Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Mini-parcial (120 minutos): 20 de Noviembre de 2019

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con cuatro hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. El ejercicio 1 vale 2 puntos, los otros dos 4 puntos cada uno.

1. Sean A_1, A_2, A_3, A_4 cuatro puntos coplanarios tales que los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}$ y $\overrightarrow{A_3A_4}$ son paralelos, mientras que los vectores $\overrightarrow{A_1A_4}$ y $\overrightarrow{A_2A_3}$ no lo son. Definimos los puntos

$$B := \mathtt{V}(\{A_1, A_3\}) \cap \mathtt{V}(\{A_2, A_4\}) \quad \text{y} \quad C := \mathtt{V}(\{A_1, A_4\}) \cap \mathtt{V}(\{A_2, A_3\}).$$

Probar que la recta $r := \mathtt{V}(\{B, C\})$ corta los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_3A_4}$ en sus respectivos puntos medios.

2. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(i) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ sin puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma?

(ii) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ con un único punto fijo. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

(iii) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ con exactamente dos puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

(iv) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ con al menos tres puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

3. Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la homografía que transforma $[\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2]$ en $[\mathtt{x}_1 : -\mathtt{x}_0 - 2\mathtt{x}_1 : -2\mathtt{x}_0 - 2\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2]$.

(i) Demostrar que f es una elación y calcular su conjunto de puntos fijos.

(ii) Calcular todos las rectas invariantes de f e indicar qué tipo de aplicación proyectiva es la restricción $f|_L$ para cada una de las rectas invariantes L de f.

(iii) Sea $L_1 \subset \mathbb{P}^2$ una recta de puntos fijos de f y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^2 \setminus L_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ es una afinidad, clasificarla y obtener una referencia de $\mathbb{A}_1$ de tal forma que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_1}$ sea lo más parecida posible a una matriz diagonal.

(iv) Sea $L_2 \subset \mathbb{P}^2$ una recta invariante para f, que no es una recta de puntos fijos, y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^2 \setminus L_2$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una afinidad, clasificarla y obtener una referencia de $\mathbb{A}_2$ de tal forma que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ sea lo más parecida posible a una matriz diagonal.

Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8

Mini-parcial (120 minutos): 20 de Noviembre de 2019

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con cuatro hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. El ejercicio 1 vale 2 puntos, los otros dos 4 puntos cada uno.

1. Sean $\mathcal{T}$ un trapecio que no es un paralelogramo cuyas bases son los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_4A_3}$, y los puntos

$$B := \mathtt{V}(\{A_1, A_3\}) \cap \mathtt{V}(\{A_2, A_4\}) \quad \text{y} \quad C := \mathtt{V}(\{A_1, A_4\}) \cap \mathtt{V}(\{A_2, A_3\}).$$

Probar que la recta $r := \mathtt{V}(\{B, C\})$ corta a las bases del trapecio en sus puntos medios.

2. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(i) ¿Existe alguna homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ sin puntos fijos? Razona tu respuesta.

(ii) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ con un único punto fijo. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

(iii) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ con exactamente dos puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

(iv) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ con al menos tres puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

3. Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la homografía definida por

$$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2] \mapsto [2\mathtt{x}_0 - 4\mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_0 - 3\mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_2].$$

(i) Demostrar que f es una homología y calcular su conjunto de puntos fijos.

(ii) Calcular todos las rectas invariantes de f e indicar qué tipo de aplicación proyectiva es la restricción $f|_L$ para cada una de las rectas invariantes L de f.

(iii) Sea $L_1 \subset \mathbb{P}^2$ una recta de puntos fijos de f y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^2 \setminus L_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ es una afinidad, clasificarla y obtener una referencia de $\mathbb{A}_1$ de tal forma que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_1}$ sea lo más parecida posible a una matriz diagonal.

(iv) Sea $L_2 \subset \mathbb{P}^2$ una recta invariante para f, que no es una recta de puntos fijos, y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^2 \setminus L_2$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una afinidad, clasificarla y obtener una referencia de $\mathbb{A}_2$ de tal forma que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ sea lo más parecida posible a una matriz diagonal.