

# LENGUAJE COTIDIANO Y LENGUAJE MATEMÁTICO

## Proposiciones matemáticas

Una *proposición matemática* es una afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos y que es verdadera o falsa (es decir, que tiene necesariamente uno de los dos valores posibles **V** o **F**).

1. Para cada uno de los siguientes apartados, decide cuáles son proposiciones matemáticas y por qué.

a)  $2 + 3 = 5$

b)  $2 + 3$

c) El número 2 es un número par

d)  $3 + n + n^2$

e)  $\sin \frac{\pi}{2} < \sin \frac{\pi}{4}$

f) Para cada ángulo  $t$  se tiene  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

g)  $ax^2 + bx + c = 0$

h) Existen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $ax^2 + bx + c = 0$

2. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones matemáticas son verdaderas?

a) La raíz cuadrada de cualquier número entero es un número real no negativo.

b) Existe un ángulo  $t$  tal que  $\sin t = \cos t$ .

c) (\*) Si  $x < 1$ , entonces  $x^2 < 1$

## Conectores lógicos

### El conector /O/ y el conector /Y/

A continuación escribimos la tabla de verdad para la **conjunción** /A y B/ y otra para la **disyunción** /A o B/. Es decir, establecemos la verdad o falsedad de ambas proposiciones según la verdad o falsedad de la proposición  $A$  y de la proposición  $B$ . La conjunción /y/ se denota con el símbolo  $\wedge$ . La disyunción /o/ se denota con el símbolo  $\vee$ .

$A$	$B$	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$A$	$B$	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. Explica el significado de esta frase, que se lee en la librería de la Universidad.

/Nuestros clientes en posesión de carnet de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15% de descuento./

4. Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque de atracciones y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice /No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque de atracciones./ Explica lo que el padre quiere decir con toda claridad. ¿Tiene este /o/ el mismo significado que en el ejercicio anterior? ¿A cuál de los dos significados se acerca el del /o/ de las matemáticas?

Marta y Javier necesitan un medicamento. Un amigo dice a Javier: **Si conseguimos un casco, puedo llevaros a una farmacia en mi moto o bien a Marta o bien a ti.** Observa que este uso de la disyunción sí es excluyente.

5. Una profesora de lógica matemática ha tomado su baja de maternidad. Sus compañeros la llaman por teléfono para felicitarla y preguntan: ¿Fue niño o niña? Ella responde: sí ¿Es correcta la respuesta?
6. (\*) Pepe dice: /Ordené que viniera Pedro o Juan./ Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?
7. (\*) ¿Es correcto decir en el lenguaje matemático /3 es menor o igual que 5/? ¿Es correcto decir /5 es menor o igual que 5/?
8. Completa la siguiente tabla de verdad.

$A$	$B$	$C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	F		
F	F	V		

### El conector /NO/

La tabla de verdad del conector /no/, que denotamos con  $\neg$ , es la siguiente:

$A$	$\neg A$
V	F
F	V

9. Escribe la negación de las frases siguientes:
- /Su madre es profesora y doctora en Química./
  - /Javier tiene en su casa un hurón o una nutria./
  - /Todos mis amigos son aficionados al baloncesto./
10. Completa las siguientes tablas de verdad:

$A$	$B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

$A$	$B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

11. (\*) Construye una frase sencilla y clara equivalente a la siguiente:

/No es cierto que se preparara las matemáticas de la prueba de acceso y el teórico de conducir durante la tarde del sábado./

### Sobre la proposición /Si A entonces B/

Una de las situaciones que más aparecen en Matemáticas es demostrar que es cierta la afirmación /Si A entonces B/, a veces escrita  $A \Rightarrow B$  y leída "A implica B". A continuación escribimos la tabla de verdad sobre esta implicación.

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

12. (\*) /Si el Granada no gana el partido el domingo, Pepe será muy infeliz./

Tras la victoria del Granada, encontramos a Pepe totalmente infeliz. La verdad de esta proposición, ¿es compatible con esta situación?

13. Quieres demostrar que /**A implica B**/ es falso. ¿Cómo procederías?

- Demostrando que B es falso.
- Demostrando que A es falso.
- Demostrando que B es falso y que A es verdadero.
- Demostrando que B es verdadero y que A es falso.
- Demostrando que B es falso y que A es falso.

