Ejercicios de refuerzo TEMA IV

1. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 - 4x_1 + 4x_3 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

2. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ \frac{1}{2} - 2x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ \frac{1}{2} - 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

4. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

5. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}: \ -3\mathtt{x}_1^2 - 3\mathtt{x}_2^2 - 2\mathtt{x}_3^2 + 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 + 2\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(ii) Calcular un hiperplano H_1 de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_1 = \varnothing$. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_1 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_1$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_1$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_1$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iii) Calcular un hiperplano H_2 de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_2$ es un punto. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_2 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_2$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_2$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_2$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iv) Calcular un hiperplano H_3 de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_3$ es una cónica no degenerada. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_3 := \mathbb{P}^3 \setminus H_3$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_3 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_3$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_3$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_3$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

6. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}: \ 2\mathtt{x}_0^2 - \mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_2^2 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 + 4\mathtt{x}_0\mathtt{x}_3 - 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 - 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 + 6\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(ii) Calcular un hiperplano H_1 de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_1$ es un par de rectas. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_1 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_1$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_1$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_1$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iii) Calcular un hiperplano H_2 de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_2$ es una cónica no degenerada. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_2 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_2$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_2$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_2$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iv) Construir una aplicación biyectiva $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \overline{\mathcal{Q}}$ cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2.

7. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 + 2\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_3^2 - 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 - 2\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y demostrar que dicho centro es $(-1, 1, 0)$.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

8. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 + 2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 + 3\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + \mathrm{x}_3^2 + 4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y calcular dicho centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

9. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ -2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 + 4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 - 2\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada sin centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para esta cuádrica.

10. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}: \ x_0^2 + 4\mathrm{x}_0\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_0\mathrm{x}_2 + 4\mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2 - \mathrm{x}_3^2 + 2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 - 2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 - 2\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida.

(ii) Consideramos el espacio afin $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$ donde H es el hiperplano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1 = 0$. Consideramos la superficie cuádrica $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}$. Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y calcular dicho centro.

(iii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

11. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}: \ -2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_3 - 2\mathtt{x}_1^2 + 4\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 + 2\mathtt{x}_2^2 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida.

(ii) Consideramos el espacio afin $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$ donde H es el hiperplano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 0$. Consideramos la superficie cuádrica $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}$. Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada sin centro.

(iii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.