Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen Febrero (180 minutos): 30 de Enero de 2018

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

Sean $f := \mathtt{t}^6 - 6\mathtt{t}^3 + 18$ y $L \subset \mathbb{C}$ el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Denotamos $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$.

(1) Demostrar que el polinomio f es irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$.

(2) Consideramos el polinomio $g := \mathtt{t}^3 - 3\mathtt{t}\sqrt[3]{18} - 6$. Probar

$$\eta := \sqrt[3]{3(1+\mathtt{i})} + \sqrt[3]{3(1-\mathtt{i})} \quad \text{y} \quad -\sqrt[3]{12}$$

son raíces reales de g. Demostrar que el polinomio irreducible de η sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{18})$ tiene grado 2. (*Ayuda: Demostrar que* $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} \in \mathbb{Q}$ *y que* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{18}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{18}, \eta)$).

(3) Demostrar que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3(1+\mathtt{i})}, \sqrt[3]{3(1-\mathtt{i})})|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{18}, \eta)$ tiene grado 2 y concluir que $L|\mathbb{Q}$ tiene grado 12 (*Ayuda: Relacionar el producto* $\sqrt[3]{3(1+\mathtt{i})}\sqrt[3]{3(1-\mathtt{i})}$) *con el elemento* $\sqrt[3]{18}$ *y el cuerpo* L *con* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3(1+\mathtt{i})}, \sqrt[3]{3(1-\mathtt{i})})$).

(4) Encontrar una cantidad finita de generadores de la extensión $L|\mathbb{Q}$ del tipo $\sqrt[\ell]{n}$ para n, ℓ enteros adecuados.

(5) Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de L en términos de los generadores de $L|\mathbb{Q}$ obtenidos en el apartado anterior.

(6) Demostrar que el grupo de Galois $G := G(L : \mathbb{Q})$ es isomorfo al grupo diedral $\mathcal{D}_6$.

(7) Calcular el orden de cada uno de los $\mathbb{Q}$-automorfismos de la extensión $L|\mathbb{Q}$. (*Ayuda: G posee exactamente un elemento de orden* 1, *siete elementos de orden* 2, *dos elementos de orden* 3 *y dos elementos de orden* 6).

(8) Probar que G tiene exactamente un subgrupo de orden 1, siete subgrupos de orden 2, un subgrupo de orden 3, tres subgrupos de orden 4, tres subgrupos de orden 6 y un subgrupo de orden 12. Determinar la estructura de cada uno de los subgrupos de orden 4 y de cada uno de los subgrupos de orden 6 (indicando en cada caso, cuántos hay de cada tipo).

(9) Para cada divisor positivo d del grado $[L : \mathbb{Q}]$ calcular cuántas subextensiones tiene $L|\mathbb{Q}$ de grado d. ¿Son todas de Galois? ¿Son todas cuasiradicales?

(10) Encontrar conjuntos finitos de generadores de cada una de las subextensiones de $L|\mathbb{Q}$.