INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CAOS Y FRACTALES

J. ÁNGEL GONZÁLEZ

1. Sistemas dinámicos

1.1. Sistemas dinámicos discretos. Un sistema dinámico discreto es un dominio[1] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación continua $f : \Omega \to \Omega$. A partir de esta información, para cada $x_0 \in \Omega$, podemos construir la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ de iteraciones del punto x_0 por f (recuérdese que $f^n(x_0) = f \circ f^{n-1}(x_0)$). El objetivo del estudio de sistemas dinámicos discretos es entender el comportamiento asintótico de $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ y su dependencia del dato inicial x_0.

Por simplicidad, denotaremos $x_n := f^n(x_0)$.

1.1.1. Sistema logístico Naïve. Surge de considerar una población en la que el número de individuos de la siguiente generación es directamente proporcional al número de individios en la generación actual.

De este modo, su sistema dinámico viene determinado por la función $f(x) = \lambda x$ para un cierto $\lambda > 0$ prefijado. Entonces, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, la sucesión que engendra cumple $x_n = \lambda^n x_0$.

- Si $\lambda > 0$ entonces $x_n \to \infty$ para todo $x_0 \neq 0$.
- Si $\lambda = 1$ entonces $x_n = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $\lambda < 1$ entonces $x_0 \to 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.1.2. Límite de Fibonacci. Si F_n denota la sucesión de Fibonacci[2] entonces es fácil ver que $F_n \to \infty$. Sin embargo, el comportamiento relativo de la sucesión sí converge a un valor concreto. En efecto, definiendo la sucesión

$$x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Más aún, es fácil ver que x_n es de Cauchy y, por tanto, tiene un límite α que debe cumplir $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, esto es, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, el número aureo.

Esta sucesión resulta de gran importancia en el estudio de fenómenos de crecimiento celular, como la formación de la concha de los moluscos o el desarrollo del cáncer.

[1] i.e. un abierto conexo.

[2] Recuérdese que F_n viene definida por la sucesión que cumple $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ con los casos base $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$.

1.1.3. Sistema logístico. Mejorando el sistema logístico Naïve, es de suponer que, si bien cuando hay pocon individuos en la generación, esta crece proporcionalmente al número inicial; cuando la población aumenta se producen efectos competitivos (i.e. existe presión demográfica) y el crecimiento se ralentiza.

En ese caso, salvo reescalado de unidades, el sistema dinámico que regula el crecimiento de una población a lo largo de las generaciones viene determinado por la función $f(x) = \lambda x(1-x)$, para cierto $\lambda > 0$. Así, la sucesión de individios de la población cumple

$$x_n = \lambda x_{n-1}\left(1 - x_{n-1}\right)$$

1.2. Sistemas dinámicos continuos. Otra forma de describir la dinámica de un sistema es mediante una ligadura geométrica que condicione el devenir de un flujo. La idea subyacente es la misma que la de condicionar el fluir de un río prescribiendo su cauce.

Formalicemos esta idea. Toda nuestra dinámica ocurrirá en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Por un flujo entendemos una función que, dado un punto $x_0 \in \Omega$, nos dice a donde se mueve este punto x_0 para cada $t \in \mathbb{R}$. De este modo, un flujo es una aplicación

$$\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$$

que supondremos diferenciable. Dado $x_0 \in \Omega$, la función $\varphi_{x_0} = \varphi(x_0, \cdot) : \mathbb{R} \to \Omega$ es una curva y, por tanto, tiene una velocidad $\varphi'_{x_0}(t)$. Un sistema dinámico continuo no es más que la preescripción de la velocidad del flujo φ_{x_0} para cada $x_0 \in \Omega$, es decir, es dar una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y exigir que el flujo satisfaga

$$\varphi'_{x_0}(t) = X(\varphi_{x_0}(t))$$

o equivalentemente, dado $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, el objetivo es encontrar, para cada $x_0 \in \Omega$, una función $\alpha : \mathbb{R} \to \Omega$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & X(\alpha(t)) \\ \alpha(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

En consecuencia, la comprensión de un sistema dinámico continuo no es más que el entendimiento de la dinámica de ecuación diferencial ordinaria.

1.2.1. Ecuación logística Naïve. Si suponemos que la tasa de variación de los individios de una población, P, es directamente proporcional al número de individuos de esta población, tenemos que el modelo logístico más simple es

$$\frac{d}{dt}P = \lambda P$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que la solución de esta EDO es

$$P(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

y, por tanto, el comportamiento asintótico de este sistema es

- Si $\lambda > 0$ entonces $P(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.
- Si $\lambda = 0$ entonces $P(t) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda < 0$ entonces $P(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

1.2.2. Ecuación logística. Suponiendo el modelo más realísta de dinámica de la población que afirma que, al alcanzar un cierto nivel de población, el crecimiento se ralentiza, entonces la dinámica de la población viene dada por

$$\frac{d}{dt}P = \lambda P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ conocido como la *tasa de crecimiento* y cierto $K > 0$ conocido como la *tasa de persistencia o factor K*. Entonces, la solución de la EDO es

$$P(t) = K\frac{x_0 e^{\lambda t}}{K + x_0(e^{\lambda t} - 1)}$$

en particular, se tiene que $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$, es decir, la población tiende a estabilizarse en el valor K de equilibrio.

1.2.3. Sistema presa-depredador de Lotka-Volterra. Supongamos que, en un ecosistema, coexisten una presa (digamos ovejas) y un depredador (digamos lobos), con un número de individuos x e y, respectivamente. Ciertamente, la tasa de crecimiento de las ovejas es directamente proporcional al número de ovejas de la población (porque se defienden mutuamente de los lobos, cooperan, es más fácil la reproducción...) pero, sin embargo, se reduce por el número de encuentros entre ovejas y lobos (porque son cazadas), que podemos suponer proporcional al producto xy. De este modo, el número de ovejas satisface la ecuación

$$x' = ax - bxy$$

Por otra parte, la tasa de crecimiento de los lobos queda reducida por el número de lobos existente (pues se hacen competencia por la comida) pero aumenta por el número de encuentros con ovejas (porque son oportunidades de caza) que, nuevamente, es proporcional al producto xy. En ese caso, el número de lobos varía según

$$y' = -cy + dxy$$

Así, poniendo juntas ambas restricciones tenemos lo que se conoce como el *sistema de Lotka-Volterra*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & ax & - & bxy \\ y' & = & -cy & + & dxy \end{array}\right.$$

1.2.4. Ley de gravitación universal. Es la ley que, en mecánica clásica, rige el movimiento de los objetos por efecto de la gravedad. Esta ley afirma que la fuerza gravitatoria que ejerce un objeto de masa M sobre otro de masa m apunta en la misma dirección, pero sentido contrario, al vector que une ambos cuerpos, pero es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Esto es, si disponemos el origen de coordenadas de manera que el cuerpo M se encuentre en el origen y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es la posición de m respecto de M, se tiene que la fuerza ejercida por M sobre m, $F_{M\to m}$, es

$$F_{M\to m} = -G\frac{Mm}{\|\alpha\|^3}\alpha$$

donde $G \approx 6{,}67428 \cdot 10^{-11}$ es la conocida como *constante de gravitación universal.*