14. Para cada una de las proposiciones siguientes identifica cuál es la hipótesis y cuál la tesis o conclusión.

- Si  $ABC$  es un triángulo rectángulo, de lados  $a, b, c$ , tales que  $a$  es la hipotenusa y su área es  $\frac{a^2}{4}$ , entonces el triángulo  $ABC$  es isósceles.
- Si  $n$  es un número entero entonces  $n^2$  es un número entero.
- (\*) Si  $a, b, c, d, e, f$  son números reales con la propiedad  $ad - bc \neq 0$ , entonces el sistema de ecuaciones  $\{ax + by = e, cx + dy = f\}$  tiene una única solución.
- La suma de los  $n$  primeros enteros positivos es  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

15. (\*) Tu tarea es demostrar que  $\neg A$  implica  $B$  es verdadera y sabes que  $B$  es falso. ¿Qué tratarás de demostrar y por qué?
- Que  $A$  es verdadero.
  - Que  $A$  es falso.
16. Consideremos la siguiente afirmación /Si  $n - 1$  es múltiplo de 3, también lo es  $n^2 - 1$ ./
- ¿Qué dice el enunciado anterior en los casos  $n = 4$ ,  $n = 5$  y  $n = 6$ ?
  - ¿Puede ser cierta la afirmación anterior?
17. Completa la siguiente tabla de verdad y compárala con la tabla de la implicación.

$A$	$B$	$\neg A \vee B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

### Equivalencias

18. (\*) Supongamos que  $n$  es un número natural. Decide si la proposición  $\neg n^2$  es par si y sólo si  $n$  es par/ es verdadera o es falsa. Justifica tu respuesta.
19. Supongamos que  $r$  es un número real. La proposición  $\neg r^2$  es racional si y sólo si es  $r$  es racional/ ¿es verdadera o es falsa? Demuéstralo.
20. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices  $2 \times 2$ . ¿Es cierto que  $AB = A^2$  si y sólo si  $A = B$ ? Justifica tu respuesta.
21. Sea  $a$  un número real. Decide si la condición  $a^2 < a$  es a) suficiente, b) necesaria, c) necesaria y suficiente ... para que  $a^3 < a^2$ . ¿Por qué?
22. Decide si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
- La condición necesaria y suficiente para que dos rectas de  $\mathbb{R}^3$  se corten en un punto es que sean coplanarias.
  - Si dos planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son perpendiculares, entonces la dirección de toda recta contenida en  $\pi_1$  es perpendicular a la de toda recta contenida en  $\pi_2$ .
  - Si la recta  $r$  es perpendicular al plano  $\pi$ , entonces la dirección de  $r$  es perpendicular a la de toda recta contenida en  $\pi$ .
  - Si los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  se cortan a lo largo de una recta, entonces no existen rectas paralelas  $r_1 \subset \pi_1$  y  $r_2 \subset \pi_2$ .
23. Se consideran dos números reales  $a$  y  $b$ . Marca cada casilla del siguiente cuadro con un número del 1 al 5, de acuerdo con el convenio que se indica al final:

	$a + b \in \mathbb{Q}$	$a + b \notin \mathbb{Q}$	$ab \in \mathbb{Q}$	$ab \notin \mathbb{Q}$
$a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$				
$a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$				
$a \notin \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$				

- [1] La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba.  
 [2] La condición de la izquierda hace que la de arriba se cumpla sólo si  $a = 0$ .  
 [3] La condición de la izquierda hace que la condición de arriba nunca se cumpla.  
 [4] La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba si  $a \neq 0$ .  
 [5] La condición de la izquierda hace que la condición de arriba se cumpla en algunos casos particulares, pero no en otros.

