehat{k_1}$$

donde $\tau = \langle E_m, E_m \rangle$. Nótese que debemos tomar el abierto $\mathbb{U}$ más pequeño, si es necesario, a la hora de tomar la extensión local $\widehat{k_1}$ y la función f. Por ser $E_m f|_\Sigma = 0$ y por el Lema 3.2.5, el campo $grad_g(f) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ se extiende a $\Sigma \cap \mathbb{U}$. Además se verifica

$$II^{E_m}(grad_g(f), E_m) = \left(\tau^{-1} E_m f\right)_\Sigma II^{E_m}_{mm} = k$$

Para finalizar, el Lema I.5.1 de [Ko-No] asegura la existencia de una extensión diferenciable $\widehat{f} \in C^\infty(M)$ de (quizás una restricción de) f. Entonces $\overline{g} = e^{2\widehat{f}} g \in \mathcal{C}$ es II-plana en $\mathbb{U}$, puesto que g es II-plana en $\mathbb{U}$ y $E_m f|_\Sigma = 0$ (ver (36)). Además, aplicando la fórmula (37) para g y $\overline{g}$, se tiene que el tensor $\overline{III}^{E_m}$ se anula en $\Sigma \cap \mathbb{U}$.

En el caso del radical tangente, podemos elegir la referencia completamente adaptada tal que $E_1 = \mathbf{N}$ y $E_m = \mathbf{R}$ son las extensiones canónicas de los campos principales asociados a la métrica II-plana $g \in \mathcal{C}$. Usando el flujo de E_1 encontramos una extensión (canónica) local $\widehat{k} \in C^\infty(\mathbb{U})$ de k. Sea $f = \frac{1}{2}\tau\widehat{k} \in C^\infty(\mathbb{U})$, donde $\tau = \langle E_m, E_m \rangle$. Se tiene entonces que

$$E_\delta f = \frac{1}{2}\left\{E_\delta(\tau)\widehat{k} + \tau E_\delta\left(\widehat{k}\right)\right\}$$

para $\delta = 1$ ó m. Así, $E_m f|_\Sigma = 0$. Además, como

$$N(\tau) = 2\Box_R N(R) = -2\mathcal{H}(R,R) = 2$$

se tiene que $E_1 f|_\Sigma = \frac{1}{2} E_1(\tau)|_\Sigma k = k$. Apelando de nuevo al Lema I.5.1 de [Ko-No] , tomamos una extensión $\widehat{f} \in C^\infty(M)$ de f, y la métrica $\overline{g} = e^{2\widehat{f}} g \in \mathcal{C}$. Como g es II-plana en $\mathbb{U}$ y $E_m f|_\Sigma = 0$, aplicando (36) resulta que $\overline{g}$ es II-plana en $\mathbb{U}$; como $E_1 f|_\Sigma = k$, aplicando la fórmula (39), resulta que el tensor $\overline{\mathcal{H}}^S$ se anula en $\Sigma \cap \mathbb{U}$.

El recíproco sigue un razonamiento análogo al de la Proposición 4.4.1. Primero observemos que la hipótesis implica, aplicando la Proposición 4.4.1 y recordando que una métrica III-plana es II-plana, que $(M, \mathcal{C})$ es conformemente II-plano. Tomamos entonces un punto $p \in \Sigma$ arbitrario y $g \in \mathcal{C}$ una métrica II-plana en torno a p. Por hipótesis, existe una métrica $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ que es III-plana en torno a p (podemos suponer que los entornos coinciden, simplemente tomando la intersección). Por el Lema 4.4.2 se tiene

$$III^R = II^R(grad_g(f), R)\, g_\Sigma$$

luego g es conformemente III-plana. ♣

5 Curvatura conforme de Weyl

En este capítulo estudiamos la extendibilidad de un tensor asociado a la Geometría Conforme semi-riemanniana, que resulta esencial para la cuestión de saber si un espacio semi-riemanniano es conforme a un espacio semi-euclídeo. Sobre esta cuestión pueden consultarse [We], [Ku69], [He] o [Laf]. En el Teorema 5.2.1 veremos que la extendibilidad de este tensor está fuertemente ligada al concepto de espacio conformemente III-plano.

