Ejercicios de refuerzo

1. Consideramos la homografía

$$f:\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0:\mathrm{x}_1:\mathrm{x}_2:\mathrm{x}_3]\mapsto[3\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_3:\mathrm{x}_0+\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_3:\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3:2\mathrm{x}_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es un hiperplano H_1 de $\mathbb{P}^3$ y concluir que f es una elación.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f distintos de H_1 y demostrar que todos ellos pasan por un punto común P_0.

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f.

(4) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1:=\mathbb{P}^3\setminus H_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1}:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_1$ es una traslación y calcular el vector v de dicha traslación.

(5) Elegid un hiperplano H_2 invariante para f distinto de H_1. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2}:\mathbb{A}_2\to\mathbb{A}_2$ es una transvección y calcular una referencia afín de $\mathbb{A}_2$ tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ tenga tantos coeficientes nulos como sea posible.

2. Consideramos la homografía

$$f:\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0:\mathrm{x}_1:\mathrm{x}_2:\mathrm{x}_3]\mapsto[-\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_3:-\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_3:-2\mathrm{x}_2:\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f está formado por un hiperplano H_1 de $\mathbb{P}^3$ y un punto fijo $P_0\in\mathbb{P}^3\setminus H_1$ y concluir que f es una homología.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f distintos de H_1 y demostrar que todos ellos pasan por el punto P_0.

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f.

(4) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1:=\mathbb{P}^3\setminus H_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1}:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_1$ es una homotecia y calcular su centro y su razón.

(5) Elegid un hiperplano H_2 invariante para f distinto de H_1. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2}:\mathbb{A}_2\to\mathbb{A}_2$ es una dilatación y calcular una referencia afín de $\mathbb{A}_2$ tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ tenga tantos coeficientes nulos como sea posible.

3. Consideramos la homografía

$$f:\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0:\mathrm{x}_1:\mathrm{x}_2:\mathrm{x}_3]\mapsto[2\mathrm{x}_0+\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_3:\mathrm{x}_0+2\mathrm{x}_1-2\mathrm{x}_3:-3\mathrm{x}_0-3\mathrm{x}_1-3\mathrm{x}_2:2\mathrm{x}_0-2\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es la unión de dos rectas L_1 y L_2, que no son coplanarias. Probar que f es una homografía involutiva.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f y probar que todos ellos contienen a L_1 o a L_2.

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f.

(4) Elegid, para $i=1,2$, un hiperplano invariante H_i que contiene a L_i y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_i:=\mathbb{P}^3\setminus H_i$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_i}:\mathbb{A}_i\to\mathbb{A}_i$ es una simetría paralela a una dirección W_i con respecto a una recta S_i para $i=1,2$. Calcular W_i y S_i para $i=1,2$. ¿Que relación existe entre las rectas proyectivas L_1 y L_2 y la dirección W_i y la recta S_i para $i=1,2$?

4. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f:\mathbb{P}^3\dashrightarrow\mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0:\mathrm{x}_1:\mathrm{x}_2:\mathrm{x}_3]\mapsto[\mathrm{x}_0-2\mathrm{x}_1:-\mathrm{x}_1:2\mathrm{x}_0-2\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2:2\mathrm{x}_0-2\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los planos invariantes para f.

(ii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2: \ \mathtt{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una simetría, calcular su conjunto de puntos fijos y su dirección.

5. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, \ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [4\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_3 : 2\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_3 : 6\mathtt{x}_0 - 6\mathtt{x}_1 + 3\mathtt{x}_2 + 6\mathtt{x}_3 : \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + 4\mathtt{x}_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los planos invariantes para f. Calcular el punto proyectivo $P_0 \in \mathbb{P}^3$ por el que pasan todos los hiperplanos invariantes para f.

(ii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una traslación y calcular el vector v de dicha traslación.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una transvección y encontrar una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}}$ tenga tantos ceros como sea posible.

6. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, \ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [-3\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 : -4\mathtt{x}_0 + 3\mathtt{x}_2 : -\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(ii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la rectricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2: \ \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la rectricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una simetría, calcular su conjunto de puntos fijos y su dirección.

7. Consideramos el hiperplano $H_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$, del que tomamos como modelo $\mathbb{A}_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 1$. Sea $\tau : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ la traslación de vector $v := (1, 1, 0, 1)$.

(i) Calcular la completación proyectiva $f := \overline{\tau} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ de τ.

(ii) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(iii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2: \ \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la afinidad $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Encontrar una referencia cartesiana de $\mathbb{A}_2$ respecto de la que la matriz de f tenga el mayor número de ceros posible.

8. Consideramos el hiperplano $H_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$, del que tomamos como modelo $\mathbb{A}_1: \ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 1$. Sea $h : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ la homotecia de centro $(0, 0, 1, 0)$ y razón 2.

(i) Calcular la completación proyectiva $f := \overline{h} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ de τ.

(ii) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(iii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2: \ \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la afinidad $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Encontrar una referencia cartesiana de $\mathbb{A}_2$ respecto de la que la matriz de f tenga el mayor número de ceros posible.

9. Consideramos el hiperplano $H_1 : \ \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$, del que tomamos como modelo $\mathbb{A}_1 : \ \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 = 1$. Sea $\sigma : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ la simetría de dirección $W := \overrightarrow{\mathbb{A}_1} \cap \{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 0\}$ y base $X := \mathbb{A}_1 \cap \{\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = -1, \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 2\}$.

(i) Calcular la completación proyectiva $f := \overline{\sigma} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ de τ.

(ii) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(iii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 : \ \mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la afinidad $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Encontrar una referencia cartesiana de $\mathbb{A}_2$ respecto de la que la matriz de f tenga el mayor número de ceros posible.

10. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la proyección cónica de centro la recta $L_1 := \{\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 = 0, \mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1 = 0\}$ y base $L_2 := \{\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 0, \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 = 0\}$.

(i) Calcular la matriz de π con respecto a la referencia proyectiva estándar.

(ii) Consideramos el hiperplano $H : \ \mathrm{x}_0 + 2\mathrm{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$. Demostrar que $\pi(H) \subset H$ y que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(iii) Sea $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la simetría asociada a ρ y sea $f := \overline{\sigma} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de σ. Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(iv) Demostrar que para cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ existe una recta invariante para f que pasa por P.

11. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la aplicación proyectiva

$$\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0 : \mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_3] \mapsto [3\mathrm{x}_0 - x_2 + \mathrm{x}_3 : \mathrm{x}_0 + 2\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 : \mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 : -2\mathrm{x}_0 + 2\mathrm{x}_2]$$

(i) Demostrar que π es una proyección cónica y calcular su centro Z y su base X.

(ii) Demostrar que si H es un hiperplano que contiene a Z entonces $\pi(H) \subset H$.

(iii) Elegid un hiperplano H_1 que contiene a Z y consideramos el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(iv) Sea $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la simetría asociada a ρ y sea $f := \overline{\sigma} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de σ. Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(v) Demostrar que para cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ existe una recta invariante para f que pasa por P.

12. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la aplicación proyectiva

$$\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0 : \mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_3] \mapsto [6\mathrm{x}_0 - 4x_2 : 2\mathrm{x}_0 + 4\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_3 : 3\mathrm{x}_0 - 2\mathrm{x}_2 : -3\mathrm{x}_0 + 2\mathrm{x}_2]$$

(i) Demostrar que π es una proyección cónica y calcular su centro Z y su base X.

(iii) Sea L la recta de ecuaciones $\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2 = 0, \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 = 0$. Calcular $\pi(L)$.

(ii) Demostrar que $H := f^{-1}([0 : 1 : 0 : 0])$ es un hiperplano de $\mathbb{P}^3$ y que $f(H) \subset H$.

(iv) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$. Demostrar que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(v) Sea $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la simetría asociada a ρ y sea $f := \overline{\sigma} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de σ. Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.