## Cuantificadores lógicos, sus concatenaciones y sus negaciones

24. Sean  $M$  el conjunto de todas las personas de una cierta ciudad,  $P$  el conjunto de todos los periódicos que se publican en esa ciudad y  $D$  el conjunto de todos los días del año. Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos  $\forall$  y  $\exists$ , cada una de las siguientes afirmaciones entre barras:
- a) /Hay alguien que todos los días compra todos los periódicos./
  - b) /Todos los días hay alguien que compra todos los periódicos./
  - c) (\*) Esta ciudad es muy instruida. Aquí /todos compran algún periódico todos los días./
  - d) /Todos los días hay algún periódico que todo el mundo compra./
  - e) (\*) Somos poco aficionados a la prensa en este pueblo, pero al menos /todos los días hay alguien que compra algún periódico./
  - f) Es una ciudad de maniáticos. /Todos compran todos los periódicos todos los días./
  - g) (\*) Aquí sí que somos ajenos a la prensa, pero al menos /hubo un día en que alguien compró algún periódico./
  - h) Esta ciudad está dominada por un diario. /Todo el mundo lo compra todos los días./
  - i) Aquí todos somos muy fieles. /Todos compran siempre el mismo periódico/, el suyo de toda la vida.
  - j) Fue tal el notición que /aquel día todo el mundo compró todos y cada uno de los periódicos./
  - k) "La Ciudad" se llevó la exclusiva y así /este día hubo un periódico que fue comprado por todo el mundo./
25. Sea  $\mathbb{N}$  el conjunto de los números naturales. ¿Es cierta la siguiente afirmación?  
 /Para cada elemento  $n$  del conjunto  $\mathbb{N}$ , existe un número real  $M$  tal que  $n < M$ /.  
 ¿Hay alguna diferencia entre la anterior afirmación y la siguiente?  
 /Existe un número real  $M$  tal que para cada elemento  $n$  del conjunto  $\mathbb{N}$ , se cumple que  $n < M$ /.  
 /

26. (\*) Escribe con cuantificadores y decide si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

- a) Para cada número real  $x$  con  $0 \leq x \leq 1$ , existe un número real  $y$  con  $0 \leq y \leq 1$  tal que  $x + y = 1$ .
- b) Existe un número real  $y$  con  $0 \leq y \leq 1$  tal que, para cada número real  $x$  con  $0 \leq x \leq 1$ , se satisface que  $x + y = 1$ .

27. Explica si en cada uno de los siguientes pares de proposiciones  $a$  y  $b$  son las dos verdaderas, las dos falsas o una verdadera y otra falsa:

- (\*) a) 1) Para cada número real  $x$  con  $0 \leq x \leq 1$  y cada número real  $y$  con  $0 \leq y \leq 2$ , se cumple  $2x^2 + y^2 \leq 6$ .  
2) Para cada número real  $y$  con  $0 \leq y \leq 2$  y cada número real  $x$  con  $0 \leq x \leq 1$ , se cumple  $2x^2 + y^2 \leq 6$ .
- b) 1) Para cada número real  $x$  con  $0 \leq x \leq 1$  y cada número real  $y$  con  $0 \leq y \leq 2x$ , se tiene que  $2x^2 + y^2 \leq 6$ .  
2) Para cada número real  $y$  con  $0 \leq y \leq 1$  y cada número real  $x$  con  $0 \leq x \leq 2y$ , se tiene que  $2x^2 + y^2 \leq 6$ .

28. Escribe la negación de la siguiente proposición: *No existe un entero  $x$  tal que  $x^2 + x - 11 = 0$* . Escríbela también usando cuantificadores.

29. Escribe la negación de la siguiente proposición:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = y^2.$$

30. Decide si la siguiente proposición es verdadera o falsa y escribe su negación:

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{1}{1+x} = y.$$

31. Decide cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- a) Para todo par de números reales  $x, y$  que satisfagan  $x \neq y$  se cumple que  $x^3 + 5 \neq y^3 + 5$ .
- b) Ningún par de números reales  $x, y$  cumple  $x \neq y \wedge x^3 + 5 = y^3 + 5$ .
- c)  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}$ , si  $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ .
- d) Existen pares de números reales  $x, y$  que satisfacen  $x^2 + 5 = y^2 + 5 \wedge x \neq y$ .

32. Describe cuál es la diferencia entre las dos proposiciones siguientes:

- a)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$  tal que si  $x < y \Rightarrow x < c < y$ .
- b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall y \in \mathbb{R}$  se satisface que  $x < y \Rightarrow x < c < y$ .

¿Son verdaderas o falsas?

33. Niega la proposición  $\mathbf{P}$ , es decir, escribe la proposición **no  $\mathbf{P}$** , de manera que no aparezca explícitamente la palabra **no**. Luego, decide en cada caso si es verdadera  $\mathbf{P}$  o **no  $\mathbf{P}$** .