5.1 El tensor de Weyl de un espacio semi-riemanniano.

Sea M una variedad diferenciable, que supondremos de dimensión $\dim M \geqslant 4$. Para conseguir una exposición más clara, introducimos el producto de *Kulkarni-Nomizu* ([He], P.2.3):

$$\left.\begin{array}{l} \bullet : S^2(M) \times S^2(M) \to \mathfrak{C}M \\ (\theta, \omega) \mapsto \theta \bullet \omega \end{array}\right\}$$

definido por

$$\theta \bullet \omega (x, y, z, t) := \det \begin{pmatrix} \theta(x, z)\, \omega(x, t) \\ \theta(y, z)\, \omega(y, t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \omega(x, z)\, \theta(x, t) \\ \omega(y, z)\, \theta(y, t) \end{pmatrix} \tag{40}$$

Esta operación está bien definida (es decir, si $\theta, \omega \in S^2(M)$ entonces $\theta \bullet \omega \in \mathfrak{C}M$), es $C^\infty(M)$-bilineal y simétrica.

Definición 5.1.1 *Dado un espacio semi-riemanniano (M, g), con $\dim M \geqslant 4$, los tensores*

$$\begin{cases} h := \frac{1}{m-2}\left\{Ric - \frac{Sc}{2(m-1)} g\right\} \in S^2(M) \\ W := K - h \bullet g \in \mathfrak{C}M \end{cases} \tag{41}$$

reciben el nombre de tensor de Schouten y tensor de curvatura covariante de Weyl, respectivamente.

Por comodidad, dada g una métrica semi-riemanniana en M y $f \in C^\infty(M)$, denotaremos por $T_g^f \in S^2(M)$ al tensor definido por

$$T_g^f(x, y) := \Box_x(grad_g(f))(y) - (xf)(yf) + \frac{1}{2} g(grad_g(f), grad_g(f))\, g(x, y)$$

Lema 5.1.1 *Sean g y $\overline{g} = e^{2f} g$ dos métricas semi-riemannianas en M, conformemente equivalentes. Entonces*

$$\begin{cases} \overline{K} = e^{2f}\left\{K + T_g^f \bullet g\right\} \\ \overline{h} = h + T_g^f \\ \overline{W} = e^{2f} W \end{cases}$$

Demostración:

Para ver las dos primeras fórmulas se usan (41), (27) y (38) (los detalles pueden consultarse en [He] (P.2), [Ku69] (Prop. 2.2, 2.6), o [Ei] (pág. 89), desde un punto de vista local). La última fórmula es consecuencia de (41) y de las dos primeras. ♣

Corolario 5.1.1 *El tensor* $\mathcal{W} :=\uparrow_4^1 W \in \mathcal{I}_3^1(M)$ *es un invariante conforme de* (M, g)*, es decir, si* $\overline{g} = e^{2f} g$ *entonces* $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$*.*

Por esta razón, el tensor $\mathcal{W} \in \mathcal{I}_3^1(M)$ se conoce por *curvatura conforme de Weyl* del espacio semi-riemanniano (M, g). Así, podemos decir que el tensor $\mathcal{W} \in \mathcal{I}_3^1(M)$ está bien definido en el espacio conforme semi-riemanniano $(M, \mathcal{C})$.

