

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

5. Aproximación de Funciones por Polinomios

5.1. Escribe todos los polinomios P tales que $P(0) = 1$, $P'(0) = P''(0) = 0$ y $P'''(0) = 2$. ¿Cuál es el de grado mínimo?

5.2. Halla los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado, de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \cos x$, grado 3 en 0. b) $f(x) = \arctan x$, grado 3 en 0.
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, grado $2n$ en $\pi/2$. d) $f(x) = e^x$, grado n en 1.
e) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4 en 0. f) $f(x) = \lg x$, grado 4 en 2.
g) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, grado n en 0. h) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}x$, grado $2n$ en 0.

5.3. a) Prueba la siguiente desigualdad:

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| < \frac{1}{5040} \quad \text{para todo} \quad |x| \leq 1.$$

b) Encuentra n_0 tal que $\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \right| < \frac{1}{10^{-4}}$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

5.4. Calcula los siguientes números con un error menor que 10^{-5} :

- a) $\cos 1$ b) e c) $\arctan \frac{1}{10}$.

5.5. Si $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$, prueba que:

$$\left| \lg(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5.6. Prueba que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

Utiliza la desigualdad anterior para aproximar los números $\sqrt{(1, 2)}$ y $\sqrt{(2)}$; y haz una estimación del error cometido. Utiliza el polinomio de Taylor de grado 2 para obtener una aproximación más precisa de $\sqrt{(1, 2)}$ y $\sqrt{(2)}$.

5.7. a) Demuestra que si $\arctan x$, $\arctan y$ y $\arctan x + \arctan y$ son distintos de $k\pi + \pi/2$, se tiene que:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + c$$

donde $c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Demuestra que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$. A partir de esta igualdad, comprueba que $\pi = 3, 14, 159, \dots$.

5.8. Determina el origen de las siguientes expresiones:

- 1) $\sqrt{(1+x)} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, si $|x| \simeq 0$.
2) $(\lg x)^2 \simeq (x-1)^2 - (x-1)^3$, si $|x| \simeq 1$.

5.9. ¿Para que valores de x la fórmula $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ da un error no mayor de 0,01? ¿Y para 0,001?

5.10. Sea f una función desarrollable en serie de Taylor en un entorno de cero. Si $f'' + f = 0$ y $f(0) = f'(0) = 0$, prueba que $f = 0$.