

LENGUAJE COTIDIANO Y LENGUAJE MATEMÁTICO

Proposiciones matemáticas

Una *proposición matemática* es una afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos y que es verdadera o falsa (es decir, que tiene necesariamente uno de los dos valores posibles **V** o **F**).

1. Para cada uno de los siguientes apartados, decide cuáles son proposiciones matemáticas y por qué.

a) $2 + 3 = 5$

b) $2 + 3$

c) El número 2 es un número par

d) $3 + n + n^2$

e) $\sin \frac{\pi}{2} < \sin \frac{\pi}{4}$

f) Para cada ángulo t se tiene $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

g) $ax^2 + bx + c = 0$

h) Existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $ax^2 + bx + c = 0$

2. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones matemáticas son verdaderas?

a) La raíz cuadrada de cualquier número entero es un número real no negativo.

b) Existe un ángulo t tal que $\sin t = \cos t$.

c) (*) Si $x < 1$, entonces $x^2 < 1$

Conectores lógicos

El conector /O/ y el conector /Y/

A continuación escribimos la tabla de verdad para la **conjunción** /A y B/ y otra para la **disyunción** /A o B/. Es decir, establecemos la verdad o falsedad de ambas proposiciones según la verdad o falsedad de la proposición A y de la proposición B . La conjunción /y/ se denota con el símbolo \wedge . La disyunción /o/ se denota con el símbolo \vee .

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. Explica el significado de esta frase, que se lee en la librería de la Universidad.

/Nuestros clientes en posesión de carnet de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15% de descuento./

4. Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque de atracciones y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice /No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque de atracciones./ Explica lo que el padre quiere decir con toda claridad. ¿Tiene este /o/ el mismo significado que en el ejercicio anterior? ¿A cuál de los dos significados se acerca el del /o/ de las matemáticas?

Marta y Javier necesitan un medicamento. Un amigo dice a Javier: **Si conseguimos un casco, puedo llevaros a una farmacia en mi moto o bien a Marta o bien a ti.** Observa que este uso de la disyunción sí es excluyente.

5. Una profesora de lógica matemática ha tomado su baja de maternidad. Sus compañeros la llaman por teléfono para felicitarla y preguntan: ¿Fue niño o niña? Ella responde: sí ¿Es correcta la respuesta?
6. (*) Pepe dice: /Ordené que viniera Pedro o Juan./ Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?
7. (*) ¿Es correcto decir en el lenguaje matemático /3 es menor o igual que 5/? ¿Es correcto decir /5 es menor o igual que 5/?
8. Completa la siguiente tabla de verdad.

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	F		
F	F	V		

El conector /NO/

La tabla de verdad del conector /no/, que denotamos con \neg , es la siguiente:

A	$\neg A$
V	F
F	V

9. Escribe la negación de las frases siguientes:
- /Su madre es profesora y doctora en Química./
 - /Javier tiene en su casa un hurón o una nutria./
 - /Todos mis amigos son aficionados al baloncesto./
10. Completa las siguientes tablas de verdad:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

11. (*) Construye una frase sencilla y clara equivalente a la siguiente:

/No es cierto que se preparara las matemáticas de la prueba de acceso y el teórico de conducir durante la tarde del sábado./

Sobre la proposición /Si A entonces B/

Una de las situaciones que más aparecen en Matemáticas es demostrar que es cierta la afirmación /Si A entonces B/, a veces escrita $A \Rightarrow B$ y leída "A implica B". A continuación escribimos la tabla de verdad sobre esta implicación.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

12. (*) /Si el Granada no gana el partido el domingo, Pepe será muy infeliz./

Tras la victoria del Granada, encontramos a Pepe totalmente infeliz. La verdad de esta proposición, ¿es compatible con esta situación?

13. Quieres demostrar que /**A implica B**/ es falso. ¿Cómo procederías?

- Demostrando que B es falso.
- Demostrando que A es falso.
- Demostrando que B es falso y que A es verdadero.
- Demostrando que B es verdadero y que A es falso.
- Demostrando que B es falso y que A es falso.

