XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Ecuación de Grad-Shafranov asociada a un modelo de confinamiento magnético de un plasma de fusión con simetría helicoidal

J.I. Díaz[1], J.F. Padial[2]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada, Fac. de Matemáticas, Universidad de Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias 3, 28040 Madrid. E-mails:* ji_diaz@mat.ucm.es.
[2] *Dpto. Matemática Aplicada, E.T.S. de Arquitectura, Universidad de Politécnica de Madrid, Avda. Juan de Herrea 4, s/n, 28040 Madrid. E-mails:* jf.padial@upm.es.

Palabras clave: Confinamiento magnético de plasma, Ecuación de Grad-Safranov, simetría helicoidal

Resumen

Las ecuaciones que gobiernan el equilibrio de un plasma (supuesto un fluido ideal a escala macroscópica) confinado mágneticamente en una máquina de fusión tipo Stellarator (configuración axisimétrica), son de un lado las ecuaciones de Maxwell (MHD) y de otro, la ecución de equilibrio para el plasma. De esta forma se obtiene un modelo 3–D. Se propone aquí un modelo en el que se ha considerado que la gemoetría del campo mágnetico presenta una *simetría helicoidal.* En este caso, se muestra que, sin necesidad de utilizar coordenadas Boozer y ni de aplicar métodos de promedios en los que se suponen ciertos órdenes de magnitud, se obtiene un problema 2–D basado en una ecuación similar de tipo *Grad-Shafranov*, pero en la que los coeficientes son *calculables* explícitamente gracias a la simetría helicodal supuesta.

1. Introducción

Uno de los problemas más importantes en fusión termonuclear controlada mediante confinamiento magnético, es la detección de las condiciones bajo las cuales un plasma puede ser confinado magnéticamente sin que dicho plasma toque las paredes del reactor. En el estudio de la modelización, es necesario considerar la *geometría* que el campo magnético genera. Dos posibles comportamientos serían los siguientes: el campo magnético es invariante bajo rotaciones en torno a algún eje de simetría (*simetría axial*, máquinas tipo Tokamak) y el segundo caso, las líneas de campo se envuelven *casi* helicoidalmente en torno a una línea que denominamos eje magnético (*geometría axisimétrica*, máquinas tipo Stellarator). Con la palabra *casi* expresamos que el radio de curvatura de la hipotética hélice no permanece constante, así como que el eje tampoco sería un recta.

Las ecuaciones que gobiernan el equilibrio de un plasma (supuesto un fluido ideal a escala macroscópica) confinado mágneticamente en una máquina de fusión tipo Stellarator (configuración axisimétrica), son de un lado las ecuaciones de Maxwell (MHD) y de otro, la ecución de equilibrio para el plasma. De esta forma se obtiene un modelo 3–D. Sin embargo, mediante la consideración del sistema de coordenadas Boozer $(\rho, \rho\theta, \phi)$ y suponer ciertos órdenes de mágnitud, se obtiene un problema 2–D basado en una ecuación de tipo *Grad–Shafranov* para la función de flujo promediado en la componente ϕ. Deducida por Hender–Carreras en [8] mediante técnicas de promedio y formulando el problema en términos de un problema elíptico no linenal de frontera libre (véase [5], [6] y [7]) se obtiene el siguiente problema elíptico de tipo inverso: hallar $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tales que

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = aF(u) + F(u)F'(u) + bp'(u) & \text{en } \Omega, \\ u = \gamma & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador lineal elíptico, $\gamma \leq 0$ y a y b son funciones regulares determinadas en términos de la métrica asociada a las coordenadas Boozer [1], [2] y un proceso de promedios. La función p representa la presión y no puede ser obtenida directamente de las ecuaciones de la MHD, quedando explicitada como ley constitutiva ($p(t) = \frac{\lambda}{2}\,\text{máx}\{t, 0\}$ con $\lambda > 0$). La función u representa el flujo poloidal promediado y $F(u)$ es la coordenada contravariante toroidal del campo magnético, siendo F (no negativa) otra incógnita del problema. Se sabe que en la región de vacío la coordenada contravariante toroidal del campo magnético es una constante $F_v > 0$ (predeterminada) verificándose entonces que $F(t) = F_v$ $\forall t \leq 0$. A las ecuaciones anteriores, hay que añadir la condición típica en máquinas Stellarator que, en un marco ideal, expresa que la corriente total en el interior de cada superficie magnética es $\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + p'(u)b] = j$ para todo $t \in [ess\,\text{ínf}_\Omega\, u, ess\,\text{sup}_\Omega\, u]$ (la existencia de soluciones para el caso ideal con $j \equiv 0$, se probó en [6] y para corrientes $j = j\left(t, \|u\|_\infty, |\{u > t\}|\right)$ en [5]).