Demostración:

Recordando la interpretación de los tensores $(1, s)$ de una variedad diferenciable ([O'Ne], 2.3), podemos ver $\mathcal{W} \in \mathcal{I}_3^1(M)$ como una aplicación $C^\infty(M)$-trilineal $\mathcal{W} : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$, que verifica

$$g(\mathcal{W}(X, Y, Z), T) = W(X, Y, Z, T)$$

para cualquier $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, si $\overline{g} = e^{2f} g$ es una métrica conformemente equivalente a g, se verifica

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{\mathcal{W}}(X, Y, Z), T\right) &= \overline{W}(X, Y, Z, T) = e^{2f} W(X, Y, Z, T) \\ &= e^{2f} g(\mathcal{W}(X, Y, Z), T) = \overline{g}(\mathcal{W}(X, Y, Z), T) \end{aligned}$$

luego $\overline{\mathcal{W}}(X, Y, Z) = \mathcal{W}(X, Y, Z)$. ♣

Se dice que un espacio semi-riemanniano (M, g) es *conformemente plano* si, para cada $p \in M$, existe un entorno $\mathbb{U}$ de p y una métrica conformemente equivalente $\overline{g} = e^{2f} g$ que es plana en $\mathbb{U}$ (una métrica semi-riemanniana es plana si el tensor de curvatura de Riemann asociado es nulo). Por ejemplo, se sabe ([Laf], C.5) que toda superficie semi-riemanniana es conformemente plana, resultado establecido por Gauss y que se conoce como *existencia de coordenadas isotermas* (en dimensiones superiores no está asegurada la existencia de coordenadas isotermas; la obstrucción a esta existencia es la anulación del tensor de Weyl). Ciertamente, esta es una condición conforme, por lo que tiene sentido hablar de *espacios conformes semi-riemannianos* $(M, \mathcal{C})$ *conformemente planos*.

Una *referencia conforme* $(\mathbb{U}, E)$ en (M, g) es una referencia local de M en la que la métrica se expresa

$$g = e^{2f} \sum_{a=1}^{m} \varepsilon_a \omega_a \otimes \omega_a$$

donde $f \in C^{\infty}(\mathbb{U})$, $\varepsilon_a = \pm 1$ y $(\omega_1, ..., \omega_m)$ es la referencia dual de E. Diremos que un *sistema de coordenadas* $(\mathbb{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ en (M, g) es *conforme* si la referencia asociada $\left(\mathbb{U}, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right)$ es conforme. En uno de estos sistemas de coordenadas conformes, la métrica se expresa

$$g = e^{2f} \sum_{a=1}^{m} \varepsilon_a (dx^a)^2$$

No es difícil ver ([He], P.4.3) que un espacio semi-riemanniano es conformemente plano si y sólo si existen sistemas de coordenadas conformes en torno a cada punto. Por ésta razón, se entiende que un espacio semi-riemanniano conformemente plano es localmente conforme a un espacio semi-euclídeo.

Hemos comentado arriba que toda superficie es conformemente plana. El siguiente resultado, que recibe el nombre de Teorema de Weyl-Schouten, aborda la cuestión para variedades semi-riemannianas de dimensión mayor o igual a 4. Aquí simplemente lo enunciamos (la demostración puede encontrarse por ejemplo en [He] (P.5), [Laf] (C.9) o [Ei] para el caso riemanniano). Se muestra la relación directa que existe entre la curvatura conforme de Weyl y el concepto de espacio conformemente plano.

Teorema 5.1.1 *Un espacio semi-riemanniano (M, g), con $\dim M \geqslant 4$, es conformemente plano si y sólo si $\mathcal{W} = 0$.*

En [We] se mostró por vez primera la necesariedad de la anulación de $\mathcal{W}$. Más tarde, se mostró en [Sch] que también es suficiente, además de dar las condiciones para el caso $\dim M = 3$.

5.2 Extendibilidad del tensor curvatura de Weyl

Dado (M, g) un espacio singular trasverso, sabemos que los tensores de Schouten $h \in S^2(\mathbb{M})$ y de Weyl $W \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$ están bien definidos en $\mathbb{M}$. En esta sección nos interesa su extendibilidad a Σ. Para ello necesitamos sus expresiones polinómicas en una referencia ortonormal adaptada $(\mathbb{U}, E)$.