Además, recordemos que, por la segunda ley de Newton, se tiene que la fuerza que ejerce M sobre m es igual al producto de la masa m por su aceleración, esto es

$$F_{M\to m} = m\alpha''$$

y, de este modo, juntando ambas ecuaciones se tiene que la dinámica del sistema viene dada por la EDO de segundo orden

$$\alpha'' = -G\frac{M}{\|\alpha\|^3}\alpha$$

o, equivalentemente, en coordenadas $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ el sistema queda

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & -GM\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ y'' & = & -GM\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ z'' & = & -GM\frac{z}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right.$$

1.2.5. Ecuación de Schrödinger. Hasta ahora, todos los sistemas dinámicos continuos que hemos estudiado han venido modelizados como una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, no necesariamente debemos restringir nuestra mirada a estos casos, sino que, en efecto, algunas de las teorías modernas formulan la dinámica de un sistema en términos mucho más complejos que las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Uno de los primeros y más importantes ejemplos, es la formulación de la mecánica cuántica. En ella, se postula que el conjunto de posibles estados de un sistema físico vienen dados por un espacio de Hilbert separable, $\mathcal{H}$[3]. Así, el estado del sistema en función del tiempo viene dado por una aplicación $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, conocida como la *función de onda.*

[3]Usualmente, este espacio de Hilbert es el espacio $L^2(\Omega)$ de funciones de cuadrado integrable (en sentido Lebesgue) en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

En ese caso, la interpretación de Schrödinger de la mecánica cuántica afirma que existe un operador lineal autoadjunto[4] H, conocido como el *Hamiltoniano* del sistema, de manera que la función de onda de la partícula, ψ, satisfaga la ecuación en derivadas parciales conocida como la *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

donde $\hbar$ es la llamada *constante de Planck reducida*. Es decir, módulo unas constantes, el Hamiltoniano es el generador infinitesimal del flujo ψ.

Más aún, la mecánica cuántica postula que cada observable del sistema viene dado por un operador lineal autoadjunto de manera que, en el instante t, el valor esperado del observable viene dado por

$$\mathbb{E}_A(t) = \langle \psi(t), A\psi(t)\rangle = \int_\Omega A\left|\psi(x,t)\right|^2\,dx$$

en particular, la posición de la partícula en en instante t viene dada por el operador *'multiplicar por x'*, es decir, el operador X dado por $X(\psi(t))(x) = x\psi(x,t)$ y, por tanto, la posición esperada es

$$\mathbb{E}_X(t) = \int_\Omega x\left|\psi(x,t)\right|^2\,dx$$

lo que motiva la denominación de $\left|\psi(x,t)\right|^2$ como la *densidad de probabilidad*.

1.2.6. Ecuación del campo de Einstein. Otra forma de describir la dinámica de un sistema, absolutamente revolucionaria, la encontramos en la formulación de Einstein de la relatividad general.

La clave de esta interpretación reside en considerar que la ligadura del sistema no se halla en la prescripción de la velocidad de la partícula, sino en la geometría misma del universo. La idea es tan simple como observar que es exáctamente igual dar el campo de velocidades de una pelota cayendo por una montaña que dar la orografía de la montaña e indicar que la pelota cae por las *'lineas rectas'* de la montaña, esto es, las geodésicas o curvas de mínima acción.

Sin embargo, esta interpretación es muchísimo más fuerte, pues resulta más sencillo dar un modelo para la orografía de la montaña que indicar el movimiento errático que la pelota podría tener. Más aún, la comprensión de la geometría del universo permite entender realidades inalcanzables únicamente observando la dinámica de los objetos que en él se mueven. Como datos, la formulación de la relatividad general permite predecir

[4]Un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$, con $\mathcal{D}(A)$ su dominio de definición, se dice autoadjunto si para cualesquiera $\psi, \phi \in \mathcal{D}(A)$ se tiene

$$\langle \psi, A\phi\rangle = \langle A\psi, \phi\rangle$$

la existencia de agujeros negros de forma natural, así como ligeras desviaciones en las órbitas de los planetas del sistema solar hasta entonces imperceptibles.

Por completitud, la formulación completa de la teoría general es que el universo es una variedad 4-dimensional (en la mayor parte de los modelos, es $\mathbb{R}^4$ salvo algunos puntos) con una métrica semi-riemanniana g de signatura $(+,+,+,-)$, que satisface la *ecuación del campo de Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci de curvatura, R es la curvatura escalar (todas ellas referidas a la conexión de Levi-Civita inducida por g), Λ es la *constante cosmológica* [5], G es la constante de gravitación universal de Newton, c es la velocidad de la luz y $T_{\mu\nu}$ es el *tensor de energía-impulso*, también llamado de *tensión-energía* y viene impuesto por las restricciones físicas del sistema.

2. Sistemas dinámicos caóticos discretos

Informalmente, se dice que un sistema dinámico es caótico cuando ligeras perturbaciones en las condiciones iniciales del sistema derivan en soluciones intrínsecamente distintas. Sin embargo, a pesar de la claridad de esta idea, la formalización de esta intuición resulta muy compleja y, de hecho, existen diversas definiciones de los que se entiende por *caos*.

La definición más aceptada de qué es un sistema caótico se debe a Devaney [1] y trata de plasmar la idea de que una aplicación es caótica si depende de forma incontrolable de las condiciones iniciales y, X es irreducible en cierto sentido.

2.1. Definiciones básicas. Para enunciar con precisión qué significa que un sistema dinámico discreto sea caótico, necesitamos con anterioridad una serie de definiciones.

Definición 2.1. Diremos que $Y \subset \mathbb{R}^n$ es denso en $X \subset \mathbb{R}^n$ si, para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$ se tiene que $B(x,\epsilon) \cap Y \neq \emptyset$.

Observación 2.2. Es decir, X es denso si todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ están arbitráriamente cerca de puntos de X.

Ejemplo 2.3. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Definición 2.4. Un sistema dinámico discreto $f : X \to X$ se dice **topológicamente transitivo** si para cualesquiera abiertos no vacíos U y V de X existe un $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

[5] En la formulación original de Einstein, $\Lambda = 0$ y esta constante fue introducida para explicar ligeras desviaciones de los experimentos de los datos predichos. Actualmente la creencia es que estos errores se devieron a fallos de medición y que $\Lambda = 0$. Einstein afirmó que su idea de introducir la constante cosmológica fue *'la peor idea de su carrera'*.

Definición 2.5. Un sistema dinámico discreto $f : X \to X$ se dice que tiene **dependencia sensible de las condiciones iniciales** si existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $x \in X$ y cada entorno U de x, existe $y \in U$ y $n > 0$ tal que

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon$$

cualesquiera abiertos no vacíos U y V de X existe un $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Observación 2.6. Intuitivamente, un sistema dinámico tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales si puntos arbitráriamente cercanos derivan en puntos alejados más que ϵ.