14. Para cada una de las proposiciones siguientes identifica cuál es la hipótesis y cuál la tesis o conclusión.

- Si ABC es un triángulo rectángulo, de lados a, b, c , tales que a es la hipotenusa y su área es $\frac{a^2}{4}$, entonces el triángulo ABC es isósceles.
- Si n es un número entero entonces n^2 es un número entero.
- (*) Si a, b, c, d, e, f son números reales con la propiedad $ad - bc \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones $\{ax + by = e, cx + dy = f\}$ tiene una única solución.
- La suma de los n primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

15. (*) Tu tarea es demostrar que $\neg A$ implica B es verdadera y sabes que B es falso. ¿Qué tratarás de demostrar y por qué?
- Que A es verdadero.
 - Que A es falso.
16. Consideremos la siguiente afirmación /Si $n - 1$ es múltiplo de 3, también lo es $n^2 - 1$./
- ¿Qué dice el enunciado anterior en los casos $n = 4$, $n = 5$ y $n = 6$?
 - ¿Puede ser cierta la afirmación anterior?
17. Completa la siguiente tabla de verdad y compárala con la tabla de la implicación.

A	B	$\neg A \vee B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Equivalencias

18. (*) Supongamos que n es un número natural. Decide si la proposición $\neg n^2$ es par si y sólo si n es par/ es verdadera o es falsa. Justifica tu respuesta.
19. Supongamos que r es un número real. La proposición $\neg r^2$ es racional si y sólo si es r es racional/ ¿es verdadera o es falsa? Demuéstralo.
20. Sean A y B dos matrices 2×2 . ¿Es cierto que $AB = A^2$ si y sólo si $A = B$? Justifica tu respuesta.
21. Sea a un número real. Decide si la condición $a^2 < a$ es a) suficiente, b) necesaria, c) necesaria y suficiente ... para que $a^3 < a^2$. ¿Por qué?
22. Decide si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
- La condición necesaria y suficiente para que dos rectas de \mathbb{R}^3 se corten en un punto es que sean coplanarias.
 - Si dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares, entonces la dirección de toda recta contenida en π_1 es perpendicular a la de toda recta contenida en π_2 .
 - Si la recta r es perpendicular al plano π , entonces la dirección de r es perpendicular a la de toda recta contenida en π .
 - Si los planos π_1 y π_2 se cortan a lo largo de una recta, entonces no existen rectas paralelas $r_1 \subset \pi_1$ y $r_2 \subset \pi_2$.
23. Se consideran dos números reales a y b . Marca cada casilla del siguiente cuadro con un número del 1 al 5, de acuerdo con el convenio que se indica al final:

	$a + b \in \mathbb{Q}$	$a + b \notin \mathbb{Q}$	$ab \in \mathbb{Q}$	$ab \notin \mathbb{Q}$
$a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$				
$a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$				
$a \notin \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$				

- [1] La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba.
 [2] La condición de la izquierda hace que la de arriba se cumpla sólo si $a = 0$.
 [3] La condición de la izquierda hace que la condición de arriba nunca se cumpla.
 [4] La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba si $a \neq 0$.
 [5] La condición de la izquierda hace que la condición de arriba se cumpla en algunos casos particulares, pero no en otros.

