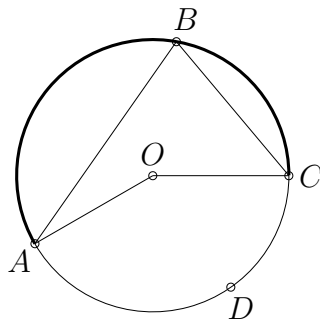


EL EJERCICIO DE LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Demostración directa

En el tipo de demostración conocido como **demostración directa** (hacia adelante) se trata de demostrar que $A \Rightarrow B$ partiendo de A y deduciendo proposiciones hasta llegar a B .

1. Prueba que el cubo de un número impar es también impar.
2. En el conjunto de los números enteros, demuestra que si m y n son múltiplos de p , entonces $m + n$ y $m - n$ también son múltiplos de p .
3. Prueba que dadas dos rectas que se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
4. Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° (o π radianes).
5. Demuestra que un triángulo isósceles (es decir, aquel que tiene dos lados de la misma longitud) tiene dos ángulos iguales.
6. Prueba que si la recta r corta a la circunferencia K en dos puntos P y Q , entonces los radios de K con extremos P y Q forman con r ángulos iguales.
7. Sea K una circunferencia y P un punto exterior a ella. Sean r y r' las rectas tangentes a K desde P y sean A y A' los puntos de tangencia. Demuestra que $PA = PA'$.
8.
 - a) Justifica que si P y Q son los extremos del diámetro de una circunferencia y B es otro punto sobre la circunferencia, el ángulo \widehat{PBQ} es recto.
 - b) Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos situados en una circunferencia de centro O . Prueba que $2\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$. Relaciona el ángulo \widehat{ADC} con el ángulo \widehat{ABC} .



9.
 - a) La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y de B . Prueba que la mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular a AB que pasa por el punto medio del segmento. Traza la mediatriz de un segmento con regla y compás.

- b) Demuestra que las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto.
- c) Demuestra que si $ABCD$ es un rombo, las diagonales AC y BD son perpendiculares y se cortan en su punto medio.
10. a) La **bisectriz** del ángulo α determinado por las semirrectas r y s es una semirrecta que divide a α en dos ángulos iguales. Prueba que la bisectriz del ángulo determinado por las semirrectas r y s es una semirrecta formada por los puntos que distan lo mismo de r y de s . Traza la bisectriz de un ángulo con regla y compás.
- b) Demuestra que las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto.
11. a) Dado $a \neq 0$, encuentra p, q tales que $ax^2 + bx + c = a[(x - p)^2 - q]$.
- b) Utiliza lo anterior para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

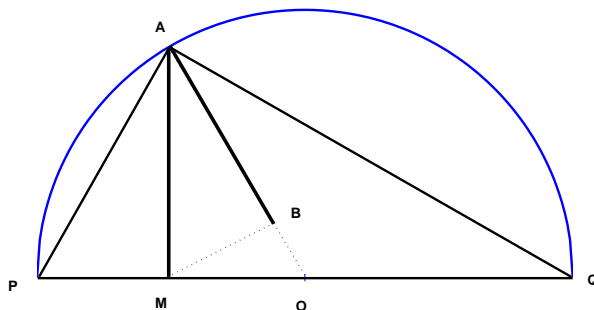
Marcha atrás

Una estrategia para encontrar una demostración directa consiste en proceder **mar-cha atrás**, más o menos como sigue. Como antes, quieres probar que $A \Rightarrow B$. Te preguntas (siempre con un ojo en A) qué proposiciones implican B . Encuentras que $P \Rightarrow B$; no es lo que buscas, pero tal vez P está más cerca de A . Te preguntas a continuación cómo podrías llegar a P . Encuentras que $Q \Rightarrow P$. Tal vez ahora ya eres capaz de ver que $A \Rightarrow Q$. Si fuera así, ahora ya podrías construir la demostración directa $A \Rightarrow Q \Rightarrow P \Rightarrow B$.

12. Demuestra que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ si $x > 0$.
13. a) Si x e y son números reales positivos, prueba que

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

- b) Justifica con los segmentos AB , AM y AO las desigualdades anteriores, sabiendo que $PM = x$ y $MQ = y$.



14. (*) En una semicircunferencia de diámetro AOB , elegimos un punto E distinto de los extremos A y B . Trazamos la recta r tangente a la semicircunferencia en E y la recta s tangente a la semicircunferencia en B ; estas tangentes se cortan en el punto C . A continuación trazamos la recta AE que corta a la recta s en D . Prueba que $BC = CD$.