Con toda esta tecnología, ya podemos definir lo que, según Devaney, es el caos en un sistema discreto.

Definición 2.7 (Devaney). Dada un sistema discreto sobre un subespacio $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \Omega$ diremos que f es **caótica** si cumple las tres condiciones siguientes.

- El conjunto de puntos periódicos (i.e. el conjunto de $x \in X$ tal que $f^n(x) = x$ para cierto $n > 0$) es denso en X,
- f es topológicamente transitivo.
- f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Resulta muy impactante, y a la par útil, observar que, de hecho, la última de las condiciones anteriores es redundante. La prueba puede encontrarse en [2].

Teorema 2.8 (Banks, Brooks, Cairns, Davis y Stacey)**.** *Si un sistema dinámico discreto $f : X \to X$, con f continua, tiene sus puntos periódicos densos y es topológicamente transitivo, entonces f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.*

Más aún, en el caso 1-dimensional se tiene la equivalencia.

Teorema 2.9. *El sistema dinámico discreto $f : [0,1] \to [0,1]$, con f continua, es topológicamente transitivo si y solo si tiene una órbita densa, i.e., existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $[a,b]$*

A la luz de la definición de caos, salta a la luz que, dado un sistema dinámico $f : \Omega \to \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, a pesar de que f presente comportamiento caótico, es necesario restringir el estudio a un subconjunto de Ω que cumpla las restricciones topológicas necesarias para satisfacer la definición de caos. Para encontrarlo, resulta de gran utilidad la existencia de un conjunto con unas propiedades especiales, conocido como atractor. El motivo de esta denominación es que el atractor 'atrapa' a todas aquellas órbitas que circulen en sus inmediaciones, de manera que la parte fundamental de la dinámica se concentra en torno al atractor.

Definición 2.10. Dada una aplicación $f : \Omega \to \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, diremos que $\mathcal{A} \subset \Omega$ es un **atractor** si cumple

- *(Compacidad)* $\mathcal{A}$ es compacto (i.e. cerrado y acotado).
- *(Invarianza)* $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.
- *(Atracción)* Existe un entorno U de $\mathcal{A}$ tal que, para todo $x \in U$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) \in \mathcal{A}$.

El máximo entorno de $\mathcal{A}$ en el que se cumple la propiedad de atracción se denomina el **dominio de atracción** de $\mathcal{A}$.

2.2. Tent map. Uno de los sistemas dinámicos más sencillos en los que se puede observar comportamiento caótico es en el *tent map*, definido mediante

$$\begin{array}{rccc} T: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

La clave para observar que $T : [0,1] \to [0,1]$ tiene comportamiento caótico es notar que, para cualquier intervalo de la forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, para $0 \leq k < 2^n$, se tiene que $T^n\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = [0,1]$. En partícular, por el teorema de Bolzano se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$ existe un $x_0 \in (\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ tal que $T^n(x_0) = x_0$. Así, en cada uno de estos intervalos existe una órbita periódica de periodo a lo sumo n. Como estos intervalos forma una base de la topología[6] de $[0,1]$ se tiene que el conjunto de órbitas periódicas de T es denso en $[0,1]$.

Precisamente por el mismo motivo se tiene que T es topológicamente transitivo. En efecto, dados abiertos U y V de $[0,1]$, existen n y k tales que $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \subset U$. De este modo, se tiene que $T^n(U) \supset T^n(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]) = [0,1]$ luego $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Finalmente, T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales por la misma razón. En efecto, dado $x_0 \in [0,1]$ y un entorno U de x_0, nuevamente existirá un entorno de x_0 contenido en U de la forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ para ciertas n y k. Supongamos que $T^n(x_0) \leq \frac{1}{2}$, en ese caso, como $T^n(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]) = [0,1]$ existirá $y_0 \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ con $T^n(y_0) = 1$ y, por tanto

$$|T^n(x_0) - T^n(y_0)| > \frac{1}{4}$$

Análogamente, si $T^n(x_0) \geq \frac{1}{2}$ encontraremos $y_0 \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ con $T^n(y_0) = 0$ lo que nos vuelve a dar la discrepancia deseada.

2.3. Shift map. El *shift map* es un ejemplo de los que se conoce como dinámica simbólica, esto es, permite estudiar la denámica de los sistemas siguiendo la traza del comportamiento errático de un punto.

[6]Es decir, cada abierto $U \subset [0,1]$ contiene a uno de estos intervalos, para n suficientemente grande y k apropiado.

Para enunciarlo, en primer lugar, debemos definir un nuevo espacio, Σ como el conjunto de sucesiones de 0's y 1's, i.e., $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$. Dotemos a este espacio de la topología de la convergencia uniforme o, dicho de otro modo, de la topología métrica inducida por la siguiente distancia

$$d((a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n - a_n|}{2^n}$$

Sobre este espacio métrico definimos el conocido como *shift map*, σ,que coge una sucesión y desecha su primer término, esto es, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ & (a_1, a_2, \ldots) & \mapsto & (a_2, a_3, \ldots) \end{array}$$

Proposición 2.11. *El* shift map *es continuo.*

Demostración. Sea $(a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$. Eligamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Observemos que, si $d((b_1, b_2, \ldots), (a_1, a_2, \ldots)) < \frac{1}{2^{N+1}}$ debe ser porque $a_k = b_k$ para $k = 1 \ldots, N+1$ (pues de lo contrario aportaría un sumando a la suma $\geq \frac{1}{2^{N+1}}$). En consecuencia, se tiene

$$d(\sigma(a_1 \ldots), \sigma(b_1 \ldots)) = d((a_2 \ldots), (b_2 \ldots)) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|b_{n+1} - a_{n+1}|}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

$\square$

Proposición 2.12. *El* shift map *es caótico.*

Demostración. En primer lugar, considérese la sucesión $x^0 \in \Sigma$ dada por

$$x^0 = (0\,1|\,00\;01\;10\;11|\;000\;001\ldots)$$

Obsérvese que, dada $(a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$ podemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon < \frac{1}{2^N}$. En ese caso, como x^0 contiene todas las posibles sucesiones finitas de 0's y 1's, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^M(x^0) = (a_1, a_2, \ldots, a_N, \ldots)$. De este modo, se tiene

$$d(\sigma^m(x^0), (a_1, a_2, \ldots)) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left|x^0_{n+1} - a_{n+1}\right|}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

y, por tanto, $\{\sigma^n(x^0)\}_{n=0}^{\infty}$ es densa en Σ, lo que prueba que existe una órbita densa y, en particular, que σ es topológicamente transitiva.

