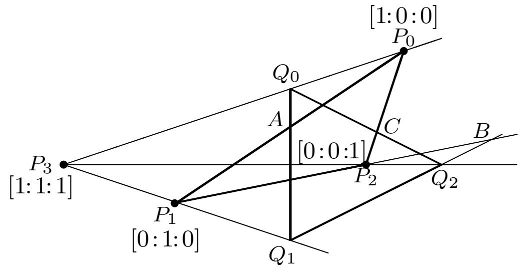
Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Septiembre (180 minutos): 1 de Septiembre de 2020

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1 punto cada uno.

1. Consideramos la figura siguiente formada por puntos y rectas de $\mathbb{P}^2$ de tal forma que $P_0 := [1:0:0]$, $P_1 := [0:1:0]$, $P_2 := [0:0:1]$ y $P_3 := [1:1:1]$:



(i) Determinar como son las coordenadas de los puntos Q_0, Q_1 y Q_2.

(ii) Calcular ecuaciones implicitas de las rectas $\mathtt{V}(Q_0, Q_1)$ $\mathtt{V}(Q_0, Q_2)$, $\mathtt{V}(Q_1, Q_2)$, $\mathtt{V}(P_0, P_1)$, $\mathtt{V}(P_0, P_2)$ y $\mathtt{V}(P_1, P_2)$.

(iii) Calcular las coordenadas de los puntos $A := \mathtt{V}(Q_0, Q_1) \cap \mathtt{V}(P_0, P_1)$, $B := \mathtt{V}(Q_1, Q_2) \cap \mathtt{V}(P_1, P_2)$ y $C := \mathtt{V}(Q_0, Q_2) \cap \mathtt{V}(P_0, P_2)$.

(iv) Demostrar que los puntos A, B y C están alineados.

2. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [4\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_3 : 2\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_3 : 6\mathtt{x}_0 - 6\mathtt{x}_1 + 3\mathtt{x}_2 + 6\mathtt{x}_3 : \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + 4\mathtt{x}_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los planos invariantes para f. Calcular el punto proyectivo $P_0 \in \mathbb{P}^3$ por el que pasan todos los hiperplanos invariantes para f.

(ii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 :\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una traslación y calcular el vector v de dicha traslación.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 :\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una transvección y encontrar una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}}$ tenga tantos ceros como sea posible.

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} :\ 1 + 2\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2 + 3\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_3^2 + 4\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 + 2\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y calcular dicho centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.