Sobre las co-métricas con cambio transverso de signatura.

Proyecto de trabajo de investigación de Esther Vieito.
dirigido por Javier Lafuente.

Considerese un tensor 2-contravariante simétrico g^* (*co-métrica*) definido sobre una variedad M conexa de dimensión $m \geq 2$, que verifica la siguiente propiedad:

A) *En cada punto* $p \in M$*, donde* $g^*|_p : T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R}$ *es degenerado, existe* $\left(\theta^1, \ldots, \theta^m\right)$ *base de* 1*-formas en un entorno de* p *y se tiene que* $d_p \det\left(g^*\left(\theta^a, \theta^b\right)\right) \neq 0$.

Es facil ver que esta condición (*transversa*) es independiente de la base (θ^a) tomada en torno a p, y que el conjunto

$$D^\infty = \left\{p \in M \Big/ g^*|_p \text{ es degenerada}\right\}$$

(que se supondrá no vacío), constituye una hipersuperficie -denominada *polar*- que localmente admite por ecuación: $\det\left(g^*\left(\theta^a, \theta^b\right)\right) = 0$.

Si $p \in D^\infty$, se demuestra entonces que el radical

$$Rad_p\left(g^*\right) = \left\{\alpha \in T_p^*M : g^*\left(\alpha, \beta\right) = 0, \forall \beta \in T_p^*M\right\}$$

es unidimensional, y por tanto el anulador

$$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right) = \left\{X \in T_pM : \mu\left(X\right) = 0, \forall \mu \in Rad_p\left(g^*\right)\right\}$$

tiene dimensión $m-1$. Además el cambio de indice de la co-métrica g^* al atravesar D^∞ es exactamente de una unidad.

En cada punto $p \in M - D^\infty$, hay un un isomorfismo $T_p^*M \to T_p^{**}M \simeq T_pM$, $\alpha \to g^*\left(\alpha, \bullet\right)$ y se denota a su inverso por $T_pM \to T_p^*M$, $X \to \alpha_X$. La métrica dual g (de g^*) en p, $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, está definida por la condición

$$g\left(X, Y\right) = g^*\left(\alpha_X, \alpha_Y\right) \tag{1}$$

y g es un tensor 2−covariante no degenerado en $M - D^\infty$, con la misma signatura que g^* en cada punto. Por tanto g induce una estructura semiriemanniana clásica sobre cada componente conexa de $M - D^\infty$ y la signatura cambia en una unidad al pasar de una componente a otra atravesando D^∞. Cuando el cambio se produce de Lorentz a Riemann los anuladores $An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)$ con $p \in D^\infty$, se interpretan como la posición límite de los conos de luz de la parte Lorentz. Admitiremos que:

B) *An* $(Rad_p(g^*)) = T_pD^\infty$ *para todo* $p \in D^\infty$.

Esencialmente estamos presentando el contexto dual del planteado por M. Kossowski and M. Kriele en [4]. Allí se sustituye la co-metrica g^*, por una métrica g verificando la propiedad análoga a la **A)** relativa a la transversalidad. Llamamos D^0 a la hipersuperficie donde g degenera, y en lugar de la condición **B)** se impone ahora que en cada punto $p \in D^0$, el radical $Rad_p(g)$ (que es unidimensional) sea transverso a T_pD^0. En estas condiciones se prueba:

Teorema 1 *([4] Th 2 y 4) Por cada punto* $p \in D^0$ *hay una única* C^∞*-pregeodésica* Γ_p *que atraviesa* D^0 *por* p *con dirección* $Rad_p(g)$.

Con ayuda de esta familia de pregeodésicas, es posible construir una carta $(x^1, \ldots x^m)$ en torno a cada punto de D^0, en donde la métrica se escribe

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} g_{ij} dx^i \otimes dx^j + x^m dx^m \otimes dx^m$$

aquí la hipersupeficie D^0 tiene ecuación $x^m = 0$, y $(x^i = cte,\ x^m = t)$ son ecuaciones paramétricas de las pregeodésicas Γ_p. Además, la coordenada x^m está definida independientemente de la carta, y se puede considerar como una función global sobre un abierto de M que contiene a D^0

El objetivo en este trabajo se limita en principio a establecer un resultado de tipo *dual* del teorema 1 para co-métricas g^* con las propiedades **A) B)**. Este resultado dará lugar a la existencia en torno a cada punto de D^∞ de una carta $(x^1, \ldots x^m)$ donde la métrica g definida por la condición (1) se escriba:

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \frac{1}{x^m} dx^m \otimes dx^m.$$

Además la coordenada x^m estará definida independientemente de la carta.

Referencias

[1] E. Aguirre and J. Lafuente. *Trasverse Riemann-Lorentz metrics with tangent radical.* Diff. Geom. its App, 24, 2, 91-100, 2005.

[2] M. Kossowski. *Fold singularities in pseudoriemannian geodesic tubes.* Proc. Amer. Math. Soc., 95, 463-469,1985.

[3] M. Kossowski. *Pseudo-riemannian metric singularities and the extendability of parallel transport.* Proc. Amer. Math. Soc., 99, 147-154, 1987.

[4] M. Kossowski and M. Kriele. *Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics.* Proc. R. Soc. Lond. A 444, 297-306,1994.

[5] M. Kossowski and M. Kriele. *The volume blow-up and characteristic classes for transverse, type changing, pseudo-riemannian metrics.* Geom. Dedicata 64, 1-16. 1997.

[6] B. O'Neill. *Semi-riemannian Geometry.* Academic Press, 1983.

[7] E. Aguirre, V. Fernández, J. Lafuente.*On the Conformal Geometry of Transverse Riemann-Lorentz Manifolds.* Journal of Geom and Phys 1541-1547