Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Mini-parcial (50 minutos): 30 de Noviembre de 2016

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con cuatro hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

Sea $a \in \mathbb{Z}$ un entero ≥ 2 libre de cuadrados tal que $a-1$ es el cuadrado de un número entero, y definimos los polinomios

$$f_1 := \mathtt{t}^4 - 2a\mathtt{t}^2 + a(a-1) \quad \text{y} \quad f_2 := \mathtt{t}^4 + 2a\mathtt{t}^2 + a(a-1).$$

Sea L un cuerpo de descomposición de $f_1 f_2$ sobre $\mathbb{Q}$ y sea $L_j \subset L$ un cuerpo de descomposición de f_j sobre $\mathbb{Q}$.

(1) Demostrar que los polinomios f_1 y f_2 son irreducibles en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$.

(2) Calcular el grado de la extensión $L_j|\mathbb{Q}$ para $j = 1, 2$ y de $L|\mathbb{Q}$, y encontrar una cantidad finita de generadores de cada una de ellas.

(3) Demostrar que el grupo de Galois de $G_j := G(L_j : \mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ para $j = 1, 2$.

(4) Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de L en términos de los generadores de $L|\mathbb{Q}$ obtenidos en el apartado (2) y deducir que el grupo G es abeliano.

(5) Demostrar que G posee exactamente un elemento de orden 1, tres elementos de orden 2 y cuatro elementos de orden 4.

(6) Demostrar que el grupo de Galois de $G := G(L : \mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

(7) Probar que G tiene exactamente un subgrupo de orden 1, tres subgrupos de orden 2, tres subgrupos de orden 4 y un subgrupo de orden 8. Determinar cuántos de los subgrupos de orden 4 son cíclicos.

(8) Para cada divisor positivo d del grado $[L : \mathbb{Q}]$ calcular cuántas subextensiones tiene $L|\mathbb{Q}$ de grado d.

(9) Encontrar generadores de cada subextensión de $L|\mathbb{Q}$.

(10) Sean H_1, H_2 y H_3 los subgrupos de orden 2 de G. Determinar la estructura de los cocientes G/H_i, expresarlos como grupos de Galois de subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ y exhibir generadores de las mismas.