MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

7. La Integral Impropia. Aplicaciones de la Integral

7.1. Obtén, mediante un cambio de variable, una primitiva en los casos siguientes:
1) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(e^x)dx$ 2) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx$ 5) $\displaystyle\int e^{e^x}e^x dx$
6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 7) $\displaystyle\int \frac{e^{x^{1/2}}}{\sqrt{x}}dx$ 8) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}dx.$

7.2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}dx =$
a) $\int_4^9 \operatorname{sen} y dy$ b) $\int_2^3 \frac{\operatorname{sen} y}{2y}dy$ c) $\int_4^9 \frac{\operatorname{sen} y}{2y}dy$ d) $\int_4^9 \frac{\operatorname{sen} y}{y^{1/2}}dy.$

7.3. Demuestra que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$

7.4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y de periodo p. Demuestra la igualdad

$$\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$

7.5. Calcula las siguientes integrales de funciones racionales:
a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^4-1}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx$

7.6. a) Calcula $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x dx.$
b) Análogamente, prueba que si $F=\int f$, entonces

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)).$$

7.7. Calcula una primitiva en los siguientes casos:
1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$ 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{tg} x}$
6) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$ 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ 8) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$
10) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}dx$ 11) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen} t dt)dx$

7.8. Demuestra que el área de un círculo de radio r es πr^2. (Recuerda que π es el área del círculo unidad por definición).

7.9. Calcula las siguientes integrales impropias:

1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ 2) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ 4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x dx$ 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+4x^2}$

6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x}dx$ 7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x\log x}$ 8) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ 9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

7.10. Determina la convergencia o divergencia de las integrales:

a) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(2+x)^3}dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{dx}{(1+5x^2)^{2/3}}$ d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$

7.11. Sean $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ y su transformada de Laplace $Lf(s)=\displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx, s>0$.

a) Calcula $Lf(s)$ para $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ y $f(x)=\operatorname{sen} x$.

b) Si f' es la derivada de f, calcula una expresión de $Lf'(s)$, suponiendo que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-sx}=0, \qquad s>0.$$

7.12. Para cierto valor real C, la integral $\displaystyle\int_2^\infty (\frac{Cx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1})dx$ es converge. Determina C y el valor de la integral.

7.13. Halla el área de los recintos limitados por:

1) $x^2+y^2=2$ y $2y=3-2x^2$ 2) $y=xe^{-x}$ e $y=x^2e^{-x}$.

3) $f(x)=x(x-2)$ y $g(x)=x/2, x\in[0,2]$.

4) Entre la curva $y=\frac{1-x}{1+x}$ y su asíntota $x=-1$.

7.14. Calcula el volumen del cuerpo engendrado por la rotación en torno al eje OX de las gráficas de las funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen} x$, $x\in[0,\pi]$ b) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$ c) $f(x)=e^{-x}, x\in[0,a]$.

7.15. Calcula el volumen del sólido de revolución que se produce al girar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}, x\in[0,1]$, respecto del eje de ordenadas (recta $x=0$).

7.16. La columna representada en el dibujo tiene secciones circulares. Si está hecha con un material uniforme de densidad $\rho=10gr/cm^3$ ¿Cuánto pesa la columna?