Demostración por contraposición

En ocasiones, para conseguir demostrar la proposición $A \Rightarrow B$, resulta más sencillo demostrar la proposición $\neg B \Rightarrow \neg A$. En los siguientes ejercicios te pedimos que, utilizando este método de demostración, llamado **demostración por contraposición**, demuestres las siguientes proposiciones:

15. Sea a un número real. Demuestra que si a es irracional, entonces $7a$ es irracional.
16. Si n es un entero y n^2 es par (respectivamente, múltiplo de 3), prueba que n es par (respectivamente, múltiplo de 3).
17. Si p y q son números reales positivos tales que $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$, entonces $p \neq q$.
18. (*) Si c es un número impar, la ecuación $n^2 + n - c = 0$ no admite soluciones enteras.
19. Si en un cuadrilátero no hay ningún ángulo obtuso, dicho cuadrilátero es un rectángulo.
20. Demuestra que si $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ es una terna de números pitagóricos (es decir, verifican que $m^2 = n^2 + p^2$), entonces al menos uno de ellos es par.

Reducción al absurdo

Otra forma de demostración muy utilizada es la conocida como demostración por **reducción al absurdo**: Quieres demostrar que $A \Rightarrow B$ y para ello demuestras que

$$\neg A \text{ y no } B \Rightarrow \neg P \text{ y no } P,$$

para cierta proposición P .

21. Demuestra que si la recta r corta a una circunferencia K en un punto P y forma con el radio de K que termina en P un ángulo recto, entonces r corta a K solo en P . [Recuerda el ejercicio 6].
22. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 + 1 \geq 2x$.
23. Si n es un número natural mayor que 2, no hay ningún número natural m con $n + m = nm$.
24. Demuestra que hay una cantidad infinita de números primos.

25. Prueba que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional.
26. (*) Prueba que existen dos números irracionales, a y b , tales que a^b es un número racional.

Demostración por inducción

Quieres demostrar que $P(n)$ es cierta, siendo $P(n)$ una proposición que tiene que ver con el número natural n , por ejemplo, que la suma de los n primeros números naturales vale $\frac{n(n+1)}{2}$ (apartado *a*) del ejercicio 31). Procede así:

- Demuestra que $P(1)$ es cierta.
- Demuestra que si $P(k)$ es cierta, entonces $P(k+1)$ es cierta.

Así queda claro que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

27. Demuestra por inducción que si $f_n(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'_n(x) = nx^{n-1}$, utilizando la fórmula de la derivada del producto.
28. Deduce una fórmula para la derivada n -ésima de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Demuéstrala por inducción.
29. Demuestra por inducción que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se cumple que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
30. a) Demuestra que si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces $10^n - 1$ es múltiplo de 11.
b) Demuestra que si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces $10^n + 1$ es múltiplo de 11.
31. Demuestra por inducción las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} & b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ c) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} & d) \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \\ e) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} & f) \prod_{k=1}^n (4k-2) = \frac{(2n)!}{n!} \end{array}$$

32. Utiliza alguna de las fórmulas del ejercicio 31 para demostrar que el cubo de cualquier número entero es la diferencia de los cuadrados de dos números enteros.
33. Usa fórmulas del ejercicio 31 para calcular las soluciones de la ecuación

$$(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 3x + 5) + \cdots + (x^2 + 20x + 39) = 4500$$

34. Si para cada $a, b, d, r \in \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ se consideran los números $a_k = a + kd$ y $b_k = b \cdot r^k$, calcula $\sum_{k=0}^n a_k$, $\sum_{k=m}^n a_k$, $\sum_{k=0}^n b_k$ y $\sum_{k=m}^n b_k$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.

35. Sea $n \in \mathbb{N}$.
- Prueba que si $n \geq 3$, se da que $n^2 > 2n + 1$.
 - Prueba que si $n \geq 5$ entonces $2^n > n^2$.
36. (*) Demuestra que si en una hoja de papel trazas n segmentos, cada uno de los cuales empieza en un punto de un borde del papel y acaba en un punto de otro borde, entonces las regiones de la hoja así definidas se pueden pintar con dos colores de modo que cada dos trozos con borde común tiene distinto color.
37. Demuestra que si tenemos n puntos en el plano de modo que no hay tres en línea recta, el número de segmentos que determinan es $\frac{n(n-1)}{2}$.
38. Encuentra dónde está el error en el siguiente argumento. Vamos a demostrar que todos los coches de Madrid son rojos. Demostramos por inducción que todos los coches de un conjunto finito de coches son del mismo color. Supongo que la tesis es cierta para cualquier conjunto de n coches y la demuestro para cualquier conjunto de $n+1$ coches. Sea A un conjunto de $n+1$ coches, sea A_1 el subconjunto de A formado por los n primeros coches y A_2 el subconjunto de A formado por los n últimos coches. Consideramos un coche en la intersección $A_1 \cap A_2$. Por la hipótesis de inducción los coches de A_1 tienen todos el mismo color y los coches de A_2 tienen todos el mismo color. Considerando un coche en la intersección $A_1 \cap A_2$, vemos que los coches de A_1 y de A_2 tienen todos el mismo color. Como $A = A_1 \cup A_2$, concluimos que los coches de A todos tienen el mismo color. Como el conjunto de coches en Madrid es finito, todos los coches de Madrid tienen el mismo color. Como mi coche es rojo, todos los coches de Madrid son rojos.