El principal objetivo de esta nota es mostrar cómo la "estructura" del modelo analizado se conserva al utilizar otros sistemas de coordenadas distintos al de Boozer. En particular nos centraremos aquí en el caso en el que hay algún tipo de simetrías, como por ejemplo la helicoidal. Adaptaremos algunos resultados de [9] establecidos para formulaciones con frontera fija para extenderlos al caso de formulación con frontera libre. Esto nos permite obtener una ecuación de tipo Grad–Shafranov como la presentada en [6], pero en la que los coeficientes a y b son calculables explícitamente.

2. Formulación bidimensional con frontera libre bajo hipótesis de simetría helicoidal

Un hecho crucial de nuestro análisis es que la reducción a modelos bidimensionales no vendrá ahora de ningún proceso de promedio sino, simplemente, de la simetría supuesta.

Consideremos un sistema de coordenadas curvilíneas X_1, X_2, X_3. Recordemos que las superficies de coordenadas son las dadas por $X_1 = cte.$ y que las intersecciones, dos a dos, de estas superficies determinan las curvas de coordenadas de la variable asociada a la restante superficie, e.d. la curva de coordenada X_k está definida por ser $X_i = cte.$, $X_j = cte.$ con $i \neq j$, $i \neq k$ y $j \neq k$.

Motivado por nuestro interés en Stellarators, particularizaremos repetidas veces nuestros cálculos al caso de *simetría helicoidal*

$$X_1 = \rho,\ X_2 = \phi - hz,\ X_3 = z, \tag{1}$$

siendo (ρ, ϕ, z) las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\phi & = & \dfrac{y}{x} \\ z & = & z \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos\phi \\ y & = & \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z & = & z \end{array} \right. .$$

La constante h, en (1), da la *periodicidad helicoidal* $\frac{2\pi}{h}$ (e.d. fijados ρ_0 y ϕ_0, los puntos de la forma $X_3 = \pm 2n\pi/h$, con $n \in \mathbb{N}$, se proyectan sobre el mismo punto del plano (z, y)).

Más en general, supondremos que el eje magnético coincide con la curva de coordenada X_3 y que X_2 es una coordenada transversal. Supondremos también que todas las funciones de sentido físico serán “simétricas” en el sentido de que dependen únicamente de X_1 y X_2. La periodicidad vendrá dada, de manera abstracta, mediante una relación

$$X_3 = L(X_1, X_2) \tag{2}$$

dada, con L un operador conocido “a priori”. La coordenada que ignoraremos será X_3. Con el fin de obtener un ecuación de tipo Grad–Shafranov comenzaremos por recordar algunos rudimentos de Geometría Diferencial. Si designamos por $\overrightarrow{r}$ al vector de posición, la *base covariante* $\{\overrightarrow{e}_i\}$ viene dada por

$$\overrightarrow{e}_i = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial X_i}.$$

Como las derivadas se toman cuando solo varían X_i y X_k es claro que $\overrightarrow{e}_i$ es un vector tangente a la curva X_i. La *base contravariante* $\{\overrightarrow{e}^i\}$ viene dada por los vectores normales a las superficies de coordenadas e.d.

$$\overrightarrow{e}^i = \nabla X_i\ .$$

Obviamente $\overrightarrow{e}_i \cdot \overrightarrow{e}^j = 0$ si $i \neq j$. Formando el *tensor métrico covariante* $g_{ij} = \overrightarrow{e}_i \cdot \overrightarrow{e}_j$y llamando $g = \det\ g_{ij}$,el sistema de coordenadas se toma de manera que

$$\overrightarrow{e}_i = \sqrt{g}\,\overrightarrow{e}^j \times \overrightarrow{e}^k$$

para toda permutación cíclica (i, j, k).

Particularización. Si denotamos por $\overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_\phi, \overrightarrow{e}_z$ a los vectores unitarios del sistema cilindrico de coordenadas tendremos que la *base covariante* helicoidal es

$$\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{e}_\rho,\ \ \overrightarrow{e}_2 = \rho\,\overrightarrow{e}_\phi,\ \ \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_z + h\rho\,\overrightarrow{e}_\phi$$

y la contravariante

$$\overrightarrow{e}^1 = \overrightarrow{e}_\rho,\ \ \overrightarrow{e}_2 = \frac{\overrightarrow{e}_\phi}{\rho} - h\,\overrightarrow{e}_z,\ \ \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_z.$$

