Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Mini-parcial (120 minutos): 20 de Noviembre de 2018

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con cuatro hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

Consideramos los números complejos $\zeta := e^{2\pi \mathtt{i}/9}$ y $\alpha := \sqrt[3]{3}\zeta$, donde $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ y $\sqrt[3]{3}$ denota el único número real cuyo cubo es 3.

(1) Demostrar que el polinomio $f := \mathtt{t}^6 + \mathtt{t}^3 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ y que ζ es una de sus raíces. Expresar en función de ζ todas las raíces de f en $\mathbb{C}$.

(2) Sean $L_1 := \mathbb{Q}(\zeta)$ y $L_2 := \mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$. Demostrar que los grados de las extensiones $L_1|\mathbb{Q}$ y $L_2|\mathbb{Q}$ son, respectivamente, 6 y 18, y que ambas son de Galois. *Ayuda: Recuerda que el grupo de Galois $G_1 := G(L_1 : \mathbb{Q})$ es cíclico y calcula el polinomio mínimo de $\sqrt[3]{3}$ sobre $\mathbb{Q}$.*

(3) Sea $L_3 := \mathbb{Q}(\alpha)$. Demostrar que la extensión $L_3|\mathbb{Q}$ tiene grado 6 y no es de Galois. Probar que $g := \mathtt{t}^6 + 3\mathtt{t}^3 + 9$ es el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Expresar sus raíces en función de ζ y $\sqrt[3]{3}$. Determinar un sistema finito de generadores del cuerpo de descomposición $\mathbb{Q}_g$ de g sobre $\mathbb{Q}$ y calcular el grado de la extensión $\mathbb{Q}_g|\mathbb{Q}$.

(4) Estudiar si es abeliano cada uno de los grupos de Galois $G_k := G(L_k : \mathbb{Q})$, donde $k = 2, 3$.

En lo sucesivo denotamos $L := L_2$ y $G := G_2$.

(5) Demostrar que $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{3})$ y expresar los elementos del grupo de Galois G en términos de su acción sobre los generadores ζ y $\sqrt[3]{3}$ de la extensión $L|\mathbb{Q}$. Encontrar un sistema generador del grupo G formado por dos elementos. *Ayuda: comprueba que la clase de 2 genera el grupo mutiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$.*

(6) Demostrar que G posee, exactamente, un elemento de orden 1, tres elementos de orden 2, ocho de orden 3 y seis de orden 6.

(7) Probar que G tiene, exactamente, un subgrupo de orden 1, tres subgrupos de orden 2, cuatro subgrupos de orden 3, cuatro subgrupos de orden 6 (de los que tres son cíclicos y el restante isomorfo al grupo de permutaciones $\mathcal{S}_3$ o, lo que es lo mismo, isomorfo al grupo diedral $\mathcal{D}_3$), un subgrupo de orden 9 y un subgrupo de orden 18.

(8) ¿Cuántos subgrupos normales tiene G? ¿De qué órdenes?

(9) Calcular, para cada divisor positivo d del grado $[L : \mathbb{Q}]$, cuántas subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ tienen grado d. ¿Cuántas de estas subextensiones son de Galois?

(10) Encontrar generadores de cada subextensión de $L|\mathbb{Q}$.