Cuantificadores lógicos, sus concatenaciones y sus negaciones

24. Sean M el conjunto de todas las personas de una cierta ciudad, P el conjunto de todos los periódicos que se publican en esa ciudad y D el conjunto de todos los días del año. Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos \forall y \exists , cada una de las siguientes afirmaciones entre barras:

- a) /Hay alguien que todos los días compra todos los periódicos./
 b) /Todos los días hay alguien que compra todos los periódicos./
 c) (*) Esta ciudad es muy instruida. Aquí /todos compran algún periódico todos los días./
 d) /Todos los días hay algún periódico que todo el mundo compra./
 e) (*) Somos poco aficionados a la prensa en este pueblo, pero al menos /todos los días hay alguien que compra algún periódico./
 f) Es una ciudad de maniáticos. /Todos compran todos los periódicos todos los días./
 g) (*) Aquí sí que somos ajenos a la prensa, pero al menos /hubo un día en que alguien compró algún periódico./
 h) Esta ciudad está dominada por un diario. /Todo el mundo lo compra todos los días./
 i) Aquí todos somos muy fieles. /Todos compran siempre el mismo periódico/, el suyo de toda la vida.
 j) Fue tal el notición que /aquel día todo el mundo compró todos y cada uno de los periódicos./
 k) "La Ciudad" se llevó la exclusiva y así /este día hubo un periódico que fue comprado por todo el mundo./

25. Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales. ¿Es cierta la siguiente afirmación?
 /Para cada elemento n del conjunto \mathbb{N} , existe un número real M tal que $n < M$ /.
 ¿Hay alguna diferencia entre la anterior afirmación y la siguiente?
 /Existe un número real M tal que para cada elemento n del conjunto \mathbb{N} , se cumple que $n < M$ /.
 /

26. (*) Escribe con cuantificadores y decide si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
- Para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$, existe un número real y con $0 \leq y \leq 1$ tal que $x + y = 1$.
 - Existe un número real y con $0 \leq y \leq 1$ tal que, para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$, se satisface que $x + y = 1$.
27. Explica si en cada uno de los siguientes pares de proposiciones a y b son las dos verdaderas, las dos falsas o una verdadera y otra falsa:
- (*) a) 1) Para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$ y cada número real y con $0 \leq y \leq 2$, se cumple $2x^2 + y^2 \leq 6$.
- 2) Para cada número real y con $0 \leq y \leq 2$ y cada número real x con $0 \leq x \leq 1$, se cumple $2x^2 + y^2 \leq 6$.
- b) 1) Para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$ y cada número real y con $0 \leq y \leq 2x$, se tiene que $2x^2 + y^2 \leq 6$.
- 2) Para cada número real y con $0 \leq y \leq 1$ y cada número real x con $0 \leq x \leq 2y$, se tiene que $2x^2 + y^2 \leq 6$.
28. Escribe la negación de la siguiente proposición: *No existe un entero x tal que $x^2 + x - 11 = 0$* . Escríbela también usando cuantificadores.
29. Escribe la negación de la siguiente proposición:
 $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x = y^2$.
30. Decide si la siguiente proposición es verdadera o falsa y escribe su negación:
 $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{1+x} = y$.
31. Decide cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:
- Para todo par de números reales x, y que satisfagan $x \neq y$ se cumple que $x^3 + 5 \neq y^3 + 5$.
 - Ningún par de números reales x, y cumple $x \neq y \wedge x^3 + 5 = y^3 + 5$.
 - $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}$, si $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.
 - Existen pares de números reales x, y que satisfacen $x^2 + 5 = y^2 + 5 \wedge x \neq y$.
32. Describe cuál es la diferencia entre las dos proposiciones siguientes:
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$ tal que si $x < y \Rightarrow x < c < y$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$ se satisface que $x < y \Rightarrow x < c < y$.
- ¿Son verdaderas o falsas?
33. Niega la proposición **P**, es decir, escribe la proposición **no P**, de manera que no aparezca explícitamente la palabra **no**. Luego, decide en cada caso si es verdadera **P** o **no P**.

