El grupo de Rubik

0.1 Introducción

La primera vez que alguien se enfrenta con el cubo de Rubik, es muy posible que tan solo aprenda a moverlo. Y ya entonces se percata que tiene ante sí algo misterioso, donde no todos los movimientos son posibles: si intenta mover una esquina tendrá que mover toda una cara, y si pretende llevarla a la esquina opuesta descolocará medio cubo!.

Con paciencia descubrirá que el objetivo del cubo es, a partir de una posición cualquiera, reordenar los colores. Y verá que ordenar una cara y la primera fila de las caras adyacentes, es relativamente sencillo. Un poco más de trabajo (y de tiempo) es suficiente para aprender a colocar en su sitio la segunda fila de las caras adyacentes. Y es entonces cuando se llega al verdadero problema del cubo: ¿Cómo ordenar la tercera fila de las caras adyacentes y la cara opuesta? Para ello ha de buscar una sucesión de giros que al final dejen intacto lo que ya estaba ordenado y sólo mueva la cara opuesta. Esta sucesión se llamará un movimiento. Y estos movimientos forman precisamente el grupo de Rubik.

Este artículo describe quién es este grupo, dando sus elementos y diciendo cómo se componen.

0.2 Un modelo del cubo

Primero se adopta el siguiente convenio: la cara que se quiere reordenar es la blanca, por tanto queda siempre mirando hacia nosotros. Su cara opuesta supongamos que es azul (porque cada fabricante lo colorea como quiere). Pongamos entonces arriba la cara granate, abajo la naranja, a la izquierda la amarilla y a la derecha la verde. Designemos cada cara por su inicial (la cara azul no necesita moverse, por lo que no hay conflicto). Un giro de una cara se denota por su inicial y un número del uno al tres que indica el número de veces que se gira 90^oen sentido positivo respecto de dicha cara. Un movimiento es pues una sucesión de giros que dejan invariante la cara azul y dos filas de las caras laterales:

$$m \equiv g1b2g3b2g3a1g1a3$$

Ahora hay que describir la posición de los cubitos de la cara blanca. Para ello se utiliza el conjunto

$$\Omega = S_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

$$m = \alpha \times (a_1, a_2, a_3, a_4) \times \beta * (b_0, b_1, b_2, b_3) *$$

α es una permutación de 4 elementos y describe cómo han variado las aristas de la cara blanca. Suponiendo que la arista granate es la posición 1, y numerando en sentido positivo, la arista amarilla es la posición 2, la naranja la 3 y la verde la 4. Después de efectuar el movimiento, las aristas ocupan otras posiciones de aristas y α indica esta permutación en notación cíclica. Para el movimiento anterior se tiene $\alpha = (1, 3, 2)$ y ya se ve que la arista verde queda en su sitio.

Pero esto no describe todo el cambio que sufren las aristas. Toda arista tiene 2 colores, uno de ellos es el blanco. Una arista puede cambiar de sitio (esto es lo que contabiliza α) y quedar de 2 maneras: con el color blanco en la cara blanca o al revés: su color aparece en la cara blanca. a_1 describe cuál de las dos posiciones hay en la arista de la cara granate: 0 para el primer caso y 1 para el segundo, independientemente de qué color se trate. Por orden sucesivo se tiene definido las a_i restantes, que para el ejemplo resulta $(1, 1, 0, 0)$

Análogamente β describe el cambio de los vértices mediante una permutación de 4 elementos en notación cíclica, siendo el vértice granate-amarillo el 1, y numerándolos en sentido positivo, resultando el amarillo-naranja 2, naranja-verde 3, y verde-granate 4. En el ejemplo $\beta = (1, 2, 3)$.

Todo vértice tiene 3 colores, uno de ellos es el blanco. Un vértice puede cambiar de sitio (esto lo contabiliza β) y quedar de 3 maneras: con su lado blanco sobre la cara blanca, girado un tercio de vuelta en sentido positivo alrededor del eje que imaginariamente sale por la esquina hacia afuera, y girado dos tercios de vuelta. b_1 describe cuál de las tres posiciones hay en el vértice granate-amarillo: 0,1,2 respectivamente, independientemente de los colores del vértice que en ese momento este ocupando dicha posición. Por orden sucesivo se tiene definido las b_i restantes, que para el ejemplo resulta $(2, 0, 2, 2)$

Ya se puede expresar cualquier movimiento. Un pequeño detalle permite simplificar el nombre del movimiento, y es que los últimos giros suelen ser obligados ya que se trata de poner un vértice de color azul y su arista, de manera que durante los giros no se separen. En resumen, el movimiento del ejemplo sería:

$$g1b2g3b2 = (1, 3, 2) \times (1, 1, 0, 0) \times (1, 2, 3) * (2, 0, 2, 2) *$$

De aquí se ve cómo la cuarta arista no ha sufrido ningún cambio, y el cuarto vértice está en su posición pero girado. Las aspas y los asteriscos distinguen qué elemento es en caso de que sólo haya uno. En el apéndice figuran otros ejemplos.

0.3 La ley del grupo

Todo esto está muy bien pero no serviría de nada sino hubiese una regla que indicase cómo se componen los movimientos, que es la única cosa que se puede hacer con el cubo: moverlo!