- a) (\*) **P**: /Para cada número real  $x > 0$  se cumple que  $x^2 - x > 0$ /.
- b) **P**: /Hay triángulos rectángulos con los tres lados iguales/.
- c) **P**: /Los múltiplos de 3 son impares/.
- d) (\*) **P**: Para cada número real  $x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$ , existe un número real  $y$  con  $-1 \leq y \leq 1$  tal que  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- e) **P**: Existe un número real  $x$  con  $-1 \leq x \leq 1$  tal que para cualquier número  $y$  con  $-1 \leq y \leq 1$  se cumple que  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

### Ejercicios de reserva

34. Construye una frase sencilla equivalente a  
/No es verdad que tú seas cordobés ni que tu padre sea segoviano./
35. Sean  $P$  el conjunto de los programas de radio y  $D$  el conjunto de todos los días del año. Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos  $\forall$  (**para todo, para cada**) y  $\exists$  (**existe, para algún**), cada una de las frases siguientes:
- a) Cada día oigo algún programa en la radio.
- b) Hay un programa en la radio que oigo todos los días.
- c) Algún día oigo algún programa en la radio.
36. Para  $B$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  se consideran las proposiciones:
- P**: / Existe un número real  $M$  que es mayor o igual que todos los elementos de  $B$ ./ Si la proposición **P** es cierta para  $B$ , se dice que  $B$  está *acotado superiormente* y que  $M$  es una *cota superior* de  $B$ .
- Q**: / Existe un número real  $b$  perteneciente a  $B$  que es mayor o igual que todos los elementos de  $B$ ./ Si la proposición **Q** es cierta para  $B$ , se dice que  $b$  es el máximo del conjunto  $B$ .
- R**: / Existe un número real  $S$  que es mayor o igual que todos los elementos de  $B$  y, además, si  $M$  es cualquier cota superior de  $B$  se cumple que  $S$  es menor o igual que  $M$ ./ Si la proposición **R** es cierta para el conjunto  $B$ , se dice que  $S$  es el supremo de  $B$ .

Escribe con cuantificadores las proposiciones **P**, **Q** y **R**. ¿Son ciertas las proposiciones **P**, **Q** y **R** si  $B = (0, 1)$ ,  $B = (0, 1]$  o si  $B = (0, \infty)$ ?

## Soluciones a ejercicios con asterisco

- 2c Es falso, ya que si  $x = -2 < 1$  entonces  $x^2 = (-2)^2 = 4 > 1$ .
- 6 Sí, pero bastaba que viniera uno de los dos para que se hubiera cumplido.
- 7 Las dos cosas son correctas y aparecen en el lenguaje matemático.
- 11 /**No** ( $A$  y  $B$ )/ es equivalente a /**no**  $A$  o **no**  $B$ /. No se preparó las matemáticas la tarde del sábado o no se preparó el teórico de conducir esa tarde.
- 12 Sí es compatible. La implicación / $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ / es verdadera siempre que  $\mathbf{A}$  es falsa, tanto sea  $\mathbf{B}$  verdadera o falsa. En este caso, la proposición  $\mathbf{A}$  es *Pierde el Granada* y la proposición  $\mathbf{B}$  es *Pepe será muy infeliz*.
- 14c Hipótesis:  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc \neq 0$ . Tesis:  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  tiene solución única.
- 15 Tengo que demostrar que  $A$  es falso, ya que si  $A$  fuera verdadero y es verdad que  $A \Rightarrow B$ ,  $B$  tendría que ser verdadero.
- 18 Es verdadera. En primer lugar, probemos que si  $n^2$  es par entonces  $n$  es par. Escribiendo  $n = 2k + r$ , con  $r = 0$  o  $r = 1$ , se tiene que  $n^2 = (2k + r)^2 = 4k^2 + 4kr + r^2 = 2(2k^2 + 2kr) + r^2$ . Como  $r^2 = r$  y  $n^2$  es par, se deduce que  $r = 0$ . Por otro lado, si  $n$  es par, entonces  $n = 2k$  y, así,  $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$  que es par.
- 24c  $\forall d \in D, \forall m \in M, \exists p \in P \mid (m \text{ compra } p \text{ en } d)$ .
- 24e  $\forall d \in D, \exists m \in M, \exists p \in P \mid (m \text{ compra } p \text{ en } d)$ .
- 24g  $\exists d \in D, \exists m \in M, \exists p \in P \mid (m \text{ compra } p \text{ en } d)$ .
- 26 a) Es cierta. b) Es falsa.
- 27a 1 y 2 dicen lo mismo y son verdaderas.
- 33a P falsa: para  $x = 1/2$ , se tiene que  $x^2 - x = -1/4 < 0$ .
- 33d P es verdadera: basta tomar para cada  $x$  el número  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .