

CONJUNTOS. APLICACIONES. RELACIONES

Conjuntos

1. Considera el subconjunto A de números naturales formado por los múltiplos de 4 y el conjunto $B \subset \mathbb{N}$ de los números que terminan en 4. Comprueba que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.
2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Encuentra $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$. Si definimos $F = \{A, B, C\}$, ¿pertenece $\{1, 2, 3\}$ a F ?
3. Supongamos que A, B y C son conjuntos cualesquiera. Demuestra que:
 - a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. [Compara con el ejercicio 8 de la primera hoja].
 - b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 - d) $\overline{\overline{A}} = A$
4. Sean P, D, T, I y S , respectivamente, los conjuntos de números naturales primos, múltiplos de dos, múltiplos de tres, números impares y múltiplos de seis. Determina para cada par de ellos la intersección. ¿Cuál es el complementario de D y de P considerados como subconjuntos de los números naturales? Determina $\overline{P \cap T}$.
5. Llamamos T al conjunto de los triángulos, I al subconjunto de los triángulos isósceles, R al de los triángulos rectángulos, E al de los equiláteros y A al de triángulos con todos los ángulos agudos. Comprueba que
$$R \cap E = \emptyset, R \cap I \neq \emptyset, E \subset I, I \setminus A \neq \emptyset.$$
6. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos:
 - a) $\bigcup_{n=1}^7 [\frac{1}{n}, 1] = [\frac{1}{7}, 1]$ y $\bigcap_{n=2}^{60} [\frac{1}{n}, 1] = [\frac{1}{2}, 1]$
 - b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \{0\}$, $\bigcup_{n \geq 2} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$.

Si X es un conjunto arbitrario, podemos considerar sus subconjuntos, es decir los conjuntos que están contenidos en X (el conjunto vacío \emptyset es un subconjunto de cualquier conjunto). Llamaremos **partes de X** al conjunto $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ de todos los subconjuntos de X . Por ejemplo, si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

7. Describe $\mathcal{P}(A)$ si $A = \{1, 2, 3\}$. Describe $\mathcal{P}(B)$ si $B = \{1, \{2, 3\}\}$. Describe $\mathcal{P}(C)$ si $C = \{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$.

Ejercicios de reserva

- En el ejercicio 4, determina $P \cup I$, $D \setminus T$, $T \setminus S$, $P \setminus S$, $\overline{P \cap T}$ y $\overline{T \cup I}$.
- Se consideran los conjuntos $\mathbf{R}_1 = \{r : r \text{ es una recta del plano que pasa por el origen}\}$, $\mathbf{R}_2 = \{r : r \text{ es una recta del plano paralela al eje de abscisas}\}$ y $\mathbf{R}_3 = \{r : r \text{ es una recta del plano paralela al eje de ordenadas}\}$. Determina $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_3$.
- Dados el conjunto A de los números naturales múltiplos de 5 y el conjunto B de los números naturales que terminan en 5 o en 0, demuestra que $A = B$.

Producto cartesiano de dos conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, el *producto cartesiano* $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados (m, n) tales que $m \in A$ y $n \in B$.

- Considera los siguientes productos cartesianos: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{1\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ y $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Representalos gráficamente.
- Considera los siguientes productos cartesianos: $[a, b] \times [c, d]$, $\mathbb{R} \times [c, d]$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1]$ y $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Representalos gráficamente.

Aplicación inyectiva, sobreyectiva, biyectiva. Funciones inversas

Sean A y B dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) f de A a B , que se denota $f : A \rightarrow B$, es una asignación, para cada $a \in A$, de un único elemento de B que denotaremos $f(a)$. El conjunto A se llama el *dominio* de la función f . La *imagen* de A por f (o bien el *recorrido* de f) es el conjunto C de elementos $b \in B$ tales que existe algún elemento $a \in A$ que verifica $f(a) = b$. La imagen de f no tiene por qué ser todo el conjunto B .

La aplicación f se llama *inyectiva* cuando para cada elemento $b \in B$ existe a lo sumo un elemento (es decir: uno o ninguno) $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Para ver que f es inyectiva, basta demostrar que si $a_1, a_2 \in A$ y $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$. Dado que $A \Rightarrow B$ es equivalente a $\text{no-}B \Rightarrow \text{no-}A$, probar que f es inyectiva es demostrar que si $a_1 \neq a_2$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Piensa en la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ mediante $f(n) = n - 1$. Si $n \neq m$ se cumple que $f(n) = n - 1 \neq m - 1 = f(m)$ y, por tanto, f es inyectiva. La función dada por $P(x) = x(x - 1)(x + 1)$ que tiene como dominio el conjunto \mathbb{R} de los números reales no es una función inyectiva, ya que existen números reales distintos, por ejemplo $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$, en los que P toma el mismo valor, ya que $P(0) = P(1) = 0$.

La aplicación f se llama **sobreyectiva** (o *aplicación sobre*) cuando para cada $b \in B$ existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

La función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ mediante $f(n) = n + 2$ es sobreyectiva, dado que para cada $m \in \mathbb{Z}$ podemos encontrar $n = m - 2$ tal que $f(n) = n + 2 = (m - 2) + 2 = m$. Sin embargo, la función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ mediante $g(n) = n + 2$ no es sobreyectiva, dado que $g(n) = n + 2 \geq 1 + 2 = 3$ y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ ($m = 1$ o $m = 2$) tal que $g(n) \neq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La aplicación f se llama **biyectiva** (se dice que es una biyección) cuando es inyectiva y sobreyectiva.

10. En $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ consideramos la regla f que asigna a cada $x \in A$ el elemento o elementos $y \in \mathbb{R}$ tales que $y^2 = x$. ¿Es f una aplicación?
11. Razona si la asignación $x \mapsto \frac{1}{x}$ es una aplicación de \mathbb{Z} en \mathbb{Q} . ¿Y asociar a cada número racional q su denominador?
12. Se consideran A, B dos conjuntos de números reales y $f : A \rightarrow B$ definida por $f(a) = |a| + 1$, para todo $a \in A$. Estudia si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva en los siguientes casos:
 - a) $A = B = \mathbb{R}$
 - b) $A = B = \mathbb{N}$
 - c) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$
 - d) $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$
13. Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ mediante $f(n) = n^2$. ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Resuelve las mismas preguntas para $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(n) = n^2$, si $n \in \mathbb{N}$.
14. Si $f : A \rightarrow B$ es una aplicación y C es el recorrido de f , justifica que la aplicación $g : A \rightarrow C$ dada por $g(a) = f(a)$, para $a \in A$, es sobre.
15. Considera la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante $f(x) = 3x + 2$. ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Representa gráficamente esta función.

Si $f : A \rightarrow B$ es una aplicación y $C \subset B$, la **preimagen** de C respecto a f es el conjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$. Cuando $f : A \rightarrow B$ es una biyección, para todo $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y puede definirse la llamada **función inversa**, $f^{-1} : B \rightarrow A$ asignando a cada b el único $a = f^{-1}(b)$ tal que $f(a) = b$.

16. Sean el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(a) = \frac{a(a+1)}{2}$. Encuentra $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{1, 2, 5\})$ y $f^{-1}(\{3, 5\})$.
17. Sea $g : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$. Encuentra $g^{-1}(\{0\})$, $g^{-1}(\{-1\})$, $g^{-1}(\{-10\})$, $g^{-1}([8, 15])$ y $g^{-1}([0, 1])$.
18. Consideremos de nuevo la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante $f(x) = 3x + 2$. Calcula su inversa. Determina los conjuntos $f(\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\mathbb{Q})$ y $f^{-1}(\mathbb{N})$.

19. Considera la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Representa la función e indica cuál es su recorrido. ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Determina $f([3, 5])$ y $f^{-1}([0, 5])$.
20. Define funciones $f : [0, 1] \rightarrow [0, 3]$, $g : [0, 1] \rightarrow [5, 8]$ y $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ que sean biyecciones. Determina las funciones inversas f^{-1} , g^{-1} y h^{-1} .
21. Demuestra que la aplicación de \mathbb{R} en \mathbb{R} dada por $f(x) = x^3 + 1$ es biyectiva. Halla su aplicación inversa.

Composición de funciones

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : E \rightarrow C$ dos aplicaciones. Definimos la *composición* de f y g como la aplicación

$$g \circ f : D \rightarrow C$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

con dominio $D = \{x \in A \mid f(x) \in E\}$.

22. Determina los mayores conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ y $E \subset \mathbb{R}$ tales que $f : A \rightarrow B$ y $g : E \rightarrow C$, con

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

sean funciones. Además determina las funciones $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, incluyendo sus respectivos dominios.

23. Decide cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas:
- Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
 - Si f es inyectiva y g es sobreyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva.
 - Si f es sobreyectiva y g es inyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva.
 - Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
 - Si f y g son sobreyectivas y la imagen de f es el dominio de g , entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
 - Si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva entonces g es inyectiva.

Relaciones de un conjunto

Introduzcamos una *relación* \mathcal{R} entre los elementos de un conjunto A : consideramos el producto cartesiano $A \times A$ y un subconjunto $S \subset A \times A$. Decimos que un elemento $m \in A$ está en relación \mathcal{R} con otro $n \in A$, y lo denotamos $m\mathcal{R}n$, cuando el par $(m, n) \in S$. Es decir: podemos identificar una relación \mathcal{R} en un conjunto A con un subconjunto $S \subset A \times A$. Muchas veces, de hecho, se denotan igual escribiendo $(m, n) \in S$ como mSn .

24. En el conjunto de números naturales \mathbb{N} identifica, mediante un subconjunto de pares (m, n) del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relación que en lenguaje normal se expresa “ m es el cuadrado de n ”. Señala algunos elementos que estén en dicha relación. ¿Hay algún número natural que esté en esa relación consigo mismo? Representa gráficamente esta relación.

Relación de equivalencia

Sea S una relación en el conjunto A . Se dice que S es *reflexiva* cuando para cada $p \in A$ se verifica pSp . (Es decir, el par (p, p) está en el subconjunto $S \subset A \times A$). Se dice que S es una relación *transitiva* cuando se cumple: si mSn y nSp entonces mSp . Se dice que S es una relación *simétrica* cuando se cumple: si mSn entonces nSm . Se dice que S es una relación *de equivalencia* cuando es reflexiva, transitiva y simétrica.

25. En el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ se define la siguiente relación \mathcal{R} : $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a + b \leq 6$. Describe explícitamente el subconjunto S de $X \times X$ que define la relación. ¿Es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva? Representa gráficamente la relación.
26. Se considera en \mathbb{Z} la relación \mathcal{R} definida del modo siguiente “ $m\mathcal{R}n$ cuando $m - n$ es par”. ¿Es una relación de equivalencia? ¿Qué enteros se relacionan con 3? ¿y con 2020? ¿y con 14? ¿y con -25 ?
27. Sea S el conjunto de todos los seres humanos. Sean $x, y \in S$. Decimos que x está relacionado con y si x e y tienen al menos un progenitor en común. ¿Es una relación de equivalencia? Justificar la respuesta.

Si en un conjunto X se tiene una relación de equivalencia \mathcal{R} , para cada $m \in X$ el subconjunto $[m] = \{p \in X \mid m\mathcal{R}p\}$ de todos los elementos que se relacionan con m se denomina **clase de equivalencia de m** . En un ejercicio previo has determinado, para la relación dada, las clases de equivalencia de algunos enteros.

28. Para la relación \mathcal{R} definida en \mathbb{Z} por $m\mathcal{R}n$ cuando $m - n$ es par:
- Demuestra que si dos enteros m y n tienen la misma paridad, entonces $[m] = [n]$.
 - Prueba que si dos enteros m y n tienen paridades distintas, entonces $[m] \cap [n] = \emptyset$ y $\mathbb{Z} = [m] \cup [n]$.
29. Considera en el conjunto \mathbb{R} la relación \mathcal{R} determinada del modo siguiente “ $x\mathcal{R}y$ cuando $x - y \in \mathbb{Q}$ ”. Prueba que es una relación de equivalencia. Determina las clases de equivalencia $[0]$, $[2/3]$, $[\pi]$ y $[-\pi]$.

30. En el conjunto T de los triángulos definimos la relación \mathcal{R} dada por

$$T_1 \mathcal{R} T_2 \quad \text{si y solo si} \quad T_1 \text{ y } T_2 \text{ son semejantes.}$$

Justifica que \mathcal{R} es una relación de equivalencia. ¿Cuál es la clase de equivalencia de un triángulo rectángulo de catetos $a = b = 1$?

Dada una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre el conjunto X , el conjunto de las clases de equivalencia se denomina **conjunto cociente** y lo escribiremos X/\mathcal{R} . Por ejemplo, para la relación del ejercicio 28, $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathcal{P}, \mathcal{I}\}$, donde \mathcal{I} es el conjunto de los números enteros impares y \mathcal{P} el de los enteros pares.

31. Se considera en el conjunto $X = \{2, 3, \dots, 20\}$ la relación $m\mathcal{R}n$ si y solo si el divisor primo más grande de m y n coincide. Prueba que es de equivalencia. Encuentra alguna clase de equivalencia que tenga un sólo elemento. ¿Cuántos elementos tiene X/\mathcal{R} ?
32. Se define en \mathbb{Z} la relación de equivalencia $m\mathcal{R}n$ si y sólo si $|m| = |n|$. La regla que asigna a cada clase $[n] \in \mathbb{Z}/\mathcal{R}$ el valor n ¿es una aplicación? La asignación $f : \mathbb{Z}/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $[n] \mapsto n^2$ ¿está bien definida? Si lo está, ¿es inyectiva?
33. En el conjunto de los puntos del plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ se definen las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} siguientes: $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$; $(a, b)\mathcal{S}(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$. Demuestra que ambas son relaciones de equivalencia. En cada caso, determina la clase del punto $(1, 0)$. Describe geoméricamente el conjunto cociente \mathbb{R}^2/\mathcal{R} , así como \mathbb{R}^2/\mathcal{S} .
34. En el conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se define la relación \mathcal{R} de la siguiente manera: $(x, y, z)\mathcal{R}(a, b, c) \Leftrightarrow z = c$. Demuestra que es de equivalencia. Describe geoméricamente las clases de equivalencia.
35. Considera en el conjunto $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ la relación \mathcal{R} definida del siguiente modo $(m, n)\mathcal{R}(p, q)$ cuando $mq = np$. Demuestra que se trata de una relación de equivalencia. ¿Cuál es la clase de equivalencia de $(8, 4)$? ¿Y la de $(0, 4)$? ¿Cómo son todos los elementos de la clase de $(-7, 1)$? ¿Y los de la clase de $(3, -5)$? Encuentra una biyección entre A/\mathcal{R} y \mathbb{Q} .
36. Sea el conjunto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Definimos en A la relación de equivalencia $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$ si y solo si $\frac{xy}{|xy|} = \frac{ab}{|ab|}$. ¿Cuántos elementos tiene A/\mathcal{R} ?
37. Dado un conjunto X y una relación de equivalencia \mathcal{R} prueba que la aplicación de paso al cociente $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R} : x \mapsto [x]$ es sobreyectiva. ¿Es en general inyectiva? Si es inyectiva, ¿qué puedes decir de \mathcal{R} ?
38. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos conjuntos X e Y . Definimos en X la relación $x\mathcal{R}y$ si y solo si $f(x) = f(y)$. Prueba que \mathcal{R} es una relación de equivalencia. Demuestra que la aplicación $p : X/\mathcal{R} \rightarrow Y : [x] \mapsto f(x)$ está bien definida y es inyectiva. Si f es sobreyectiva, ¿es p sobreyectiva?

Ejercicios de reserva

39. Supongamos que \mathcal{R} es una relación de equivalencia definida en un conjunto A y $B \subset A$. Sea $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (B \times B)$. Prueba que \mathcal{S} es una relación de equivalencia en B . Para todo $b \in B$, denotamos $[b]$ la clase de b para la relación \mathcal{R} y $[b]_{\mathcal{S}}$ la clase de b para la relación \mathcal{S} . Demuestra que $[b]_{\mathcal{S}} = [b] \cap B$.
40. Se considera en \mathbb{Z} la relación de equivalencia $m\mathcal{R}n$ si y solo si m y n tienen el mismo resto cuando los dividimos entre 3. Prueba que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene \mathbb{Z}/\mathcal{R} ?
41. Supongamos que \mathcal{R} y \mathcal{S} son relaciones de equivalencia en un conjunto X y que $X/\mathcal{R} = X/\mathcal{S}$. Prueba que $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.
42. Sea X un conjunto y sea Y un subconjunto de X . Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación de equivalencia $A\mathcal{R}B$ si y solo si $A \cap Y = B \cap Y$. Prueba que la aplicación $f : \mathcal{P}(X)/\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}(Y) : [A] \mapsto A \cap Y$ está bien definida y es una biyección.

Relación de orden

Sea S una relación en el conjunto A . Se dice que S es una relación *antisimétrica* cuando se cumple: si mSn y nSm entonces $n = m$.

Consideramos una relación \preceq en un conjunto A no vacío. Se dice que \preceq es una *relación de orden* en A (un orden en A) cuando la relación \preceq es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

La relación de orden es *total* cuando para cada dos elementos distintos m, n de A se cumple que o bien $m \preceq n$ o bien $n \preceq m$. La relación de orden es *parcial* cuando no se satisface la condición anterior. En este caso, hay elementos p, q de A tales que ni $p \preceq q$ ni $q \preceq p$.

Una relación de orden es la definida en el conjunto de los números reales \mathbb{R} mediante la siguiente propiedad: $x\mathcal{R}y$ si $x \leq y$ (también lo escribiremos como $y \geq x$). La relación \mathcal{R} es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Observa que si a es un número real, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}x\} = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ es la semirrecta cerrada $[a, +\infty)$.

En el conjunto de palabras en español, se considera el orden lexicográfico. Es decir, una palabra p es anterior a otra q si todas las letras de p son las primeras de q (y aparecen en el mismo orden), o si -analizadas las letras de izquierda a derecha- la primera en la que difieren, la correspondiente a p se encuentra antes en el orden alfabético. Por ejemplo, *con* es anterior a *conjunto* y *demostración* es anterior a *demostrar*. Nota que esta relación establece un orden total en el conjunto de palabras que nos permite manejar los diccionarios.

39. En \mathbb{Q} se define la relación $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + n$ siendo $n = 0$ o $n \in \mathbb{N}$.
- a) Demuestra que \mathcal{R} es una relación de orden. ¿Es total o parcial?

b) Demuestra que si $x\mathcal{R}z$ e $y\mathcal{R}z$, entonces $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.

40. Dado el conjunto $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la relación:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow \left\{ \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \text{ y } x_1 \leq x_2 \right\}.$$

a) Demuestra que \preceq es de orden y estudia si es de orden total.

b) Representa el conjunto $T_1 = \{(x, y) \in A : (x, y) \preceq (1, 1)\}$ y el conjunto $T_2 = \{(x, y) \in A : (-2, 1) \preceq (x, y)\}$.

41. En \mathbb{R}^2 se introduce la relación \preceq mediante la siguiente definición: $(a, b) \preceq (c, d)$ cuando se tiene que $a \leq c$ y $b \leq d$. ¿Se define así una relación de orden? ¿Es total? Representa el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \preceq (2, -3)\}$ y el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2, -3) \preceq (x, y)\}$.

42. En \mathbb{N} se considera la relación $p \triangleleft q$ si p divide a q . Analiza si es una relación de orden. ¿Es total o parcial? Justifica que dados $m, n \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m \triangleleft p$ y $n \triangleleft p$.

43. Dado un conjunto X , se considera la relación de inclusión: si $M, N \in \mathcal{P}(X)$, entonces $M \preceq N$ si M es un subconjunto de N . ¿Define \preceq una relación de orden? ¿Es total o parcial?