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sustituyendo en la definición del tensor de Schouten (41) las expresiones polinómicas del tensor de Ricci (18) y de la curvatura escalar (20) deducimos la expresión polinómica

$$h(X, Y) = (h(X, Y))_0 + \tau^{-1}(h(X, Y))_1 + \tau^{-2}(h(X, Y))_2 \tag{42}$$

donde $\tau^{-1} = (g(E_m, E_m))^{-1}$ y

$$(h(X, Y))_a := \frac{1}{m-2}\left\{(Ric(X, Y))_a - \frac{(Sc)_a}{2(m-1)} g(X, Y)\right\}$$

para $a = 0, 1, 2$.

Nos interesa obtener una expresión polinómica similar para $W(X,Y,Z,T)$, con $X,Y,Z,T \in \mathfrak{X}(M)$. Fijándonos en la definición del producto de Kulkarni-Nomizu (40) para $h \bullet g(X,Y,Z,T)$, si sustituimos $h(\cdot,\cdot)$ por su expresión polinómica (42), basta usar que el determinante es multilineal para deducir que $h \bullet g(X,Y,Z,T)$ también se expresa como un polinomio (de grado 2) en la variable $\tau^{-1} = (g(E_m,E_m))^{-1}$, con coeficientes

$$(h \bullet g(X,Y,Z,T))_a = \det \begin{pmatrix} (h(x,z))_a \, g(x,t) \\ (h(y,z))_a \, g(y,t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} g(x,z) \, (h(x,t))_a \\ g(y,z) \, (h(y,t))_a \end{pmatrix}$$

para $a = 0,1,2$. Entonces, como por definición $W = K - h \bullet g$, sustituyendo las expresiones polinómicas de $K(X,Y,Z,T)$ (16) y de $h \bullet g(X,Y,Z,T)$ (que acabamos de obtener), deducimos la expresión deseada

$$W(X,Y,Z,T) = (W(X,Y,Z,T))_0 + \tau^{-1}(W(X,Y,Z,T))_1 + \tau^{-2}(W(X,Y,Z,T))_2 \tag{43}$$

donde

$$\begin{cases} (W(X,Y,Z,T))_b := (K(X,Y,Z,T))_b - (h \bullet g(X,Y,Z,T))_b \\ (W(X,Y,Z,T))_2 := -(h \bullet g(X,Y,Z,T))_2 \end{cases}$$

para $b = 0,1$.

Lema 5.2.1 *$W(X,Y,Z,T)$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si las funciones $(W(X,Y,Z,T))_2$ y $(W(X,Y,Z,T))_1 + \tau^{-1}(W(X,Y,Z,T))_2$ se anulan sobre Σ.*

Según el Lema 5.1.1, aunque el tensor de curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$ (asociado a una métrica trasversa cualquiera g de $\mathcal{C}$) no es invariante conforme de $(M,\mathcal{C})$, la condición W *se extiende a* Σ sí que lo es, por lo que no es necesario referirnos a una métrica trasversa particular de la estructura conforme $\mathcal{C}$.

Teorema 5.2.1 *Sea $(M,\mathcal{C})$ un espacio conforme singular trasverso, con* $\dim M \geqslant 4$*. Entonces $W \in \mathfrak{C}\mathbb{M}$ se extiende diferenciablemente a Σ si y sólo si $(M,\mathcal{C})$ tiene radical trasverso y es conformemente III-plano.*

Demostración:

Si $(M,\mathcal{C})$ tiene radical trasverso y es conformemente III-plano sabemos, por la Proposición 4.4.2, que existe un recubrimiento $\{\mathbb{U}_\alpha\}$ de Σ (que podemos tomar localmente finito) por abiertos de M, y una familia asociada de métricas $\{g_\alpha\}$ en $\mathcal{C}$ tal que g_α es III-plana en $\mathbb{U}_\alpha$. Entonces, por el Teorema 3.7.1 (recordemos que una métrica III-plana es II-plana) y la Proposición 3.7.1, en cada $\mathbb{U}_\alpha$ el tensor de curvatura covariante K^α, el tensor de Ricci Ric^α y la curvatura escalar Sc^α asociados a $g_\alpha \in \mathcal{C}$, se extienden diferenciablemente a $\Sigma \cap \mathbb{U}_\alpha$. Por lo tanto la curvatura de Weyl W^α asociada a g_α también se extiende a $\Sigma \cap \mathbb{U}_\alpha$. Como esta condición es conforme, W^{α} se extiende a $\Sigma \cap \mathbb{U}_{\beta}$ para todo β, luego W se extiende a Σ.