Con un argumento similar podemos probar que las órbitas periódicas son densas en Σ. En efecto, dado $(a_1, \ldots) \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$ sea, como siempre, $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Definimos entonces la sucesión periódica $x^a = (a_1, a_2, \ldots, a_N, a_1, a_2, \ldots, a_N, a_1, \ldots)$. Por el mismo argumento de siempre, se tiene que $d(x^a, a) < \frac{1}{2^N} < \epsilon$, lo que prueba la densidad de las órbitas periódicas.

Finalmente, respecto a la dependencia sensible del dato inicial, sea $(a_1, \ldots) \in \Sigma$, $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Sea $\tilde{a}_k$ el opuesto de a_k (i.e. $\tilde{a}_k = 0$ si $a_k = 1$ y $\tilde{a}_k = 1$ si $a_k = 0$). Definimos entonces el punto $y^a = (a_1, a_2, \ldots, a_N, \tilde{a}_{N+1}, \tilde{a}_{N+2}, \ldots)$. Como siempre, se tiene $d(a, y^a) < \frac{1}{2^N} < \epsilon$, pero, como todos los términos desde el $(N+1)$-ésimo en adelante son distintos, se tiene

$$d(\sigma^N(y^a), \sigma^N(a)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n+N} - \tilde{a}_{n+N}|}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 > \frac{1}{2}$$

luego el *shift map* tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con constante de sensibilidad, por ejemplo, igual a 1/2. $\square$

2.4. Modelo logístico discreto. El modelo logístico discreto es uno de los sistemas dinámicos discretos más complejos conocidos. Para cada $\lambda > 0$, queda definido por la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_\lambda : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x(1-x) \end{array}$$

Una de las principales dificultades en el entendimiento de este sistema es que depende fuertemente de los valores de λ. En primer lugar, obsérvese que f_λ alcanza su máximo en $x = \frac{1}{2}$, con valor máximo $M = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}$. De este modo, si $\lambda \leq 4$, f_λ mapea sobreyectivamente $[0,1]$ en sí mismo. Sin embargo, para $\lambda > 4$, la mayor parte de los puntos de $[0,1]$ escapan por la dinámica de f_λ, por lo que deberemos centrar nuestra atención en un subconjunto especial.

De este modo, todo apunta a que $\lambda = 4$ es un punto de inflexión en el comportamiento del mapa logísitico.

$\boxed{\mathbf{0 < \lambda < 4}}$

El mapa logístico presenta una fuerte bifurcación dependiente del parámetro λ. En efecto, para $0 < \lambda \leq 1$, f_λ tiene a 0 como único punto fijo atractor, y, por tanto, $f_\lambda^n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Sin embargo, para $1 < \lambda < 3$, 0 se torna un punto fijo inestable y aparece un nuevo punto fijo en $1 - \frac{1}{\lambda}$, en este caso estable. De este modo, $f_\lambda^n(x) \to 1 - \frac{1}{\lambda}$ para todo $x \in (0,1)$.

A partir de este momento, la bifurcación se vuelve mucho más complicada. Para $\lambda_1 := 3 < \lambda < \lambda_2 := 1 + \sqrt{6}$ aparece una 2-órbita periódica estable, que atrae a todos los puntos de $[0,1]$ salvo un conjunto numerable. Sin embargo, existe un cierto $\lambda_3 > \lambda_2$ tal que, para $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$, la 2-órbita periódica se vuelve inestable y aparece una 4-órbita estable. De hecho, existe una sucesión $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ tal que, si $\lambda_{n-1} < \lambda < \lambda_n$, la dinámica de f_λ tiene una 2^n-órbita periódica estable, que atrae a todos los puntos de $[0,1]$ salvo un conjunto numerable.

Sin embargo, la sucesión de los $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada, y por tanto tiene un límite $\lambda_\infty \approx 3{,}570$. A partir de este punto, para $\lambda_\infty < \lambda < 4$, la aplicación f_λ presenta un comportamiento muy errático y complejo, largamente estudiado, que incluye tanto parámetros con comportamiento caótico como vuelta a la estabilidad.

$\boxed{\lambda > \mathbf{4}}$

Como ya hemos comentado, para $\lambda > 4$, $f_\lambda[0,1] \not\subset [0,1]$ y, por tanto, no es posible realizar un análisis similar del mapa f_λ. Sin embargo, sí existe un subconjunto $\Lambda \subset [0,1]$ invariante, es decir, tal que $f_\lambda(\Lambda) \subset \Lambda$.

Para encontrarlo, observemos que, denotanto $x_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1-\lambda/4}}{2}$, se tiene que $f^{-1}(1) = \{x_\pm\}$, con $x_- < \frac{1}{2} < x_+$. Así, todos los puntos en $A_1 = (x_-, x_+)$ se salen de $[0,1]$ por la acción de f_λ, mientras que $f_\lambda([0,1] - A_1) \subset [0,1]$. Ahora bien, observemos que también los puntos de $A_2 = \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \in A_1\}$ escapan a su vez de $[0,1]$ aplicando 2 veces f_λ. Más aún, como f_λ es creciente en $[0,1/2]$ y decreciente en $[1/2,1]$, es fácil ver que A_2 es, a su vez, la unión disjunta de 2 intervalos. Inductivamente, se tiene que $A_n = \{x \,|\, f^{n-1}(x) \in A_1\}$ son los puntos que escapan en exáctamente n iteraciones del mapa f_λ y es la unión disjunta de n intervalos. De este modo, el conjunto de los puntos que escapan a la dinámica es $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y, por tanto

$$\Lambda = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Para entender la dinámica de la aplicación $f_\lambda : \Lambda \to \Lambda$ observemos a todo punto $x \in \Lambda$ se le puede asociar un elemento $S(x) \in \Sigma$, de modo que $S(x)_n = 0$ si $f^n(x) \in [0, x_-]$, mientras que $S(x)_n = 1$ si $f^n(x) \in [x_+, 1]$. Esta función se conoce como la **función itinerario** y, de hecho, se tiene

Proposición 2.13. *La* función itinerario $S : \Lambda \to \Sigma$ *es un homeomorfismo. Más aún, si* $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ *es el* shift map*, se tiene que* $f_\lambda = S \circ \sigma \circ S$.

Ahora bien, es fácil ver que, gracias al teorema de Banks-Brooks-Cairns-Davis y Stacey, se tiene que la propiedad de ser caótico es puramente topológica y, por ende, se conserva bajo conjugación de donde se deduce.

Corolario 2.14. *Para* $\lambda > 4$*, el mapa logistico* $f_\lambda : \Lambda \to \Lambda$ *es caótico.*

.

