



Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>

**Examen de Junio (180 minutos): 20 de Junio de 2018**

*Instrucciones:* Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas las hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación (si no me lo habéis dado antes). Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1 punto cada uno.

1. Consideramos los puntos  $P_0 := [1 : 1 : 0]$ ,  $P_1 := [1 : 0 : 0]$ ,  $P_2 := [1 : 0 : 1]$ ,  $P_3 := [-1 : -2 : -1] \in \mathbb{P}_2$  y el cuadrilátero  $\mathcal{C}$  de vértices  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

(i) Determinar si los puntos  $P_0, P_1, P_2, P_3$  forman una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}_2$ . En caso afirmativo calcular la matriz de cambio de referencia de la referencia proyectiva estándar a la referencia proyectiva  $\mathcal{R} := \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ .

(ii) Calcular una ecuación de una recta  $L_1$  de  $\mathbb{P}_2$  (que no pasa por ninguno de los puntos  $P_i$ ) tal que  $\mathcal{C}$  en el plano afín  $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_1$  no tiene ningún par de lados paralelos. ¿Es única?

(iii) Calcular una recta  $L_2$  de  $\mathbb{P}_2$  (que no pasa por ninguno de los puntos  $P_i$ ) tal que  $\mathcal{C}$  en el plano afín  $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_2$  es un trapecio y no un rectángulo. ¿Es única?

(iv) Calcular una recta  $L_3$  de  $\mathbb{P}_2$  (que no pasa por ninguno de los puntos  $P_i$ ) tal que  $\mathcal{C}$  en el plano afín  $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_3$  es un paralelogramo. ¿Es única?

2. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [-2x_1 : -2x_0 : 2x_0 + 2x_1 + 2x_3 : 2x_0 + 2x_1 + 2x_2].$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de  $f$  y los hiperplanos invariantes para  $f$ . ¿Qué tipo de homografía es  $f$ ?

(ii) Demostrar que por cada punto  $P \in \mathbb{P}^3$  pasa una recta invariante de  $f$ . ¿Existe algún punto por el que pase más de una? En caso afirmativo, ¿Cuántas rectas invariantes pueden pasar por un punto? ¿Qué tipos de homografías obtenemos al restringir  $f$  a cada una de las rectas invariantes de  $f$ ?

(iii) Consideramos el hiperplano  $H_1 : x_0 + x_1 = 0$  y el espacio afín  $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$ . Demostrar que la restricción  $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_1$  es una simetría. Calcular la dirección y la base de la simetría.

(iv) Consideramos el hiperplano  $H_2 : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$  y el espacio afín  $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$ . Demostrar que la restricción  $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_2$  es una simetría. Calcular la dirección y la base de la simetría.

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de  $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$  de ecuación:

$$\mathcal{Q} : x_1 - x_2 - x_3 + x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Sean  $\overline{\mathcal{Q}}$  la completación proyectiva de  $\mathcal{Q}$  y  $\mathcal{Q}_\infty$  su cónica de infinito.

(i) Demostrar que  $\mathcal{Q}$  es una superficie cuádrica no degenerada sin centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}^3$  respecto de la que la ecuación de  $\mathcal{Q}$  sea su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar  $\mathcal{Q}$  y decidir si por cada punto de  $\mathcal{Q}$  pasa alguna recta contenida en  $\mathcal{Q}$ . En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente?

(iii) Calcular una referencia proyectiva  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$  respecto de la que la ecuación de  $\overline{\mathcal{Q}}$  sea su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar  $\overline{\mathcal{Q}}$  y decidir si por cada punto de  $\mathcal{Q}$  pasa alguna recta contenida en  $\mathcal{Q}$ . En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente?

(iv) Calcular una referencia proyectiva  $\mathcal{R}'$  del hiperplano de infinito  $\mathbb{A}_\infty$  respecto de la que la ecuación de  $\mathcal{Q}_\infty$  sea su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar  $\mathcal{Q}_\infty$ . Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica  $\mathcal{Q}$ .