Veamos el recíproco. Sean i, j, k distintos de m, con i, j distintos de k. Usando sucesivamente (43), (40), (42), (18) y (20) se tiene

$$\begin{aligned}(W_{ikjk})_2 &= -\left((h \bullet g)_{ikjk}\right)_2 = -\varepsilon_k (h_{ij})_2 - \delta_{ij}\varepsilon_i (h_{kk})_2 \\ &= -\frac{\varepsilon_k}{m-2}\left\{(Ric_{ij})_2 - \frac{\delta_{ij}\varepsilon_i (Sc)_2}{2(m-1)}\right\} \\ &\quad -\frac{\delta_{ij}\varepsilon_i}{m-2}\left\{(Ric_{kk})_2 - \frac{\varepsilon_k (Sc)_2}{2(m-1)}\right\} \\ &= -\frac{1}{m-2}[\varepsilon_k (K_{imjm})_1 + \delta_{ij}\varepsilon_i (K_{kmkm})_1 \\ &\quad -\frac{2\varepsilon_k\delta_{ij}\varepsilon_i}{m-1}\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l (K_{lmlm})_1] \end{aligned} \tag{44}$$

donde δ_{ij} es la *delta de Kronecker.*

Comencemos viendo que el radical es trasverso. En efecto, por reducción al absurdo, si $Rad_p(M) \subset T_p\Sigma$ en algún punto singular $p \in \Sigma$, podemos elegir una referencia ortonormal adaptada $(\mathbb{U}, E)$ en torno a p tal que $E_1(p)$ y $E_2(p)$ son trasversos a Σ, es decir $E_1(p), E_2(p) \in T_pM - T_p\Sigma$. Entonces, el coeficiente de grado 2 de la expresión polinómica (43) para W_{1323} no se anula sobre Σ. En efecto, usando (44), (16) y teniendo en cuenta que $II_p^{E_m}(E_m(p), E_m(p)) = 0$ (por ser el radical tangente), queda

$$\begin{aligned}(W_{1323}(p))_2 &= -\frac{\varepsilon_3}{m-2}(K_{1m2m}(p))_1 \\ &= \frac{\varepsilon_3}{m-2} II_p^{E_m}(E_1(p), E_m(p))\, II_p^{E_m}(E_2(p), E_m(p))\end{aligned}$$

que es no nulo, por ser E_1 y E_2 trasversos a Σ en p. Pero entonces, según el Lema 5.2.1, W no se extiende a Σ.

Lo siguiente es comprobar que $(M, \mathcal{C})$ es conformemente II-plano, esto es, que toda $g \in \mathcal{C}$ es conformemente II-plana (Def. 4.4.1). Por lo que acabamos de ver, en torno a cada punto de Σ podemos elegir una referencia ortonormal completamente adaptada (para radical trasverso) $(\mathbb{U}, E)$. Entonces, eligiendo i, j, k distintos de m, con i, j distintos de k, usando el Lema 5.2.1 y las fórmulas (44) y (16), y teniendo en cuenta que $II_{im}^{E_m} = 0$, queda:

1. Si $i \neq j$:

$$0 = (W_{ikjk})_2\big|_{\Sigma} = -\frac{\varepsilon_k}{m-2}(K_{imjm})_1\big|_{\Sigma} = -\frac{\varepsilon_k}{m-2} II_{ij}^{E_m} II_{mm}^{E_m}$$

Como el radical es trasverso, $II_{mm}^{E_m} \neq 0$, luego $II_{ij}^{E_m} = 0$ (para $i \neq j$).