$\boxed{\lambda = \mathbf{4}}$

Respecto al caso límite $\lambda = 4$ observemos que, como $f_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, se tiene que f_4 envía $[0,1]$ sobre sí mismo. Obsérvese, también que, junto al sempiterno 0, f_4 tiene un punto fijo en $x_0 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Ahora bien, como f_4 es estrictamente creciente para $0 \leq x \leq 1/2$ y estrictamente decreciente en $1/2 \leq x \leq 1$, se tiene que f_4 es un homeomorfismo entre $[0,1/2]$ y $[0,1]$, así como entre $[1/2,1]$ y $[0,1]$. De este modo, f_4^2 tiene dos puntos fijos en $[0,1/2]$, uno de los cuales en 0, y otros dos en $[1/2,1s]$, uno de los cuales es x_0. Así, existen exáctamente dos puntos de periodo 2. Análogamente, f_4^3 tiene 8 puntos fijos, de los cuales 2 son los puntos fijos originales, otros 2 son las 2-órbitas periódicas y los 6 restantes, 3-órbitas periódicas.

Repitiendo el proceso análogamente, observamos que f_4^n envía homeomorficamente a cada uno de los intervalos $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ para $0 \leq k < 2^n$ y, por tanto, f_4^n tiene 2^n puntos fijos. Nótese que, en este caso, la descomposición en factores primos es muy importante, pues para cada uno de los divisores d de n, algunos de los puntos fijos de f_4^n serán órbitas d-periódicas y, después de descontar todas las órbitas periódicas asociadas a los divisores de n, las restantes serán órbitas n-periódicas.

Esta observación presagia que la dinámica de f_4 no es, para nada, trivial. De hecho, si observamos con detenimiento las gráficas del *tent map* y de f_4 vemos una gran similitud entre ámbas funciones pues, salvo la cuestión de diferenciabilidad, topológicamente son iguales. De hecho, esta observación se puede concretar en el siguiente cálculo.

Proposición 2.15. *Sea* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *la aplicación* $\varphi(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$. *Entonces* f_4 *es* ***semi-conjugado*** *del* tent map T *vía* φ*, es decir,* $\varphi \circ T = f_4 \circ \varphi$.

Observación 2.16. Obsérvese que, al contrario que en el caso $\lambda > 4$, φ no es un homeomorfismo (pues no es invertible) y, por tanto, T y f_4 no son conjugadas. Sin embargo, sí satisfacen una propiedad de semi-conjugación que es suficiente para nuestros propósitos.

Siguiendo la senda de una hipotética prueba de que la conjugación preserva el comportamiento caótico de un sistema, también se podría probar que la semiconjugación preserva la propiedad de ser caótico, por lo que tenemos.

Corolario 2.17. *El sistema dinámico discreto* $f_4 : [0,1] \to [0,1]$ *es caótico.*

3. Sistemas dinámicos caóticos continuos

3.1. Exponentes de Lyapunov.

3.2. El sistema de Lorenz.

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= rx-y-xz \\ z' &= xy-bz \end{cases}$$

4. Fractales y dimensiones

Un fractal es un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ que, en algún sentido que ahora precisaremos, tiene 'dimensión fraccionaria'. El estudio de estos subconjuntos resulta de gran utilidad, no solo en matemática pura, sino también en el análisis de sistemas dinámicos, pues los atractores extraños suelen ser fractales y compresión de imágenes, en tanto que el estudio de la autosimilitud subyacente a los fractales permite elucidar técnicas para reducir la redundancia. Más aún, dado el aspecto aleatorio de estos conjuntos, han sufrido una escalada creciente de interés en los círculos artísticos, al ser considerados un medio de expresión.

Nuestra primera meta es, como no puede ser de otra forma, tratar de definir de forma rigurosa la dimensión de un espacio, con la suficiente generalidad como para poder hablar, con propiedad, de espacios de dimensión no entera.

Existen muchas y muy diversas nociones de dimensión de un espacio, muchas de las cuales no son equivalentes. En esta sección estudiaremos algunas de ellas.

4.1. Dimensión de un espacio vectorial. Recuérdese que, dado un cuerpo $\mathbb{K}$, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, V, es un conjunto con dos operaciones definidas $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, conocidas como la suma de vectores y el producto por escalares, con propiedades similares a sus ejemplos concretos de $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ahora bien, es posible ver[7] que todo espacio vectorial tiene una base, i.e., existe un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ tales que todo vector $w \in V$ se escribe como combinación lineal finita de $\mathcal{B}$[8] y tal que $\mathcal{B}-\{v_i\}$ no genera todo el espacio para cualquier $v_i \in \mathcal{B}$. Es decir, en cierto modo, una base es un conjunto de generadores mínimo.

No es difícil ver que todas las bases tienen el mismo cardinal, por lo que podemos decir que un espacio vectorial V es de dimensión finita si tiene una base (y por tanto todas) finita. En ese caso, al cardinal de esa base se le conoce como la dimensión del espacio.

En este caso, la interpretación de la dimensión está muy clara. En efecto, como todo vector $v \in V$ se puede expresar de forma única como los elementos de la base, queda unívocamente determinado por los coeficientes que anteceden a cada vector de la base

[7] Usando el lema de Zorn.

[8] Esto es, existen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_1, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $w = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_{i_k}$.

(sus coordenadas). De este modo, la dimensión del espacio es 'el número de coordenadas que necesito para describir por completo un elemento del espacio'.

Observación 4.1. No todos los espacios vectoriales son de dimensión finita. Basta considerar, por ejemplo, el conjunto de funciónes continuas en $[0, 1]$.

4.2. Dimensión de una variedad. Una variedad M es un espacio topológico[9] tal que cada punto $x \in M$ tiene un entorno U homeomorfo[10] a $\mathbb{R}^n$ para algún n fijo. En ese caso, al menos localmente en un entorno, los puntos de la variedad quedan unívocamente determinados por un punto de $\mathbb{R}^n$ que, como hemos discutido a continuación, es un espacio vectorial de dimensión n. Por ello, se dice que la dimensión de la variedad M, $\dim_V M$, es n.

4.3. Dimensión topológica. La dimensión topológica de un espacio es la primera definición de dimensión que puede ser aplicada a cualquier espacio topológico, sin importan más propiedades.

Definición 4.2. Dado un espacio topológico X, una colección de abiertos $\mathcal{O}$ se dice que tiene orden m si existe un punto de X que pertenece a m elementos de $\mathcal{O}$ y es el mínimo m con esta propiedad.

Definición 4.3. Dado un espacio topológico X diremos que $m \in \mathbb{N}$ es un **candidato a dimensión** si para todo cubrimiento por abiertos de X existe un subrecubrimiento abierto de orden como mucho $m + 1$. Si el conjunto de candidatos a dimensión es no vacío, diremos que X es de dimensión finita, en cuyo caso, el mínimo de los candidatos a dimensión se denomina la **dimensión topógica** del espacio y se denota con $\dim_T X$.

Observación 4.4. Obsérvese que, en $\mathbb{R}^n$, todo cubrimiento por abierto tiene un subrecubrimiento por bolas pequeñas de modo que algún punto del espacio está en $n + 1$ bolas (un punto del plano está en 3, uno del espacio en 4...). Formalizando este argumento se puede ver que $\dim_T \mathbb{R}^n = n$, como era de esperar.

