Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Convocatoria Enero (180 minutos): 16 de Enero de 2020

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.Cada apartado vale hasta 2 puntos.

Sean p, q dos primos tales que $q < p$. Denotamos $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$, $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ y $\alpha := (p + \sqrt{p})(q + \sqrt{q}) \in K$. Supongamos que existen números racionales $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $q - 1 = a^2$ y $p - 1 = b^2 q$ (por ejemplo, $q = 2$ y $p = 3$).

(1) Calcular el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$.

(2) Demostrar que las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ son $(p + \sqrt{p})(q + \sqrt{q})$, $(p - \sqrt{p})(q + \sqrt{q})$, $(p + \sqrt{p})(q - \sqrt{q})$ y $(p - \sqrt{p})(q - \sqrt{q})$. Calcular dicho polinomio mínimo.

(3) Sea $\beta := \sqrt{\alpha} \in \mathbb{R}$ el único número real positivo cuyo cuadrado es α. Probar que el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\beta)|\mathbb{Q}$ es 8 y calcular el polinomio mínimo f de β sobre $\mathbb{Q}$.

(4) Probar que la extensión $\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i})|\mathbb{Q}$ es de Galois.

(5) Estudiar si la extensión $\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i})|\mathbb{Q}$ es resoluble por radicales y an caso afirmativo determinar si todas sus subextensiones son resolubles por radicales.

(6) Expresar los automorfismos del grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i}) : \mathbb{Q})$ en términos de las imágenes de β e $\mathtt{i}$. Probar que $G(\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i}) : \mathbb{Q})$ contiene 12 elementos de orden 4, 3 elementos de orden 2 y 1 elemento de orden 1 (*Ayuda*: Puede ser beneficioso expresar todas las raíces de f en términos de β, $\sqrt{p}$ y $\sqrt{q}$).

(7) Demostrar que el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i}) : \mathbb{Q})$ es isomorfo al grupo $\mathcal{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$.

(8) Demostrar que el grupo $\mathcal{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$ tiene 3 subgrupos de orden 2, 6 subgrupos cíclicos de orden 4, un subgrupo isomorfo al grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, 3 subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, 4 subgrupos isomorfos al grupo cuaternión $\mathcal{Q}_8$. ¿Cuantos de ellos son subgrupos normales?

(9) Demostrar que $G(\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i}) : \mathbb{Q})$ tiene 3 subextensiones de grado 8, 7 subextensiones de grado 4 y 7 subextensiones de grado 2. ¿Cuantos de estas subextensiones son de Galois?

(10) Encontrar un sistema finito de como mucho tres generadores para cada una de las subextensiones de $\mathbb{Q}(\beta, \mathtt{i})|\mathbb{Q}$.