Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen Enero (180 minutos): Jueves 13 de Enero de 2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

Ejercicio. Sean $L_1 \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio ciclotómico ϕ_7, $L_2 \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio ciclotómico ϕ_9 y L un cuerpo de descomposición de $\phi_7 \cdot \phi_9$.

(1) Demostrar que L es un cuerpo de descomposición de ϕ_{63}. Demostrar que $[L : Q] = 36$ y que $G(L : \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$.

(2) Encontrar un elemento primitivo de la extansión $L|\mathbb{Q}$ y calcular explícitamente su polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}$.

(3) Encontrar un sistema generador de $G(L : \mathbb{Q})$ formado por dos elementos y construir un isomorfismo entre $G(L : \mathbb{Q})$ y $G(L_1 : \mathbb{Q}) \times G(L_2 : \mathbb{Q})$.

(4) Encontrar una torre cíclica para $G(L : \mathbb{Q})$ y una torre de resolución para $L|\mathbb{Q}$.

(5) Demostrar que $G(L : \mathbb{Q})$ tiene un elemento de orden 1, tres elementos de orden 2, ocho elementos de orden 3 y veinticuatro elementos de orden 6.

(6) Determinar cuántos subgrupos tiene $G(L : \mathbb{Q})$ de ordenes 2, 3 y 6.

(7) Demostrar que $G(L : \mathbb{Q})$ tiene un único subgrupo de orden 4 (isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$), un único subgrupo de orden 9 (isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$), cuatro subgrupos de orden 12 (todos ellos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$), tres subgrupos de orden 18 (todos ellos isomorfos a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$).

(8) Demostrar que $L|\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 9 y una única subextensión de grado 4. Encontrar sistemas de generadores para cada una de las subextensiones anteriores.

(9) Demostrar que hay tres subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ de grado 2 y encontrar generadores de cada una de ellas.

(10) Encontrar generadores de dos de las subextensiones de grado 3 de $L|\mathbb{Q}$, de dos de las subextensiones de grado 6 de $L|\mathbb{Q}$, de dos de las subextensiones de grado 12 de $L|\mathbb{Q}$ y de dos de las subextensiones de grado 18 de $L|\mathbb{Q}$.