4.4. Dimensión Hausdorff. La medida de Hausdorff es, sin lugar a dudas, la medida más importante en el estudio de los fractales. En efecto, al contrario que las anteriores, esta medida puede tomar cualquier valor real, no necesariamente entero, y por tanto, suministra el marco adecuado para comenzar a entender los fractales.

[9]Piénsese, sin mucha pérdida de generalidad, en un conjunto con una distancia sobre el, de manera que dos puntos están 'cerca' si su distancia es pequeña. Es el framework necesario para hablar de continuidad.

[10]Existe una aplicación continua y biyectiva, con inversa continua

Antes de poder definir lo que es la dimensión de Hausdorff necesitamos conocer el concepto de medida de Hausdorff. Para ello, dado $U \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos el diámetro de U, $|U|$, por $|U| = \sup_{x,y \in U} |x - y|$.

Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ acotado, un δ-recubrimiento de F es un recubrimento de F por una cantidad numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de diámetro menor que δ. De este modo, definimos

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento} \right\}$$

Obsérvese que, cuando δ decrece, el conjunto de δ-recubrimientos es menor y, por tanto, el ínfimo aumenta, por lo que $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ es una función creciente de δ que tiene un límite (posiblemente infinito). De este modo, se define la **medida de Haussdorf s-dimensional** como

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F)$$

La medida de Haussdorf es, en efecto, una medida (posiblemente infinita) sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. De hecho, no es difícil ver que existe una estrecha relación entre H^n y la medida clásica de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, μ. En efecto, si $F \subset \mathcal{B}$ es un conjunto boreliano[11], entonces se tiene

$$\mathcal{H}^s(F) = \alpha_n \mu(F)$$

donde $\alpha_n = \mu(B^n)$ es la medida de la bola unidad.

Proposición 4.5. *Sea $f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ con constante c, es decir, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces para todo $F \subset \mathbb{R}^n$ acotado

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Idea de la demostración. Basta observar que todo δ-recubrimiento de F induce un $c\delta^\alpha$-recubrimiento de $f(F)$ y usar la monotonía de ínfimos y supremos. □

Corolario 4.6. *La medida de Hausdorff s-dimensional es invariante bajo isometrías.*

Gracias a la proposición anterior, podemos probar un lema de gran utilidad.

Lema 4.7. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Supongamos que, para algún $s > 0$ se tiene que $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, entonces, para todo $t > 0$ se tiene que $\mathcal{H}^t(F) = 0$.*

[11] La σ-álgebra de Borel es la mínima σ-álgebra que contiene los abiertos de $\mathbb{R}^n$. Signifique lo que signifique eso, pues no he definido σ-álgebra en pos de evitar que estas notas se conviertan en un tratado de teoría de la medida.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ un δ-recubrimiento de F, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

De este modo, tomando ínfimos se tiene que $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}\,\mathcal{H}^s_\delta(F)$ y, por tanto, como $\mathcal{H}^s_\delta$ está acotado en δ se tiene

$$\mathcal{H}^t(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \lim_{\delta\to 0} \delta^{t-s}\,\mathcal{H}^s_\delta(F) = 0$$

□

De este modo, se tiene que $\mathcal{H}^s(F)$ es una función que comienza divergiendo y que, posiblemente, al llegar a un cierto valor s_0 cae súbitamente a 0, es decir, existe $s_0 \in [0, \infty]$ tal que

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad s < s_0 \\ 0 & \text{si} \quad s > s_0 \end{cases}$$

a este valor s_0 se le denomina la **dimensión de Hausdorff** de F y se denota por $\dim_H F$.

Observación 4.8. El cálculo anterior nada dice sobre $\mathcal{H}^{\dim_H F}(F)$, que puede ser tanto finito como infinito. De hecho, los conjuntos con este valor finito se denominan s-conjuntos.

Finalmente, cabe notar que, a pesar de que la medida de Hausdorff ha sido definida en base a un δ-recubrimiento de conjuntos de cualquier forma resulta que podemos restringirnos a ciertas clases de elementos recubridores sin pérdida de información.

Teorema 4.9. *La dimensión de Hausdorff de un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es la misma que si restringimos la clase de los δ-recubrimientos a recubrimientos únicamente por bolas. Más aún, si $F \subset \mathbb{R}$, entonces podemos restringirnos a considerar únicamente conjuntos recubridores de la forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \ldots, 2^n - 1$.*

4.5. Dimensión de conteo de cajas. Supongamos que podemos definir una medida sobre los subconjuntos $F \subset \mathbb{R}^n$ que, de forma semejante a la dimensión de Hausdorff, de alguna manera dependa de una cierta cantidad relacionada con los δ-recubrimientos de F. Llamemos a esta hipotética medida, $\nu_\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Entonces, cabría esperar que ν_δ se comportase como δ elevado a una cierta potencia s, que tendría que ver con la forma en la que decrece la medida al decrecer δ, de manera que cabría esperar $\mu_\delta(F) \sim c\delta^s$. Ahora bien, este s indica, en cierto modo, 'cuanto' espacio llena el conjunto, cual es su tasa de crecimiento, que es precisamente lo que se espera que mida la dimensión de un espacio y, por ello, tendría sentido definir

$$\dim F = s = -\lim_{\delta\to 0} \frac{\log \nu_\delta(F)}{\log \delta}$$

Esta es, módulo un poco de técnica, la definición de la dimensión de conteo de cajas.

Definición 4.10. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Denotemos con $N_\delta(F)$ el número mínimo de elementos de los δ-recubrimientos de F, i.e., el mínimo de los $n \in \mathbb{N}$ tales que existen $U_1, \ldots, U_n \subset \mathbb{R}^n$, con $|U_k| < \delta$ tales que $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Entonces, se definen las **dimensiones de conteo de cajas superiores e inferiores** como

$$\underline{\dim}_B F = -\liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = -\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta}$$

Si ambos valores son iguales, se denota $\dim_B F$ y se denomina la **dimensión de conteo de cajas** de F.

Afortunadamente, al igual que lo ocurrido con la dimensión de Hausdorff, es posible considerar familiar mucho más restrictivas de δ-recubrimientos para calcular la dimensión de conteo de cajas.

Proposición 4.11. *En la definición de dimensión de conteo de cajas, es indiferente considerar como $N_\delta(F)$ cualquiera de las siguientes medidas*

- *El mínimo número de bolas de radio δ que cubren F.*
- *El mínimo número de cubos de lado δ que cubren F.*
- *(¡Muy útil computacionalmente!) En un mayado de $\mathbb{R}^n$ por cubos de lado δ, el número de cubos que intersecan a F.*
- *El mínimo número de conjuntos de diámetro menor que δ que cubren F.*
- *(¡Increible!) El número <u>máximo</u> de bolas disjuntas de radio δ con centro en F.*

4.6. Dimensión de empaquetamiento. La última de las medidas que veremos trata de alcanzar un punto medio entre la fuerte interpretación visual de la dimensión de conteo de cajas y las bondades técnicas de la dimensión de Hausdorff.