Recordemos también que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e}_\rho &= (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi, 0) = \overrightarrow{e}^\rho \\
\overrightarrow{e}_\phi &= \rho\,(-\operatorname{sen}\phi, \cos\phi, 0) = \rho^2 \overrightarrow{e}^\phi \\
\overrightarrow{e}_z &= (0,0,1) = \overrightarrow{e}^z,
\end{aligned}$$

con lo que resulta

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e}_1 = (\cos(X_2+hz)\,, \operatorname{sen}\,(X_2+hz)\,, 0) = \overrightarrow{e}^1 \\
&\overrightarrow{e}_2 = (-\rho \operatorname{sen}\,(X_2+hz)\,, \rho\cos(X_2+hz)\,, 0) = \rho^2\overrightarrow{e}^2 + h\rho^2\overrightarrow{e}^3 \\
&\overrightarrow{e}_3 = (-\rho h \operatorname{sen}\,(X_2+hz)\,, \rho h\cos(X_2+hz)\,, 1) = h\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}^3 = \rho^2 h\overrightarrow{e}^2 + \left(1+\rho^2h^2\right)\overrightarrow{e}^3,
\end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e}^2 &= \frac{1}{\rho}\left(-\operatorname{sen}\,(X_2+hz)\,, \cos(X_2+hz)\,, -h\rho\right) \\
\overrightarrow{e}^3 &= (0,0,1)\ \ .
\end{aligned}$$

El Jacobiano resulta $\sqrt{g} = \dfrac{1}{\nabla X_1 \cdot (\nabla X_2 \times \nabla X_3)} = \rho$, y los tensores métricos son

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & \rho^2 h \\ 0 & \rho^2 h & 1+\rho^2h^2 \end{pmatrix}, \qquad \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2}+h^2 & -h \\ 0 & -h & 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Para formular la condición de simetría con más precisión, supongamos que $A(\overrightarrow{r})$ es una función física, $\overrightarrow{r}$ el vector de posición y sea $\overrightarrow{v}$ el vector que indica la dirección de simetría e.d. la variación de $A(\overrightarrow{r})$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$ es nula (en otras palabras: $A(\overrightarrow{r})$ es constante a lo largo de las curvas que tienen a $\overrightarrow{v}$ como vector tangente). Por tanto $\nabla A \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Particularización. Si designamos por $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ una curva en el espacio, su vector tangente $\dot{\overrightarrow{r}}(t)$ admite la siguiente descomposición en las bases covariante y contravariante helicoidales

$$\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{r}}(t) &= \dot\rho\,(t)\,\overrightarrow{e}_1 + \dot X_2\,(t)\,\overrightarrow{e}_2 + \dot z\,(t)\,\overrightarrow{e}_3 \\
&= \dot\rho\,(t)\,\overrightarrow{e}^1 + \rho^2\,(t)\left(\dot X_2\,(t) + h\dot z\,(t)\right)\overrightarrow{e}^2 + \left(\dot z\,(t) + h\rho^2\,(t)\left(\dot X_2\,(t) + h\dot z\,(t)\right)\right)\overrightarrow{e}^3\ .
\end{aligned}$$

Dada una hélice $\overrightarrow{r}(t)$ de ecuaciones paramétricas

$$\rho = a, \qquad X_2 = -\frac{c}{b}, \qquad z = bt + c \qquad\quad (\text{con } b := \frac{1}{h}),$$

el vector tangente tiene de expresión

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t) = \frac{1}{h}\overrightarrow{e}_3 = \rho^2\,(t)\,\overrightarrow{e}^2 + \left(\frac{1}{h} + h\rho^2\,(t)\right)\overrightarrow{e}^3 = \rho^2\,(t)\,\overrightarrow{e}^\phi + b\,\overrightarrow{e}^z = \overrightarrow{e}_\phi + \frac{1}{h}\overrightarrow{e}_z\ .$$

Un vector unitario en esa dirección es

$$\overrightarrow{r}(t) = \frac{\rho^2(t)\, h \overrightarrow{e}^{\phi} + \overrightarrow{e}^{z}}{\sqrt{1+\rho^2(t)\, h^2}} \ .$$

Otro vector de interés, en esa misma dirección, es el dado por

$$\overrightarrow{u}(t) = \frac{\rho(t)\, h \overrightarrow{u}_{\phi} + \overrightarrow{u}_{z}}{1+\rho^2(t)\, h^2},$$

siendo $\overrightarrow{u}_{\phi}$ y $\overrightarrow{u}_{z}$ los vectores unitarios

$$\overrightarrow{u}_{\phi} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{e}_{\phi}, \qquad \overrightarrow{u}_{z} = \overrightarrow{e}_{z} \ ,$$

