MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

6. La integral. Cálculo de Primitivas

6.1. Sea $f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in [0,2]\backslash\{1\} \quad \text{y} \quad f(1) = 2$.
a)Dibuja la gráfica de f.
b) Calcula el área del rectángulo $[0,2] \times [0,1]$.
c) Para cada $k \in \mathbb{N}$, se considera la partición del intervalo $[0,2]$

$$P_k = \{0, 1 - \tfrac{1}{k}, 1 + \tfrac{1}{k}, 2\}$$

Sea $S_k = 1 \times ((1 - \dfrac{1}{k}) - 0) + 2 \times ((1 + \dfrac{1}{k}) - (1 - \dfrac{1}{k})) + 1 \times (2 - (1 + \dfrac{1}{k}))$. ¿Qué área, dibújala, se corresponde al valor de S_k?
d) Calcula $\lim_{k\to\infty} S_k$.
e) ¿Coinciden los resultados de b) y d)?

6.2. Si $[x]$ representa la parte entera del número x, calcula $I_n = \int_0^n [x]dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

6.3. Prueba si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:
1) f es integrable, $f \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.
2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y con una cantidad finita de discontinuidades, entonces f es integrable.
3) Supongamos que $f \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f = 0$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ y f es continua en x_0, demuestra que $f(x_0) = 0$.

6.4. Analiza la integrabilidad de las siguientes funciones:

$$1)\ f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x & si & x \in [0,1) \\ x-2 & si & x \in [1,2] \end{array} \right. \qquad 2)\ f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ 1 & si & x \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1] \end{array} \right.$$

6.5. Calcula, utilizando la definición de integral, $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x^3 dx$.

(*Utiliza que*: $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} k^2 = (1/6)n(n+1)(2n+1) \quad \text{y que} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$).

6.6. Prueba que $\displaystyle 1/2 \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq 1$.

6.7. Cuatro estudiantes de informática no se ponen de acuerdo sobre el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x dx$. Antonio dice que vale π, Beatriz que es igual a $35\pi/128$; Carlos dice que vale $\dfrac{3\pi}{90} - 1$, mientras que Diana se inclina por $\pi/2$. Uno de los cuatro está en lo cierto. ¿Quién es? (No intentes calcular la integral. Dibuja la gráfica de la función).

6.8. Acudiendo a razonamientos geométricos, demuestra que:

a) $\int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^{1/n} dx = 1, n \in \mathbb{N}$. b) $\int_1^e \log x dx + \int_0^1 e^x dx = e$.

6.9. Deriva F, definida sobre $[0,1]$ del modo siguiente:

1) $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$ 2)$F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1} dt$

3) $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$, con g derivable y f continua 4) $F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1-t^2}dt$

5) $F(x) = \int_0^{\log x} e^{-t^2} dt$ 6) $F(x) = \int_0^{\sin x} \cos t dt$.

6.10. Sea $F(x) = \int_0^x -3t^2 + 24t - 45dt$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) F es decreciente en $\mathbb{R}$ b) La ecuación $F(x) = 0$ tiene tres raíces reales.
c) $F(x) < 0$ si $x < 0$. d) F es convexa si $x < 4$.

6.11. Una función F se llama primitiva de otra función f si $F' = f$. Calcula primitivas de las siguientes funciones:

a) x b) x^2 c) $\operatorname{sen} x$ d) $\cos x$ e) $\frac{1}{1+x^2}$ f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ g) $\frac{1}{x}$ h) x^2+1.

6.12. Calcula la integral $\int_0^\pi |\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}|dx$.

6.13. Obten las primitivas indicadas a continuación:

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ 2)$\int \cos^2 x dx$ 3) $\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}dx$

4) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ 5) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ 6) $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

6.14. Integra por partes:

1) $\int x^2 e^x dx$ 2) $\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx$ 3) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ 4) $\int x (\log x)^2 dx$

6.15. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción:

1) $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, $n > 2$ y par.

2) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$, $n > 2$ y par.

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$

6.16. Sea la función f continua en $[0,1]$. Prueba que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \right) = \int_0^1 f.$$

6.17. Utiliza el ejercicio anterior para expresar cada uno de los siguientes límites como una integral:

a) $\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k})$ b) $\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2})$ c) $\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2})$.

6.18. Relaciona los límites y las integrales siguientes. Después calcula cada uno de ellos.

1) $\displaystyle\int_0^1 a^x dx;\qquad \lim_{n\to\infty}(n\sqrt[n]{a}-1),\quad \text{con}\quad a>0.$

2) $\displaystyle\int_1^2 \log x dx;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1/n)(1+2/n)...(1+n/n)}.$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx;\qquad \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}).$

4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}dx;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

6.19. a) Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas:

1) $\int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi.$ 2) $\int_0^{2\pi}\cos^2 nxdx = \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 nxdx = \pi, \forall n\in\mathbb{N}.$

3) $\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi}\cos(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = 0,$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$ con $n\neq m$.

(*Indicación:* considera las siguientes igualdades trigonométricas $\cos A\cos B = 1/2(\cos(A+B)+\cos(A-B))$, $\cos A\operatorname{sen} B = 1/2(\operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B))$ y $\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = 1/2(\cos(A-B)-\cos(A+B))$.)

b) Dada una función f continua en $[0,2\pi]$, se definen sus coeficientes de Fourier por:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\text{y}\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Y se llama serie de Fourier de f a la expresión:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)$$

Calcula la serie de Fourier de la función $f(x)=x^2$

(*Observación:* se puede probar que toda función f derivable y 2π-periódica se puede escribir igual a su serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)).$$