En concreto, observemos que, al contrario que lo ocurrido con la medida de conteo de cajas, la medida de Hausdorff está definida en base a cuando una cierta medida cambia drásticamente de valor, algo que no tiene contrapartida en la medida de conteo de cajas. Sin embargo, una de las definiciones equivalentes de la medida de conteo de cajas afirmaba que esta podía ser calculada como el número máximo de bolas disjuntas de radio δ con centro en F, es decir, en base al 'empaquetamiento' del espacio. La medida y dimensión de empaquetamiento trata de conciliar ambas visiones.

Definición 4.12. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Sea $\{B_{\rho_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ un conjunto de bolas con centro x_i y radio ρ_i, diremos que $\{B_{\rho_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ es un δ-empaquetamiento de F si todas las bolas son disjuntas dos a dos, $\rho_i < \delta$ y $x_i \in F$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definición 4.13. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Definimos la **premedida de empaquetamiento** de dimensión s de F, $\mathcal{P}_0^s(F)$ como

$$\mathcal{P}_0^s(F) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |B_i|^s \mid \{B_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ es un } \delta\text{-empaquetamiento de } F \right\}$$

Como su nombre indica, desgraciadamente $\mathcal{P}_0^s$ no es una medida, pues no satisface los axiomas de medida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Obsérvese, por ejemplo, que $\mathcal{P}_0^s(\mathbb{Q}^n) = \infty$, cuando debería ser $\mathcal{P}_0^s(\mathbb{Q}^n) = \sum \mathcal{P}_0^s(\{\star\}) = \sum 0 = 0$. Para solucionarlo, debe apelarse al teorema de Caratheodory.

Definición 4.14. Dado $F \subset \mathbb{R}^n$ se define la **medida de empaquetamiento** de F como

$$\mathcal{P}^s(F) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}^s(F_i) \mid F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}$$

Ahora sí, $\mathcal{P}^s$ sí es una medida y, al igual que ocurría con la medida de Hausdorff, es inicialmente infinito hasta que cae a 0.

Definición 4.15. Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, la dimensión de empaquetamiento de F, $\dim_P F$ se define como

$$\dim_P F = \sup \{ s\, \mathcal{P}^s(F) = \infty \}$$

4.7. Teorema de ordenación de dimensiones. Un resultado sorprendente, que ha costado el esfuerzo de muchos matemáticos, es observar que las dimensiones anteriormente descritas, así como muchas otras, se encuentran estríctamente ordenadas.

Teorema 4.16 (Mucha gente)**.** *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$, entonces se tiene*

$$\dim_T F \leq \dim_H F \leq \dim_B F \leq \dim_P F \leq n$$

5. Ejemplos de fractales

Una vez desarrolladas las técnicas para analizar los fractales, estudiemos algunos de los ejemplos más representativos. Es de destacar que, como algún lector haya podido notar, no he dado ninguna definición de qué es un fractal. El motivo es, simple y llanamente, porque actualmente la comunidad matemática no está de acuerdo en aceptar ninguna de las propuestas. Entre otras, se ha sugerido que un fractal sea un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con dimensión no entera, o un conjunto con dimensión de Hausdorff estrictamente menos que su dimensión topológica. Sin embargo, todas estas definiciones parecen ser demasiado restrictivas y no capturan por completo la esencia fractal.

5.1. Conjunto de Cantor. El primer ejemplo de fractal, que ya era conocido mucho tiempo atrás es el conocido como conjunto de Cantor. Este subconjunto de $[0,1]$ tiene muchas y muy diversas aplicaciones en matemáticas, tanto pura como aplicada. Por ejemplo, este conjunto es un ejemplo de conjunto no numerable, medible y de medida nula. Más aún, gracias a él puede construirse una función conocida como la *escalera del diablo*, que es una función derivable en casi todo punto (en sentido Lebesgue) con derivada 0 pero no constante; así como un ejemplo de una variable aleatoria que ni es discreta ni es absolutamente continua.

Su construcción es muy simple. Consideremos el intervalo $[0,1]$ y dividámolos en tres segmentos de la misma longitud, y elimínese el central. Esto nos da dos subintervalos de longitud $1/3$, a saber $C_1 = [0,1/3] \sqcup [2/3,1]$. Recursivamente, divídase cada uno de estos intervalos en tres subintervalos, de los cuales eliminamos el subintervalo central. De este modo, el n-ésimo conjunto de la sucesión queda $C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cap \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)$, de modo que el conjunto de Cantor es el resultado de realizar estas operaciones *ad infinitum*, esto es

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Otra forma sencilla de describirlo es observar que, casi todos los números $x \in [0,1]$ quedan unívocamente determinados por su expansión en base 3. De este modo, el conjunto de Cantor es el conjunto de puntos tales que ninguna de sus cifras decimales en base 3 es 1.

Gracias a esta construcción recursiva del conjunto de Cantor, podemos estimar la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor. Obsérvese que el conjunto de Cantor se divide en dos conjuntos disjuntos, $C = C^1 \sqcup C^2$, cada uno de los cuales es exáctamente igual al original salvo una dilatación de razón $\frac{1}{3}$. De este modo, como $\mathcal{H}^s$ es una medida se tiene para todo $s > 0$

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C^1) + \mathcal{H}^s(C^2) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) = \frac{2}{3^s}\mathcal{H}^s(C)$$

De este modo, si suponemos que $0 < \mathcal{H}^{\dim_H(C)}(C) < \infty$ (es así, pero no lo podemos probar con las técnicas que hemos desarrollado). $1 = \frac{2}{3^{\dim_H C}}$, es decir $\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$.

5.2. Polvo de Cantor alabeado. El polvo de Cantor alabeado es una de las posibles generalizaciones del conjunto de Cantor a dimensiones mayores. De hecho, construcción es muy similar a la del conjunto de Cantor.

Se comienza con el cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$, el cual se divide en 16 fragmentos iguales, de los cuales sólo 4 son salvados para la siguiente iteración. Nuevamente, a cada uno de estos 4 fragmentos se les aplica, recursivamente el proceso de eliminación y, el conjunto límite resultante es el polvo de Cantor alabeado (el nombre alabeado proviene de que deben tomarse los fragmentos salvados de forma ladeada para garantizar la simetría de la construcción).

Al igual que en su análogo uno dimensional, podemos estimar su dimensión de Hausdorff observando que el polvo de Cantor, D, de descompone en $D = \bigsqcup_{k=1}^{4} D^k$ con D^4 idéntico a D módulo una dilatación de razón $1/4$. Así, se tendría

$$\mathcal{H}^s(D) = \frac{4}{4^s}\mathcal{H}^s(D)$$

De manera que, si $0 < \mathcal{H}^{\dim_H(D)}(D) < \infty$ se tendría $\dim_H(D) = 1$. En particular, obsérvese que este es un ejemplo de conjunto que no dudaríamos de clasificar en fractal, pero cuya dimensión topológica coincide con su dimensión de Hausdorff.

