MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

4. La Derivada de una Función. Aplicaciones.

4.1. Sea f una función que satisface $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ para cualesquiera x e y. Si además $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 7$,
a) calcula $f(0)$
b) utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

4.2. Si $y = ax + b$ es la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 \sin x + 1$ en el punto $(\pi, 1)$, entonces $b = ...$
a) $-\pi^3$ b) $\pi^4 + 1$ c) $-\pi^3 + 1$ d) $\pi + 1$.

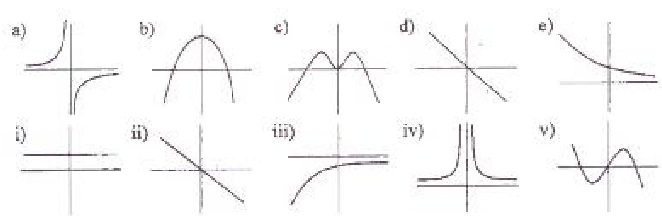
4.3. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & si \quad x < -1 \\ 2 + x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + e^{-x} & si \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x \log x}{x-1} & si \quad x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 1 & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Dibuja la gráfica aproximada de cada función y estudia sus máximos y sus mínimos.

4.4. Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Al desconectar el cohete, viajará a lo largo de la tangente a la curva por el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(4, 9)$? ¿Y para llegar al $(4, -9)$?

4.5. Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.



4.6. Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones. A continuación, dibuja sus gráficas y halla los máximos y mínimos locales:
a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$
b) $f(x) = (x^5 + x + 1)^{-1}$ en $[-1, 1/2]$

4.7. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$
e) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$ f) $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$
g) $f(x) = a/x^2 + 1/x$, con $a > 0$ h) $f(x) = x^a \sin 1/x$ i) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

4.8. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{\log x}{x}$. ¿Qué es mayor: e^π o π^e?

4.9. Una farola , que tiene su luz a 3m de su base, ilumina a un peatón de 1,75 m que se aleja a una velocidad de 1m/s ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?

4.10. Los beneficios de una fábrica de camisas depende del número de camisas que se fabrican cada día, según la fórmula $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 19$, donde x mide el número de miles de camisas fabricadas al día y f(x) la ganacia en miles de euros al mes. Atendiendo al número de máquinas y personal necesarios, la fábrica puede optar por fabricar un número diario de camisas comprendido entre 1000 y 1400. ¿Cuántas camisas debe fabricar para obtener un beneficio máximo?

4.11. Un rectángulo tiene dimensiones a y b. ¿Cuál es el área del mayor retángulo circunscrito a éste? (Es decir, los vértices del rectángulo dado están sobre los lados del rectángulo pedido).

4.12. En el triángulo isósceles ABC, el lado desigual mide 4cm y la altura que parte de A, 1 cm. Calcula el punto de dicha altura desde el que la suma de distancias a los vértices es mínima.

4.13. Calcula los siguientes límites:
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$
c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4}(\sqrt{2\cos x^2} - \sqrt{2})$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}$.

4.14. Demuestra que $1/9 \leq \sqrt{66} - 8 \leq 1/8$.

4.15. Si f es derivable en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = A$, calcúlese:
a) $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x)$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$
c) Demuestra que $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0$.

4.16. Un vehículo recorre sin detenerse los 205 km de un tramo de autovía en 1h y 40'. Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿superó el vehículo en algún momento el límite de velocidad?

4.17. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y derivables.
a) Si $f'(x) = 0$ para todo x, prueba que f es constante
b) Si $f'(x) = g'(x)$ para todo x, prueba que $f(x) = g(x) + cte$.

4.18. Si f es derivable y $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, prueba que f es monótona creciente o decreciente. Deduce que f es inyectiva.

4.19. Prueba que si f es derivable en a, entonces $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$. Justifica que si existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, la función f no es necesariamente derivable en a.

4.20. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Prueba que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

4.21. Un profesor despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función f definida en el intervalo $(0, 2)$ y de modo que $f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 < x < 2 \end{cases}$ y que pase por el punto $(1, 3)$. Los estudiantes intentan calcularla y se llevan una sorpresa. Intenta explicar qué es lo que ocurre.

4.22. a) Pon un ejemplo de una función f, derivable sobre un intervalo acotado, de modo que f no esté acotada.
b) Pon un ejemplo de una función f, derivable sobre un intervalo acotado, de modo que f no tenga ni máximo ni mínimo en el intervalo.

4.23. En los siguientes siete apartados, algunas afirmaciones son ciertas otras no. Justifica como son cada una de ellas:

1) Las funciones siguientes son derivables en $x = 0$.
a) $f(x) = x|x|$ b) $f(x) = |x| \sin x$ c) $f(x) = \sin |x|$ d) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$
e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x \geq 0 \\ x^3 - x^2 + 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \quad x \geq 0 \\ x - 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$

2) Para todo $x \in (2, \infty)$ se verifica:
a) Si $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f''(x) = e^{x^2}$ b) Si $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2e^{x^2}$
c) $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
d) $f(x) = \sin x \Rightarrow f''(x) = \sin(x + \pi)$ e) $f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = \cos(x + \pi)$.

3) Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$ por $f(x) = xe^{2x} - 1$. Entonces:
a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x + 1)e^{2x}$ b) f es creciente en $(-1/2, \infty)$.
c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
e) La ecuación $f(x) = 1$ admite una única solución.

4) Sean la función definida por $f(x) = \log(\log |x|)$, D su dominio y l su gráfica.
a) $D = \mathbb{R}^+$ b) Para todo $x \in D, f'(x) = \frac{1}{|x| \log |x|}$
c) La ecuación de la recta tangente a l en el punto $(e, f(e))$ es $y = \frac{x-e}{e}$.
d) Para a y b con $e \leq a < b$, tenemos que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1/e$

5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y tal que la gráfica de f es simétrica respecto de la recta $x = 2$. Entonces:
a) Para todo $x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(2-x)$.
b) Para todo $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(4-x)$.
c) Para todo $x \in \mathbb{R}, f'(x+2) = f'(2-x)$.
d) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
e) Si $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -1$

6) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, \infty)$ y con $f(0) = 1$. Una fórmula para f puede ser:
a) $f(x) = |x| + 1$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
d) $f(x) = \log(x^2+1) + 1$ e) $f(x) = e^x - x$.

7) Sean $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ derivable y su derivada f', cuya gráfica es la del dibujo:
a) f es monótona en $[-1, 1]$ b) f admite un extremo en $x = 0$.
c) En el punto de abscisa $x = 0$, la gráfica de f tiene una tangente paralela a la recta $y = x$.
d) Para todo $x \in [-1, 1]$, $f(x) \geq 0$ e) f se anula al menos una vez en $[-1, 1]$.