(la razón de utilizar $\overrightarrow{u}$ estará ligada a que div $u = 0$). La condición de simetría helicoidal se puede expresar ahora como

$$\nabla A \cdot \overrightarrow{u} = \left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\overrightarrow{e}^{\rho} + \frac{\partial A}{\partial \phi}\overrightarrow{e}^{\phi} + \frac{\partial A}{\partial z}\overrightarrow{e}^{z} \right) \cdot \overrightarrow{u} = \frac{1}{1+\rho^2(t)\, h^2}\left(\rho h \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{\partial A}{\partial z} \right) = 0$$

e.d.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = h \frac{\partial A}{\partial \phi} \ .$$

O bien, si $A = A(\rho, X_2, z)$, como $\nabla A = \left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e}^{1} + \left(\frac{\partial A}{\partial X_2}\right)\overrightarrow{e}^{2} + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\overrightarrow{e}^{3}$, se tendrá que

$$\nabla A \cdot \overrightarrow{u} = \frac{1}{h}\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

e.d. $A = A(\rho, X_2)$, como ya habíamos adelantado. ■

Siguiendo a [9] definimos $L\psi(X_1, X_2)$ como el flujo del campo magnético a través de una superficie de coordenada X_2 que se extiende del eje magnético a una curva de coordenada X_3 y limitada por $0 \leq X_3 \leq L$. Sobre el eje magnético se tiene que $X_1 = a$ y que

$$\overrightarrow{B} = B^3 \overrightarrow{e}_3 \ .$$

Por tanto

$$L\psi = \int_a^{X_1} dX_1 \int_0^L \sqrt{g} B^2 dX_3 \ , \tag{3}$$

lo que implica que

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_1} = \frac{1}{L}\int_0^L \sqrt{g} B^2 dX_3 \ .$$

Utilizando la ecuación

$$\text{div } \overrightarrow{B} = 0$$

y suponiendo $B^1 = 0$ en el eje se deduce de (3) que

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_2} = -\frac{1}{L}\int_0^L \sqrt{g} B^1 dX_3 \ .$$

Si $\sqrt{g}B^1$, $\sqrt{g}B^2$ son independientes de X_3 se puede escribir $\overrightarrow{B}$ en función de ψ

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{e}^3}{g_{33}} \times \nabla\psi + B_3\frac{\overrightarrow{e}^3}{g_{33}} \ . \tag{4}$$

Las superficies $\psi = cte.$ representan superficies magnéticas pues

$$\nabla\psi \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

como se deduce de (4). Utilizando la función potencial $\overrightarrow{A}$ de $\overrightarrow{B}$ (con $A_3 = 0$ en el eje magnético)

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$$

se tiene que

$$\psi = -\frac{1}{L}\int_0^L A_3 dX_3 \tag{5}$$

y la hipótesis de simetría implica que

$$\psi\left(X_1, X_2\right) = -A_3\left(X_1, X_2\right) \ .$$

La densidad de corriente $\overrightarrow{J}$ verifica las ecuaciones

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J}, \qquad\qquad \operatorname{div}\overrightarrow{J} = 0 \tag{6}$$

y además, en el eje magnético, $J^1 = 0$. De manera análoga a (5), se puede definir la función

$$F := \mu_0 I := -\frac{1}{L}\int_0^L B_3 dX_3$$

y que en el caso simétrico se reduce a $F := -B_3\left(X_1, X_2\right)$ (en este caso B_3 no es cero en el eje magnético). En consecuencia

$$\overrightarrow{J} = \frac{\overrightarrow{e}^3}{g_{33}} \times \nabla I + J_3\frac{\overrightarrow{e}^3}{g_{33}} \tag{7}$$

que es similar a (4). La ecuación de conservación del momento en el sistema de la MHD

$$\nabla p = \overrightarrow{J} \times \overrightarrow{B} \tag{8}$$

conduce a las relaciones

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} \cdot \nabla\psi &= 0, & \qquad \overrightarrow{B} \cdot \nabla p &= 0 \\ \overrightarrow{J} \cdot \nabla p &= 0, & \qquad \overrightarrow{J} \cdot \nabla I &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que F, I, p y ψ son magnitudes de superficies magnéticas. Utilizando (8), (4) y (7) resulta

$$\nabla p = -\frac{J_3}{g_{33}}\nabla\psi + \frac{B_3}{g_{33}}\nabla I \ .$$

Calculando J_3 por (6), sustituyendo esto y $B_3 = -\mu_0 I$, escribiendo F y p como funciones de ψ y suponiendo que $\nabla\psi \neq 0$ se llega, tras unas fáciles manipulaciones, a que ψ verifica la ecuación