5.3. Conjuntos autosimilares. Los ejemplos anteriormente analizados gozaban de una fuerte autosemejancia, esto es, un rica simetría que hacía que los conjuntos fuesen iguales a un número fijo de copias reescaladas de sí mismos.

Este proceso de autosemejancia resulta muy general en los fractales y, explotándolo adecuadamente puede extraerse información muy valiosa. El formalismo que permite entender correctamente la autosemejancia es mediante sistemas iterados de funciones, SIF (o IFS por sus siglas en inglés).

Definición 5.1. Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice *contractiva* si existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. En ese caso, se dice que λ es la constante de contracción de f.

Definición 5.2. Dado un conjunto finito de contracciónes $S_1, \ldots, S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podemos contruir la función sobre subconjuntos $S : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$S(A) = \bigcup_{k=1}^{m} S_k(A)$$

La función S así construida se denomina un **sistema de funciones iteradas**. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice un *atractor* de S si F es un punto fijo para S, esto es

$$F = S(F) = \bigcup_{k=1}^{m} S_k(F)$$

Una aplicación sencilla del teorema del punto fijo de Banach demuestra

Teorema 5.3. *Todo sistema de funciones iteradas tiene un único atractor.*

Más aún, en caso de que un fractal sea un atractor de un sistema de funciones iteradas, su dimensión está perfectamente determinada.

Teorema 5.4. *Sea $S_1, \ldots, S_m$ un sistema de funciones iteradas con constantes de contracción $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sea F su atractor. Entonces $\dim_H F = \dim_B F = s$, con s satisfaciendo*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^s = 1$$

Más aún, para este valor se tiene $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

5.3.1. Conjunto de Cantor revisado. Una vez que disponemos de la noción de sistema iterado de funciones, podemos dar una descripción más precisa del conjunto de Cantor. En efecto, consideremos las contracciones

$$S_1(x) = \frac{1}{3} \qquad\qquad S_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x$$

Es fácil ver que $C = S_1(C) \cup S_2(C)$ y, por tanto, C es el atractor de este SIF. Más aún, gracias al teorema anterior, el cálculo de la dimensión es riguroso.

Cabe notar que, gracias a esta descripción, también podemos rigorizar algo que antes sólo era una idea vaga en nuestra cabeza. En efecto, recordemos el *tent map* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$ que es un homeomorfismo de $[0, 1/2]$ y $1/2, 0$ con $[0, 1]$. Más aún, es fácil ver que $T \circ S_1 = id_{[0,1]}$ y que $T \circ S_2 = id_{[0,1]}$. De este modo, si $C \subset [0, 1]$ es el conjunto de Cantor, que también es atractor de $S = S_1 \cup S_2$, se tiene que

$$T(C) = T(S_1(C) \cup S_2(C)) = T(S_1(C)) \cup T(S_2(C)) = C \cup C = C$$

es decir el conjunto de Cantor es el atractor del *tent map.*

5.4. Conjuntos de Julia. Una de las más importantes colecciones de ejemplos de fractales surgen de forma natural al invertigar la dinámica de las funciones holomorfas. En efecto, sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, esto es, tal que su derivada compleja existe en todos los puntos [12].

Una pregunta natural sería estudiar la dinámica de $f^n(z_0)$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$. Ciertamente, esta órbita puede, o no, mantenerse acotada. Se denomina **conjunto relleno de Julia**, $K(f)$ al conjunto de puntos en los que f no diverge, esto es

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f^n(z) \not\to \infty\}$$

A partir de él, se define el **conjunto de Julia** como la frontera del conjunto relleno de Julia, esto es $J(f) = \partial K(f)$. Asimismo, al complementario del conjunto de Julia se le conoce como el **conjuto de Fatou**. Obsérvese que, considerando el plano complejo con el ∞ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$, esto es, la esfera de Riemann, entonces el conjunto de Fatou es

[12] Recuérdese que una función holomorfa es automáticamente infinitamente diferenciable y, no solo eso, es analítica, i.e., se expande en serie de Taylor alrededor de cada punto.

la inmensa mayoría de los puntos en los que $f^n(z)$ converge (posiblemente a ∞), mientras que el conjunto de Julia es el conjunto de puntos con 'convergencia condicional'.

Los conjuntos de Julia tienen propiedades muy ricas que pueden ser estudiadas usando técnicas de variable compleja, obteniendose resultados análogos al que sigue.

Teorema 5.5. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio complejo y sea $J(f)$ su conjunto de Julia, entonces*

- $J(f) = \partial \{z \in \mathbb{C} \mid f^n(z) \to \infty\}$.
- $J(f)$ *es no numerable, no vacío y compacto, pero no contiene puntos aislados.*
- $J(f)$ *es invariante por* f *y por* f^{-1} *y* $J(f) = J(f^p)$ *para cualquier* $p > 0$.
- $J(f)$ *es la clausura de* $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z)$ *para cualquier* $z \in J(f)$.
- $J(f)$ *es la frontera del dominio de atracción de cada punto fijo atractivo de* f.
- $J(f)$ *es la clausura de los puntos periódicos repulsores de* f.

5.5. Conjunto de Mandelbrot. Muy relacionados con los conjuntos de Julia está el conjunto de Mandelbrot. Para entenderlo, restrinjámonos al caso de que f sea un polinomio de grado 2. Vía un biholomorfismo, se tiene que f se puede escribir como $f_c = z^2 + c$.

La pregunta, entonces es entender los conjuntos de Julia en función del parámetro $c \in \mathbb{C}$. Para ello, parece razonable estudiar el conjunto de puntos en los que $J(f_c)$ es conexo. Sin embargo, a pesar del aspecto apacible de este conjunto, resulta extremadísimamente intrincado, tanto que recibe el nombre de **conjunto de Mandelbrot**, M y es se define

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J(f_c) \text{ es conexo}\}$$

El conjunto de Mandelbrot es un fractal muy complejo, profundamente autosemejante y con fuertes implicaciones para el entendimiento de los conjuntos de Julia. Pero quizá lo más sorprendente es que su definición es equivalente a otra serie de propiedades de f_c de carácter puramente analítico.

Teorema 5.6. *El conjunto de Mandelbrot,* M *es el conjunto de los* $c \in \mathbb{C}$ *tales que* $\{f_c^n(0)\}_{k=1}^{\infty}$ *se mantiene acotado, Más aún,* M *es el conjunto de puntos* $c \in \mathbb{C}$ *tales que* $f_c^n \not\to \infty$.

Muy recientemente se ha probado que el conjunto de Mandelbrot es conexo.

Teorema 5.7. *El conjunto de Mandelbrot,* M *es compacto, conexo y su complementario también es conexo. La frontera de* M *es de dimensión topológica* 1*, pero con dimensión de Hausdorff exáctamente* 2.

Referencias

[1] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison-Wesley, 1989.

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey. *On Devaney's Definition of Chaos.* The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4 (1992), pp. 332-334.