Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mini-parcial (50 minutos): 30 de Noviembre de 2016

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con cuatro hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Cada apartado vale 1 punto, menos los apartados **1.**(v) y **3.**(v) que valen 2 puntos cada uno. Los apartados **3.**(iv) y **3.**(v) se pueden resolver de forma conjunta o de forma independiente.

1. Sea G el baricentro de un triángulo $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ de vértices A, B y C y sea $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que pasa por el punto G, no pasa por el vértice A y no es paralela ni a la recta $V(A,B)$ ni a la recta $V(A,C)$. Consideremos la referencia cartesiana $\mathcal{R} := \{A; \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}\}$.

(i) Calcular las coordenadas de G con respecto a $\mathcal{R}$.
(ii) Probar que L admite una ecuación implícita del tipo $a\mathtt{x} + b\mathtt{y} = \frac{a+b}{3}$ con respecto a $\mathcal{R}$ para ciertos valores $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (que dependen de cada recta L).
(iii) Calcular las coordenadas de $P := V(A,B) \cap L$ y $Q := V(A,C) \cap L$ con respecto a $\mathcal{R}$ en función de los valores a, b del apartado (ii).
(iv) Calcular $u, v \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{PB} = u \cdot \overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{QC} = v \cdot \overrightarrow{QA}$.
(v) Demostrar que $4uv \leq 1$.

2. Consideremos en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ los seis puntos distintos

$$P_0 := [1:0:0], \quad P_1 := [0:1:0], \quad P_2 := [0:0:1],$$
$$Q_0 := [0:a_1:a_2], \quad Q_1 := [b_0:0:b_2] \quad \text{y} \quad Q_2 := [c_0:c_1:0],$$

(i) Calcular ecuaciones de las rectas $L_i := \mathtt{V}(P_i, Q_i)$, donde $i = 0, 1, 2$.
(ii) Demostrar que $L_0 \cap L_1 \cap L_2$ es un punto si y sólo si $a_1 b_2 c_0 = a_2 b_0 c_1$.

3. Consideremos en $\mathbb{P}^3$ los puntos $A := [1:0:0:0]$ y $B := [0:1:0:0]$ y las rectas $L_1 := \{\mathtt{x}_0 = \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2 = 0\}$ y $L_2 := \{\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 = 0, \mathtt{x}_3 = 0\}$. Sea $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ una aplicación proyectiva que transforma A en B y deja fijos todos los puntos de $L_1 \cup L_2$.

(i) Probar que L_1 y L_2 no son coplanarias.
(ii) Calcular la familia de los planos que contienen a la recta L_i para $i = 1, 2$.
(iii) Demostrar que los planos que contienen a la recta L_i son invariantes por f para $i = 1, 2$.
(iv) ¿Es f una homografía? ¿Es única?
(v) Encontrar la matriz respecto de la referencia proyectiva estándar de $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.