| Nombre: | | Calificación |
|---|---|---|
| Apellidos: | | |
| DNI/Alias | | |
| Titulación | | |

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**Examen Febrero (180 minutos)**: Jueves 4 de Febrero de 2021

*Instrucciones:* Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

**Ejercicio.** Sean $p$ un número primo impar, $\zeta := e^{2\pi \mathtt{i}/p}$, $L_1 \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $f_1(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^p - 2$ y $F \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(\mathtt{t}) := (\mathtt{t}^p - 2)(\mathtt{t}^p - 3)$.

(1) Calcular el grado de la extensión $L_1|\mathbb{Q}$ y el orden del grupo de Galois $G_1 := G(L_1 : \mathbb{Q})$. ¿Es $G_1$ un grupo abeliano? ¿Es $G_1$ un grupo resoluble?

(2) Encontrar un sistema generador de $G_1$ formado por dos elementos y encontrar una relación no trivial entre ellos.

(3) Demostrar explícitamente que $\sqrt[p]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \zeta)$ y $\sqrt[p]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[p]{3}, \zeta)$.

(4) Sean $L_2 \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $f_2(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^p - 3$ y $L = L_1 \cap L_2$. Demostrar que $[L : \mathbb{Q}] = p - 1$ y encontrar un elemento primitivo de la extensión $L|\mathbb{Q}$.

(5) Demostrar que $[F : \mathbb{Q}] = p^2(p-1)$ y determinar el orden del grupo de Galois $G := G(F : \mathbb{Q})$. ¿Es $G$ un grupo abeliano? ¿Es $G$ un grupo resoluble?

(6) Demostrar que $G$ posee un subgrupo normal $N$ de orden $p^2$ y que $N$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. ¿Es $G$ un grupo diedral? (*Ayuda*: Probar que $G$ no contiene elementos de orden $p^2$).

(7) Demostrar que $G$ tiene $p^2$ elementos de orden 2.

(8) Demostrar que $G$ posee algún subgrupo diedral de orden $2p$.

Suponemos en lo sucesivo $p = 3$.

(9) Demostrar que $G$ tiene un elemento de orden 1, nueve elementos de order 2 y 8 elementos de orden 3. Demostrar que todos los subgrupos de orden 6 de $G$ son isomorfos a $\mathcal{D}_3$ y calcular el número de ellos.

(10) Encontrar sistemas finitos de generadores de todas las subextensiones de $F|\mathbb{Q}$. ¿Cuáles son de Galois?