La **inducción completa** es una generalización del método de inducción. Procedes de la siguiente forma:

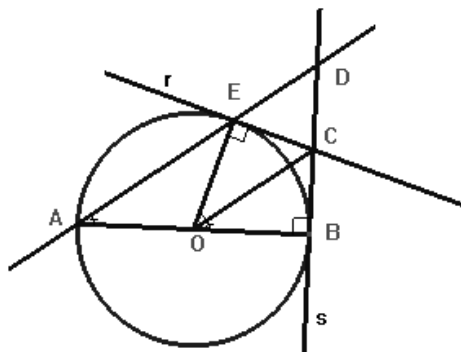
- Demuestras que $P(1)$ es cierta.
- Demuestras que si $P(1), P(2), \dots, P(k)$ son ciertas, entonces $P(k+1)$ es cierta.

Así pruebas que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

39. Prueba que todo número natural distinto de 1 se puede representar como producto de primos.
40. Demuestra que cualquier número natural se puede escribir como suma de distintas potencias de 2.
41. Demuestra que cualquier polígono, convexo o no, se puede descomponer en triángulos mediante diagonales disjuntas. [Indicación: Todo polígono tiene al menos una diagonal totalmente contenida en su interior]. Demuestra que la suma de los ángulos de todo polígono de n lados, no necesariamente convexo, es $(n-2)180$ grados.

Soluciones a los ejercicios con (*)

- 14 Tenemos que demostrar que en las condiciones dadas $BC = CD$. Habremos demostrado que $BC = CD$ si demostramos que OC es paralela a AD , ya que en este caso los triángulos ADB y OCB serían semejantes (de razón $1 : 2$, por ser O el punto medio del diámetro AB) y ya estaría. Para ver que OC es paralela a AD basta con probar que $\widehat{COB} = \widehat{DAB}$.



Pero, claramente si $\widehat{DAB} = \alpha$ entonces $\widehat{EOB} = 2\alpha$ y fácilmente podemos ver que la línea OC es la bisectriz del ángulo \widehat{EOB} (los triángulos OBC y OEC son iguales). Por lo tanto hemos visto que $\widehat{COB} = \alpha = \widehat{DAB}$ y ya tenemos lo que queríamos probar, es decir que $BC = CD$.

- 18 Si n es un entero cualquiera, $n^2 + n$ siempre es par [justifícalo] y, por lo tanto, $n^2 + n - c$ siempre es impar si c es impar.
- 26 Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario de lo que queremos probar, es decir, que para todos los números irracionales, p y q , se cumple que p^q es irracional. Entonces, $p = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional. Y aplicando de nuevo lo que estamos dando por cierto, $p^{\sqrt{2}}$ es también un número irracional, pero hemos llegado a contradicción porque dicho número es 2, que es racional. Por tanto el enunciado inicial es cierto.
- 36 Si sólo hay un segmento, está claro que se puede colorear. Supongamos que también se puede cuando hay k segmentos. Queremos ver que también se puede cuando hay $k + 1$ segmentos. Nos ponemos delante de una hoja con $k + 1$ segmentos. Quitamos uno cualquiera. Nos queda una hoja con k segmentos. Según la hipótesis se puede colorear. Lo coloreamos. Ahora reponemos el segmento que hemos quitado. Éste divide el papel en dos partes. A todas las regiones que quedan en una de las dos partes les cambiamos de color. Las regiones de la otra parte conservan el color que tenían. La hoja inicial de $k + 1$ segmentos queda coloreado de acuerdo con las normas dadas. Si un trozo de ese segmento que hemos quitado y hemos puesto es frontera de dos regiones, éstas tienen distinto color. Cualquier otro segmento de frontera delimita regiones de distinto color.

Ejercicios de reserva

42. Si dos rectas de un plano se cortan en un punto P y cortan a una circunferencia en los puntos A y B y C y D , respectivamente, entonces los productos de los segmentos $AP \cdot BP$ y $CP \cdot DP$ son iguales.
43. (Recíproco del Teorema de Pitágoras). Si el triángulo T de lados a, b y c cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces T es rectángulo y su hipotenusa es c .
44. Prueba que si A es un subconjunto no vacío de números naturales, entonces existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in A$. [Se sugiere suponer que A no tiene primer elemento, considerar el conjunto $B := \{k \in \mathbb{N} : 1, 2, 3, \dots, k-1, k \text{ no pertenecen a } A\}$ y probar por inducción que $B = \mathbb{N}$ y por tanto A sería vacío].
45. Con el ejemplo sugerido en la solución del ejercicio 26, da una demostración directa de que existen a, b irracionales tales que a^b es racional.
46. Se colocan de forma arbitraria 10 puntos en una circunferencia y se numeran al azar con los números $1, 2, \dots, 9, 10$. Se forman las diez ternas de puntos consecutivos y se calcula la suma de cada una de ellas (observa que las diez cantidades suman 165, dado que cada número interviene en tres ternas y la suma de los diez primeros naturales es 55). Demuestra por contraposición que hay una terna de puntos que suma al menos 17.