Técnicamente, la ley de composición es un doble producto semidirecto. La fórmula no es mucho mas complicada. Sabiendo que el movimiento 1 es $m1 = \alpha \times (a_1, a_2, a_3, a_4) \times \beta * (b_1, b_2, b_3, b_4)*$ y el movimiento 2 es $m2 = \gamma \times (c_1, c_2, c_3, c_4) \times \delta * (d_1, d_2, d_3, d_4)*$ y realizando primero m1 y luego m2 queda:

$$m2 \circ m1 = \gamma \circ \alpha \times (c_1, c_2, c_3, c_4) + (a_{\gamma^{-1}(1)}, a_{\gamma^{-1}(2)}, a_{\gamma^{-1}(3)}, a_{\gamma^{-1}(4)}) \times$$

$$\delta \circ \beta * (d_1, d_2, d_3, d_4) + (b_{\delta^{-1}(1)}, b_{\delta^{-1}(2)}, b_{\delta^{-1}(3)}, b_{\delta^{-1}(4)}) *$$

lo que en la práctica, es hacer actuar la permutación correspondiente sobre el vector del elemento siguiente, es decir

$$m2 \circ m1 = \gamma \circ \alpha \times \overrightarrow{c} + \gamma(\overrightarrow{a}) \times \delta \circ \beta * \overrightarrow{d} + \delta(\overrightarrow{b}) *$$

Por ejemplo si después de hacer el movimiento anterior, realizamos

$$b3v1b1v3b3 = (1, 3, 2, 4) \times (1, 0, 0, 1) \times (1, 4, 2, 3) * (1, 0, 2, 0) *$$

el resultado sería:

$$b3v1b1v3b3 - g1b2g3b2 = (1, 2, 3, 4) \times (1, 0, 1, 0) \times (1, 3, 4, 2) * (0, 2, 2, 2) *$$

Esta es la operación que se puede programar y con la que se obtienen los ejemplos del apéndice. Es lo único necesario para modelar el movimiento del cubo

0.4 El grupo de Rubik

$(\Omega, \circ)$ es un grupo, un doble producto semidirecto. Pero no es el grupo de Rubik. Efectivamente, no todos los elementos de Ω se pueden obtener moviendo el cubo. !Cuántas revistas han mencionado el hecho que un vértice girado no se puede obtener! Es decir $(1, 0, 0, 0)*$ no se puede conseguir. Existen 3 restricciones a este grupo que verifican todos sus elementos:

1. Fácilmente se ve de la operación del grupo que, como se parte de la identidad, siempre se ha de tener que

$$r_1 \equiv \sum_{i=1}^{4} a_i = 0$$

2. Análogamente

$$r_2 \equiv \sum_{i=1}^{4} b_i = 0$$

3. La tercera restricción también es sencilla de plantear:

$$r_3 \equiv sig(\alpha \circ \beta) = 1$$

   y es evidente que al componer dos movimientos se sigue verificando.

Es el programa de ordenador el que confirma que cualquier elemento de Ω sujeto a estas restricciones se puede conseguir, y por tanto ya no es necesario buscar más. Este es el grupo de Rubik:

$$GR = (\Omega \backslash r_1, r_2, r_3 \ ; \ \circ)$$

De aquí es fácil ver que el orden del grupo es $|GR| = 2^8 3^5 = 62208$. Con él se puede resolver el cubo y por tanto obtener cualquier otra posición. Ya no es necesario comprarse un cubo para jugar con él, basta tener un buen ordenador! En esto coincido con Lagrange (aparte de en el nombre) cuando se alegraba de haber conseguido expresar la mecánica sin dibujos, sino a base de una buena formulación.

0.5 Apéndice

1. Movimientos
   $b3n1b2n3b2 = (1, 3, 2, 4) \times (0, 0, 1, 1) \times (2, 3) * (2, 2, 2, 0)*$
   $b1v1b1v3b3 = (1, 2) \times (1, 0, 0, 1) \times (3, 4) * (1, 0, 2, 0)*$

$v1b1v3b3 = (1,4,3) \times (1,0,0,1) \times (1,3,2) * (1,0,2,0)*$

$b1g1b2g3b2 = (3,4) \times (1,1,0,0) \times (1,3,4,2) * (2,0,2,2)*$

$b2g1b1g3b3 = (1,3,4) \times (1,1,0,0) \times (1,2,3) * (0,1,0,2)*$

$b1 = (1,2,3,4) \times (1,2,3,4)*$

$b3n3b1n1a3n1a1n2a3b3a1n1b1 = (1,2)(3,4) \times (0,1,1,0) \times (1,2,4) * (2,0,0,1)*$

2. Potencias del tercer movimiento

   $v1b1v3b3 = (1,4,3) \times (1,0,0,1) \times (1,3,2) * (1,0,2,0)*$

   $v1b1v3b3\hat{}2 = (1,3,4) \times (1,0,1,0) \times (1,2,3) * (1,2,0,0)*$

3. Potencias del movimiento del ejemplo

   $g1b2g3b2 = (1,3,2) \times (1,1,0,0) \times (1,2,3) * (2,0,2,2)*$

   $g1b2g3b2\hat{}2 = (1,2,3) \times (0,1,1,0) \times (1,3,2) * (1,2,2,1)*$

   $g1b2g3b2\hat{}3 = (1,1,1,0)*$

   $g1b2g3b2\hat{}4 = (1,3,2) \times (1,1,0,0) \times (1,2,3) * (0,1,0,2)*$

   $g1b2g3b2\hat{}5 = (1,2,3) \times (0,1,1,0) \times (1,3,2) * (2,0,0,1)*$

   $g1b2g3b2\hat{}6 = (2,2,2,0)*$

   $g1b2g3b2\hat{}7 = (1,3,2) \times (1,1,0,0) \times (1,2,3) * (1,2,1,2)*$

   $g1b2g3b2\hat{}8 = (1,2,3) \times (0,1,1,0) \times (1,3,2) * (0,1,1,1)*$

4. Operar la sexta potencia anterior con el cuadrado del tercer movimiento

   $g1b2g3b2\hat{}6 - v1b1v3b3\hat{}2 = (1,3,4) \times (1,0,1,0) \times (1,2,3) * (0,1,2,0)*$