Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Febrero (180 minutos): 10 de Febrero de 2017

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con cuatro hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1,25 puntos cada uno.

1. Sean P_0, P_1 y P_2 tres puntos no alineados en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y $L \subset \mathbb{P}^2$ una recta que no pasa por ninguno de ellos. Consideramos una referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ donde $P_3 \in \mathbb{P}^2$ es un punto adecuado de $\mathbb{P}^2$.

(i) Demostrar que cualquier ecuación implícita de L con respecto a $\mathscr{R}$ es de la forma $a_0\mathtt{x}_0+a_1\mathtt{x}_1+a_2\mathtt{x}_2 = 0$ donde cada $a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(ii) Calcular ecuaciones implícitas de las rectas $\mathtt{V}(P_2, P_3)$, $\mathtt{V}(P_1, P_3)$ y $\mathtt{V}(P_1, P_2)$ con respecto a $\mathscr{R}$ y las coordenadas de $Q_1 := L \cap \mathtt{V}(P_2, P_3)$, $Q_2 := L \cap \mathtt{V}(P_1, P_3)$ y $Q_3 := L \cap \mathtt{V}(P_1, P_2)$ con respecto a $\mathscr{R}$.

(iii) Calcular ecuaciones implícitas de las rectas $\mathtt{V}(P_1, Q_1)$, $\mathtt{V}(P_2, Q_2)$ y $\mathtt{V}(P_3, Q_3)$ con respecto a $\mathscr{R}$ y las coordenadas de $M_1 := \mathtt{V}(P_2, Q_2) \cap \mathtt{V}(P_3, Q_3)$, $M_2 := \mathtt{V}(P_1, Q_1) \cap \mathtt{V}(P_3, Q_3)$ y $M_3 := \mathtt{V}(P_1, Q_1) \cap \mathtt{V}(P_2, Q_2)$ con respecto a $\mathscr{R}$.

(iv) Calcular ecuaciones implícitas de las rectas $L_1 := \mathtt{V}(P_1, M_1)$, $L_2 := \mathtt{V}(P_2, M_2)$ y $L_3 := \mathtt{V}(P_3, M_3)$ y demostrar que son concurrentes, es decir, que se cortan en un punto.

2. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [\mathtt{x}_0 - 2\mathtt{x}_1 : -\mathtt{x}_1 : 2\mathtt{x}_0 - 2\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 : 2\mathtt{x}_0 - 2\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los planos invariantes para f.

(ii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 :\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 :\ \mathtt{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una simetría, calcular su conjunto de puntos fijos y su dirección.

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} :\ 1 + 2\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_3^2 - 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 - 2\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y demostrar que dicho centro es $(-1, 1, 0)$.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.