Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen Convocatoria Enero (180 minutos): 22 de Enero de 2019

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

Consideramos los números complejos $\zeta := e^{2\pi\mathtt{i}/25}$ y $\alpha := r\zeta$, donde $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ y $r := \sqrt[5]{5}$ denota el único número real cuya potencia quinta es 5.

(1) Demostrar que el polinomio $f := \mathtt{t}^{20} + \mathtt{t}^{15} + \mathtt{t}^{10} + \mathtt{t}^5 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ y que ζ es una de sus raíces. Expresar en función de ζ todas las raíces de f en $\mathbb{C}$.

(2) Sean $L_1 := \mathbb{Q}(\zeta)$ y $L_2 := \mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$. Demostrar que los grados de las extensiones $L_1|\mathbb{Q}$ y $L_2|\mathbb{Q}$ son, respectivamente, 20 y 100, y que ambas son de Galois. *Ayuda: Recuerda que el grupo de Galois $G_1 := G(L_1 : \mathbb{Q})$ es cíclico y calcula el polinomio mínimo de r sobre L_1.*

(3) Sea $L_3 := \mathbb{Q}(\alpha)$. Probar que $L_3|\mathbb{Q}$ tiene grado 20, que $g := \mathtt{t}^{20} + 5\mathtt{t}^{15} + 25\mathtt{t}^{10} + 125\mathtt{t}^5 + 625$ es el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ y expresar sus raíces en función de ζ y r. Probar que $L_3|\mathbb{Q}$ no es de Galois. Determinar un sistema finito de generadores del cuerpo de descomposición $\mathbb{Q}_g$ de g sobre $\mathbb{Q}$ y calcular el grado de la extensión $\mathbb{Q}_g|\mathbb{Q}$.

(4) Estudiar si es abeliano cada uno de los grupos de Galois $G_k := G(L_k : \mathbb{Q})$, donde $k = 2, 3$.

En lo sucesivo denotamos $L := L_2$ y $G := G_2$.

(5) ¿Es resoluble el grupo de Galois G? En caso afirmativo explicar el algoritmo que utilizarías para expresar en términos de radicales las raíces de g.

(6) Demostrar que $L = \mathbb{Q}(\zeta, r)$ y expresar los automorfismos del grupo de Galois G en términos de los generadores ζ y r de la extensión $L|\mathbb{Q}$. Encontrar un sistema generador de G formado por dos elementos ϕ, ψ. *Ayuda: comprueba que la clase $2 + 25\mathbb{Z}$ genera el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_{25}^*$.*

(7) Expresar el algoritmo de la múltiplicación en G en términos de la expresión de los automorfismos del grupo de Galois G usando los generadores ζ y r obtenidos en el apartado (6).

(8) Demostrar que en un grupo cíclico de orden 20 hay un elemento de orden 1, un elemento de orden 2, dos elementos de orden 4, cuatro elementos de orden 5, cuatro elementos de orden 10 y ocho elementos de orden 20.

(9) Demostrar que G posee un elemento de orden 1, cinco elementos de orden 2, diez elementos de orden 4, veinticuatro elementos de orden 5, veinte elementos de orden 10 y cuarenta elementos de orden 20. *Ayuda: Puede ser útil usar los apartados* (6) *y* (7).

(10) Probar que $L|\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 4 y, exactamente, cinco subextensiones de grado 25. ¿Cuántas de las seis subextensiones anteriores son de Galois? Encontrar generadores de cada una de las seis subextensiones anteriores. *Dato: el polinomio $h := \mathtt{t}^5 - 10\mathtt{t}^3 + 5\mathtt{t}^2 + 10\mathtt{t} + 1$ es un polinomio anulador para $\theta := \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^7 + \zeta^{-7}$.*