MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

7. La Integral Impropia. Aplicaciones de la Integral

7.1. a) Demuestra que el área de un círculo de radio r es πr^2. (Recuerda que π es el área del círculo unidad por definición).
b) Calcula la longitud de media circunferencia de radio r.

7.2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva ($f \geq 0$), decreciente e integrable en $[0, \infty)$.
a) Se define la función $g(x) = f([x] + 1)$, donde $[x]$ es la parte entera de x con $x \in [0, \infty)$. Prueba que

$$\int_0^\infty f(x)dx \geq \int_0^\infty g(x)dx.$$

b) Deduce de a) que si $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente.
c) Estudia la convergencia de las series:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n}$.

7.3. Calcula las siguientes integrales impropias, si existen:

1) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x dx$. 2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}dx$. 3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x dx$.

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, con $p > 0$. 5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$, con $p > 0$.

6) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}dx$. 7) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$. 8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$. 9) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

7.4. Determina la convergencia o divergencia de las integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}dx$. b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}dx$. c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x}{(1+5x^2)^{2/3}}dx$.

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. e) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$. f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$.

7.5. Sean $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y su transformada de Laplace $Lf(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx, s > 0$.

a) Calcula $Lf(s)$ para $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$.

b) Si f' es la derivada de f, calcula una expresión de $Lf'(s)$, suponiendo que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-sx} = 0, \qquad s > 0.$$

7.6. Para cada $x > 0$ se define la función **Gamma de Euler** por $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}$.

a) Prueba que la función Gamma está bien definida.

b) Usando la regla de integración por partes, prueba que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

c) Calcula $\Gamma(1)$ y deduce que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para $n \in \mathbb{N}$.

d) Con el cambio de variable $u = t^x$, prueba que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{\frac{1}{x}}}du \qquad \text{y} \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du.$$

7.7. Si conocemos que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula las integrales impropias

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$ (Indicación: $u = \frac{x-\mu}{\tau}$). b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$

7.8. Halla el área de los recintos limitados entre las gráficas:

1) $y = 2 - x^2$ y $y^3 = x^2$ 2) $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

3) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3 - 2x$.

4) Entre la curva $y = \frac{1-x}{1+x}$ y su asíntota $x = -1$.

5) $y = \frac{x^2}{3}$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$. 6) $y = \frac{1}{1+x^2}$ y $y = \frac{x^2}{2}$.

7.9. Halla el volumen que se produce al girar, alrededor del eje $0X$, el arco de catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ para $a \in [-a, a]$.

7.10. Halla el volumen del cuerpo que se produce al girar, alrededor del eje $0Y$, el arco de parábola $y^2 = 4ax$ desde el origen hasta que corta a la recta $x = a$.

7.11. a) Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas:

1) $\int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$. 2) $\int_0^{2\pi} \cos^2 nxdx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nxdx = \pi, \forall n \in \mathbb{N}$.

3)$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = 0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$.

(*Indicación:* considera las siguientes igualdades trigonométricas $\cos A\cos B = 1/2(\cos(A+B)+\cos(A-B))$, $\cos A\operatorname{sen} B = 1/2(\operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B))$ y $\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = 1/2(\cos(A-B)-\cos(A+B))$.)

b) Dada una función f continua en $[0, 2\pi]$, se definen sus **coeficientes de Fourier** por:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Y se llama **serie de Fourier** de f a la expresión: $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)$.

Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$

(*Observación:* se puede probar que toda función f derivable y 2π-periódica se puede escribir igual a su serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx) \qquad).$$