44. Se considera un conjunto A no vacío y X el conjunto de todas las aplicaciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. En X se define la relación $f \preceq g$ si para todo $a \in A$ se da que $f(a) \leq g(a)$. Estudia si \preceq es un orden en X . ¿Es total o parcial?

45. Se consideran $A \subset \mathbb{R}$ y las funciones $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(a) = a$ y $g(a) = a^2$. Estudia la relación que hay entre ambas para el orden \preceq del ejercicio anterior en los casos $A = [0, 1]$, $A = \mathbb{N}$ y $A = \mathbb{R}$.

46. Si \leq es una relación de orden en X e $Y \subset X$, entonces \leq es una relación de orden en Y .

Cardinal o potencia de un conjunto. Conjuntos numerables y no numerables

Decimos que un conjunto A tiene el mismo cardinal (o es de la misma potencia) que otro B cuando existe una biyección entre A y B . Los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$ tienen el mismo cardinal. También lo tienen \mathbb{N} y $\mathbb{N} \cup \{0\}$, pues $f(n) = n - 1$ define una biyección entre ambos. Se suele notar $|A|$ (o $\text{card}(A)$ o $\#A$) el cardinal de un conjunto A . Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$ cumplen que $|A| = |B| = 3$ y si $C = \{b, c, 1, 4\}$, $|C| = 4$, $|A \cup B| = 6$, $|B \cup C| = 5$, $|A \cap C| = 2$ y $|A \cup B \cup C| = 6$.

47. Si X es un conjunto finito, calcula el cardinal del conjunto de las partes de X , ya definido, por inducción sobre el cardinal de X .

Un conjunto A se dice *numerable* cuando tiene el mismo cardinal (o es de la misma potencia) que \mathbb{N} , es decir cuando existe una biyección entre A y \mathbb{N} .

48. Demuestra que son numerables los siguientes conjuntos.

- a) El conjunto de los números naturales pares.
- b) El conjunto de los cuadrados perfectos.
- c) Cualquier subconjunto infinito del conjunto de números naturales.
- d) El conjunto \mathbb{Z} de los números enteros.
- e) La unión de dos conjuntos numerables disjuntos. (También es cierto que la unión de dos conjuntos numerables cualesquiera es numerable, la demostración es más complicada).
- f) El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- g) El conjunto \mathbb{Q} de números racionales.

49. Vamos a llamar *palabra infinita de dos letras* A y B a una ristra infinita del tipo $ABABBABBA\dots$. Considera el conjunto \mathcal{P} de todas las palabras infinitas de dos letras. Demuestra, por reducción al absurdo, que \mathcal{P} no es numerable. [Sugerencia: Supón que \mathcal{P} fuera numerable. Entonces podrías colocar todas las palabras de \mathcal{P} en un cuadro infinito como sigue:

- (1) A B A B B A B B A...
- (2) A A B A A B A A B...
- (3) B B B A A B A B A...
- (4) B B B B A A B A B...
- (5) A A A A A A B B A...
- (6) B B A B A A B A A...

.....

Toma la palabra infinita que corresponde a la diagonal de este cuadro $AABBAA\dots$ y forma la palabra que resulta de cambiar en ella cada A por B y cada B por A , es decir, la palabra $BBAABB\dots$. Justifica que no está en el cuadro y concluye que \mathcal{P} no es numerable].

50. **a)** Todo número real admite una expresión decimal (única si excluimos aquellas expresiones que a partir de un lugar en adelante están formadas por nueves). Observa que, de acuerdo con ella, cualquier número real del intervalo $[0, 1)$ puede identificarse de forma única mediante una ristra de los diez símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Utiliza este hecho y la forma de proceder del ejercicio anterior para demostrar que el conjunto de los números reales del intervalo $[0, 1)$ no es numerable.

b) Observa que el conjunto $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ es numerable. ¿Por qué no puede usarse el mismo argumento del apartado **a)** para este conjunto, aunque cada $x \in A$ admite una expresión decimal como la de arriba?