2. Si $i = j$ (y teniendo en cuenta el resultado de 1):

$$\begin{aligned} 0 = (W_{ikik})_2|_\Sigma &= -\frac{\varepsilon_k}{m-2}(K_{imim})_1|_\Sigma - \frac{\varepsilon_i}{m-2}(K_{kmkm})_1|_\Sigma \\ &+\frac{2\varepsilon_k\varepsilon_i}{(m-2)(m-1)}\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l\,(K_{lmlm})_1|_\Sigma \\ &= -\frac{II_{mm}^{E_m}}{m-2}\left\{\varepsilon_k II_{ii}^{E_m} + \varepsilon_i II_{kk}^{E_m} - \frac{2\varepsilon_i\varepsilon_k}{m-1}\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l II_{ll}^{E_m}\right\} \end{aligned}$$

Estas últimas $\binom{m-1}{2}$ igualdades, manipuladas convenientemente (multiplicando por $\varepsilon_i\varepsilon_k$ y despejando el último sumando), se escriben

$$\varepsilon_i II_{ii}^{E_m} + \varepsilon_k II_{kk}^{E_m} = \frac{2C}{m-1}$$

donde $C = \sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l II_{ll}^{E_m} \in C^\infty(\mathbb{U})$. Si restamos dos de estas ecuaciones, para i,k y k,j, obtenemos

$$\varepsilon_i II_{ii}^{E_m} - \varepsilon_j II_{jj}^{E_m} = 0$$

luego $\varepsilon_i II_{ii}^{E_m} = \varepsilon_j II_{jj}^{E_m}$. Si definimos

$$k := \varepsilon_1 II_{11}^{E_m} \in C^\infty(\Sigma\cap\mathbb{U})$$

se verifica

$$\left.\begin{aligned} II_{ii}^{E_m} &= \varepsilon_i\varepsilon_1 II_{11}^{E_m} = kg_{ii} \\ II_{ij}^{E_m} &= 0 = kg_{ij}\ (\text{con } i\neq j) \end{aligned}\right\}$$

es decir $II_\Sigma^{E_m} = kg_\Sigma$, por lo que efectivamente g es conformemente II-plana en $\mathbb{U}$, y en consecuencia $(M,\mathcal{C})$ es conformemente II-plano.

Para terminar sólo nos resta demostrar que $(M,\mathcal{C})$ es conformemente III-plano. Tomamos $g\in\mathcal{C}$ una métrica trasversa (con radical trasverso) II-plana en algún abierto $\mathbb{U}$, y una referencia ortonormal completamente adaptada $(\mathbb{U},E)$ (tomando $\mathbb{U}$ más pequeño si es necesario). Por el Teorema 3.7.1, la curvatura covariante K se extiende a $\Sigma\cap\mathbb{U}$ y, puesto que (por hipótesis) W se extiende a $\Sigma\cap\mathbb{U}$, se concluye de (41) que $h\bullet g$ también se extiende.

Sean i,j,k distintos de m, con i,j distintos de k. Usando sucesivamente (40), (41), (18) y (20) se tiene

$$\begin{aligned} (h\bullet g)_{ikjk} = \varepsilon_k h_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_i h_{kk} &= \frac{\varepsilon_k}{m-2}\left\{Ric_{ij} - \frac{\delta_{ij}\varepsilon_i}{2(m-1)}Sc\right\} \\ &+\frac{\delta_{ij}\varepsilon_i}{m-2}\left\{Ric_{kk} - \frac{\varepsilon_k Sc}{2(m-1)}\right\} = A_{ijk} + \tau^{-1}B_{ijk} \end{aligned}$$

donde

$$B_{ijk} := \frac{1}{m-2}\left\{\varepsilon_k K_{imjm} + \delta_{ij}\varepsilon_i K_{kmkm} - \frac{2\varepsilon_k\delta_{ij}\varepsilon_i}{m-1}\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l K_{lmlm}\right\} \tag{45}$$

con lo que esta función B_{ijk} debe anularse sobre Σ. Usando (21) obtenemos:

1. Si $i \neq j$:
$$0 = B_{ijk}|_\Sigma = \frac{-\varepsilon_k}{m-2} III_{ij}^{E_m}$$

2. Si $i = j$ (y usando el resultado de 1):
$$0 = B_{iik}|_\Sigma = -\frac{1}{m-2}\left\{\varepsilon_k III_{ii}^{E_m} + \varepsilon_i III_{kk}^{E_m} - \frac{2\varepsilon_i\varepsilon_k}{m-1}\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l III_{ll}^{E_m}\right\}$$

Estas últimas $\binom{m-1}{2}$ igualdades, manipuladas convenientemente (multiplicando por $\varepsilon_i\varepsilon_k$ y despejando el último sumando), se escriben

$$\varepsilon_i III_{ii}^{E_m} + \varepsilon_k III_{kk}^{E_m} = \frac{2D}{m-1}$$

donde $D = \sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_l III_{ll}^{E_m} \in C^\infty(\mathbb{U})$. Nótese el paralelismo existente entre las ecuaciones que obteníamos al final del razonamiento para ver que g era conformemente II-plana, y las que ahora tenemos (sólo hay que sustituir II por III). El mismo argumento que allí usábamos sirve ahora para ver que $\varepsilon_i III_{ii}^{E_m} = \varepsilon_j III_{jj}^{E_m}$. Tomando la función $k := \varepsilon_1 III_{11}^{E_m} \in C^\infty(\Sigma \cap \mathbb{U})$, se verifica

$$\left.\begin{array}{l} III_{ii}^{E_m} = \varepsilon_i\varepsilon_1 III_{11}^{E_m} = kg_{ii} \\ III_{ij}^{E_m} = 0 = kg_{ij} \text{ (con } i \neq j) \end{array}\right\}$$

luego $III^{E_m} = kg_\Sigma$, es decir g es conformemente III-plana en $\mathbb{U}$, con lo que $(M, \mathcal{C})$ es conformemente III-plano. ♣

References

[Ab-Ma] R. Abraham y J. Marsden. *Foundations of Mechanics (second edition).* Benjamin/Cummings, 1978.

[Ab-Ro] R. Abraham y J. Robbin. *Trasversal mappings and flows.* Benjamin/Cummings, 1967.

[Ag-La] E. Aguirre y J. Lafuente. *Trasverse Riemann-Lorentz metrics with tangent radical.* Se publicará en Differential Geometry and its applications, 2005.

[Am] A. M. Amores. *A solution theorem for implicit differential equations*, en el libro *Homenaje al profesor E. Outerelo*. Ed. Complutense, 2005.

[Bi] R. Bishop y S. Goldberg. *Tensor analysis on manifolds.* MacMillan Cop., 1968.

[De-Tu] T. Dereli y R. W. Tucker. *Signature dynamics in general relativity.* Class. Quantum Grav., 10, 365-373.

[Ei] L. P. Eisenhart. *Riemannian Geoametry.* Princeton University Press, 1949.

[El] G. F. R. Ellis, A. Sumeruk, D. Coule y C. Hellaby. *Change of signature in classical general relativity.* Class. Quantum. Grav., 9, 1535-1554, 1992.

[Fe] E, Fermi. *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Rendiconti dei Lincei, 31, 21-23, 51-52, 1922.

[Gi-Ha] G. W. Gibbons y J. B. Hartle. *Real tunnelling and large scale topology of the universe.* Phys. Rev., D 42, 2458-68, 1990.

[Hal-Ha] J. J. Halliwell y J. B. Hartle. *Integration contours for the no-boundary wave function of the universe.* Phys. Rev., D 41, 1815-34, 1990.

[Ha-Haw] J. B. Hartle y S. W. Hawking. *Wave function of the universe.* Phys. Rev., D 28, 2960-75, 1983.

[Har] P. Hartman. *Ordinary differential equations.* Wiley, 1973.

[Hay] S. A. Hayward. *Signature change in general relativity.* Class. Quantum Grav., 9, 1851-1862, 1992.

[He] U. Hertrich-Jeromin. *Introduction to Möbius diferential Geometry.* Cambridge Univ. Press, 2003.

[Hi] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub. *Invariant manifolds.* Lec. Notes Math., vol. 583, Springer, 1977.

[Ko-No] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry.* Interscience publishers, 1963.

[Kos85] M. Kossowski. *Fold singularities in pseudoriemannian geodesic tubes.* Proc. Amer. Math. Soc., 95, 463-469,1985.

[Kos87] M. Kossowski. *Pseudo-riemannian metric singularities and the extendability of parallel transport.* Proc. Amer. Math. Soc., 99, 147-154, 1987.

[Kos91a] M. Kossowski. *The null blow-up of a surface in Minkowski 3-space and the intersection in the spacelike Grassmann.* Michigan Math. J., 38, 401-415, 1991.

[Kos91b] M. Kossowski. *Restrictions on zero mean curvature in Minkowski space.* Quart. J. Math. Oxford, 42, 315-324, 1991.

[Kos91c] M. Kossowski. *Local existence of multivalued solution to analitic symplectic Monge-Ampère equations (the nondegenerate and type change cases).* Indiana University Math. Journal, 40, 123-148, 1991.

[Kos93a] M. Kossowski y M. Kriele. *Signature type change and absolute time in general relativity.* Class. Quantum Grav., 10, 1157-1164, 1993.

[Kos93b] M. Kossowski y M. Kriele. *Smooth and discontinuous signature type change in general relativity.* Class. Quantum Grav., 10, 2363-2371, 1993.

[Kos93c] M. Kossowski y M. Kriele. *The Einstein equation for signature type changing spacetimes.* Proc. R. Soc. Lond., A 446, 115-126, 1994.

[Kos94] M. Kossowski y M. Kriele. *Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics.* Proc. R. Soc. Lond. A 444, 297-306,1994.

[Kos97] M. Kossowski y M. Kriele. *The volume blow-up and charactreristic classes for transverse, type changing, pseudo-riemannian metrics.* Geom. Dedicata 64, 1-16. 1997

[Ku69] R. S. Kulkarni. *Curvature and metric.* Ann. Math., , 1969.

[Ku88] R. S. Kulkarni. *Conformal structures and Möbius structures.* Aspects Math., E 12, 1-39, 1988

[Kup87a] D. N. Kupeli. *On null submanifolds in sapacetimes.* Geom. Ded., 23, 33-51, 1987.

[Kup87b] D. N. Kupeli. *Degenerate manifolds.* Geom. Ded., 23, 259-290, 1987.

[Kup87c] D. N. Kupeli. *Degenerate submanifolds in semi Riemannian geometry.* Geom. Ded., 24, 330-361, 1987.

[Laf] J. Lafontaine. *Conformal Geometry from the riemannian viewpoint.* Aspects Math., E 12, 65-92, 1988.

[Lar] J. C. Larsen. *Singular semi-riemannian geometry.* J. Geom. Phys., 9, 3-23, 1992.

[O'Ne] B. O'Neill. *Semi-riemannian geometry.* Academic Press, 1983.

[Sa] B. Salvador. *The Fermi-Walker connection on a riemannian conformal manifold*, en el libro *Homenaje al profesor E. Outerelo.* Ed. Complutense, 2005.

[Sch] J. A. Schouten. *Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmug.* Mathematische Zeitschrift, vol. 11, 55-88, 1921.

[We] H. Weyl. *Reine Infinitesimal Geometrie.* Mathematische Zeitschrift, vol. 2, 384-411, 1918..