- a) (*) **P**: /Para cada número real $x > 0$ se cumple que $x^2 - x > 0$ /.
- b) **P**: /Hay triángulos rectángulos con los tres lados iguales/.
- c) **P**: /Los múltiplos de 3 son impares/.
- d) (*) **P**: Para cada número real x tal que $-1 \leq x \leq 1$, existe un número real y con $-1 \leq y \leq 1$ tal que $x^2 + y^2 \leq 1$.
- e) **P**: Existe un número real x con $-1 \leq x \leq 1$ tal que para cualquier número y con $-1 \leq y \leq 1$ se cumple que $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ejercicios de reserva

34. Construye una frase sencilla equivalente a
/No es verdad que tú seas cordobés ni que tu padre sea segoviano./
35. Sean P el conjunto de los programas de radio y D el conjunto de todos los días del año. Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos \forall (**para todo, para cada**) y \exists (**existe, para algún**), cada una de las frases siguientes:
- a) Cada día oigo algún programa en la radio.
- b) Hay un programa en la radio que oigo todos los días.
- c) Algún día oigo algún programa en la radio.
36. Para B un subconjunto de \mathbb{R} se consideran las proposiciones:
- P**: / Existe un número real M que es mayor o igual que todos los elementos de B ./ Si la proposición **P** es cierta para B , se dice que B está *acotado superiormente* y que M es una *cota superior* de B .
- Q**: / Existe un número real b perteneciente a B que es mayor o igual que todos los elementos de B ./ Si la proposición **Q** es cierta para B , se dice que b es el máximo del conjunto B .
- R**: / Existe un número real S que es mayor o igual que todos los elementos de B y, además, si M es cualquier cota superior de B se cumple que S es menor o igual que M ./ Si la proposición **R** es cierta para el conjunto B , se dice que S es el supremo de B .

Escribe con cuantificadores las proposiciones **P**, **Q** y **R**. ¿Son ciertas las proposiciones **P**, **Q** y **R** si $B = (0, 1)$, $B = (0, 1]$ o si $B = (0, \infty)$?

Soluciones a ejercicios con asterisco

- 2c Es falso, ya que si $x = -2 < 1$ entonces $x^2 = (-2)^2 = 4 > 1$.
- 6 Sí, pero bastaba que viniera uno de los dos para que se hubiera cumplido.
- 7 Las dos cosas son correctas y aparecen en el lenguaje matemático.
- 11 /**No** (A y B)/ es equivalente a /**no** A o **no** B /. No se preparó las matemáticas la tarde del sábado o no se preparó el teórico de conducir esa tarde.
- 12 Sí es compatible. La implicación / $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ / es verdadera siempre que \mathbf{A} es falsa, tanto sea \mathbf{B} verdadera o falsa. En este caso, la proposición \mathbf{A} es *Pierde el Granada* y la proposición \mathbf{B} es *Pepe será muy infeliz*.
- 14c Hipótesis: $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ y $ad - bc \neq 0$. Tesis: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ tiene solución única.
- 15 Tengo que demostrar que A es falso, ya que si A fuera verdadero y es verdad que $A \Rightarrow B$, B tendría que ser verdadero.
- 18 Es verdadera. En primer lugar, probemos que si n^2 es par entonces n es par. Escribiendo $n = 2k + r$, con $r = 0$ o $r = 1$, se tiene que $n^2 = (2k + r)^2 = 4k^2 + 4kr + r^2 = 2(2k^2 + 2kr) + r^2$. Como $r^2 = r$ y n^2 es par, se deduce que $r = 0$. Por otro lado, si n es par, entonces $n = 2k$ y, así, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ que es par.
- 24c $\forall d \in D, \forall m \in M, \exists p \in P \mid (m \text{ compra } p \text{ en } d)$.
- 24e $\forall d \in D, \exists m \in M, \exists p \in P \mid (m \text{ compra } p \text{ en } d)$.
- 24g $\exists d \in D, \exists m \in M, \exists p \in P \mid (m \text{ compra } p \text{ en } d)$.
- 26 a) Es cierta. b) Es falsa.
- 27a 1 y 2 dicen lo mismo y son verdaderas.
- 33a P falsa: para $x = 1/2$, se tiene que $x^2 - x = -1/4 < 0$.
- 33d P es verdadera: basta tomar para cada x el número $y = \sqrt{1 - x^2}$.