$$-\mathcal{L}\psi = aF(\psi) + F(\psi)\, F'(\psi) + bp'(\psi) \tag{9}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\psi &= \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial\psi}{\partial X_1} + g^{12} \frac{\partial\psi}{\partial X_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{12} \frac{\partial\psi}{\partial X^1} + g^{22} \frac{\partial\psi}{\partial X^2} \right) \right] \right\} \\
&= g_{33} \mathrm{div} \left(\frac{1}{g_{33}} \nabla\psi \right) = \Delta\psi - \nabla\psi \cdot \left(\frac{\nabla g_{33}}{g_{33}} \right), \\
a &= -\frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right) \right], \\
b &= \mu_0 g_{33} \ .
\end{aligned}$$

La ecuación (9) es una ecuación de tipo Grad–Shafranov similar a la obtenida por Hender y Carreras [8]. Nótese que las componentes del campo magnético en función de ψ son

$$\sqrt{g} B^2 = \frac{\partial\psi}{\partial X_1}, \qquad \sqrt{g} B^1 = -\frac{\partial\psi}{\partial X_2} \ .$$

Particularización. Utilizando la expresión del tensor métrico g_{ij} en coordenadas helicoidales (9) se verifica con los siguientes datos (véase [9] y [10] pag. 178)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\psi &= \left(\frac{1 + h^2\rho^2}{\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\rho}{1 + h^2\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} \right), \\
a &= -\frac{1 + h^2\rho^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\rho}{1 + h^2\rho^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\left(2\rho + 2h^2\rho^3\right) - \rho^2 2h^2\rho}{1 + h^2\rho^2} = -\frac{2}{1 + h^2\rho^2}, \\
b &= \mu_0 \left(1 + h^2\rho^2\right) \ . \qquad \blacksquare
\end{aligned} \tag{10}$$

La formulación de tipo frontera libre consiste en extender el sistema de ecuaciones de la MHD al exterior Ω_v de la región ocupada por el plasma Ω_p y bordeada por una superficie magnética del campo en vacío (o bien por una superficie perfectamente conductora). Sea Ω una sección transversal al eje magnético. En coordenadas helicoidales, si el eje magnético corresponde a la hélice $\rho = 1$, $X_2 = -\frac{c}{b}$, $z = bt + c$ (con $b = 1/n$) podemos representar Ω por

$$\Omega = \left\{ (\rho, X_2) \in (a - \delta_0, a + \delta_0) \times \left(-\frac{c}{b} - \mu, -\frac{c}{b} + \mu \right) \right\} \ . \tag{11}$$

La región ocupada por el plasma vendrá dada por

$$\Omega_p = \left\{ (\rho, X_2) \in (a - \delta_0, a + \delta_0) \times \left(-\frac{c}{b} - \mu_0, -\frac{c}{b} + \mu_0 \right) \right\}$$

para algunos $0 < \delta_0 < \delta$, $0 < \mu_0 < \mu$ y la región de vacío será $\Omega_v = \Omega - \Omega_p$.

Podemos normalizar ψ de manera que el borde del plasma (en realidad de una sección de la configuración tridimensional) corresponda a la superficie $\psi = 0$ y así extendemos $p(\psi)$ por cero sobre Ω_v. Si, por ejemplo, tomamos como "ley de estado" $p(\psi) = \frac{\lambda}{2}(\psi_+)^2$, con $\lambda > 0$ y siendo $\psi_+ = \text{máx}(0, \psi)$, la ecuación (9) extendida a todo Ω pasa a ser

$$-\mathcal{L}\psi = aF(\psi) + F(\psi)\, F'(\psi) + \lambda b\psi_+ \qquad \text{en } \Omega \ .$$

Sobre el borde $\partial_c\Omega$ de la región del espacio cartesiano correspondiente a la parametrización (11) se ha de pedir

$$\psi = \gamma \qquad \text{en } \partial_c\Omega,$$

con γ constante negativa conocida. Como en el caso de coordenadas de Boozer (estudiado en [6], [7] y [5]) $\partial_c\Omega$ no debe confundirse con $\partial\Omega$, (del espacio (ρ, X_2)) pues este conjunto puede contener puntos interiores a la región del espacio cartesiano.

Finalmente, la función $F(\psi)$ debe ser determinada por medio de la siguiente condición que expresa la cantidad j de corriente total que circula en el interior de cada superficie magnética $\{(\rho, X_2) \in \Omega : \psi(\rho, X_2) > s\}$ con $s \in [ess\,\mathrm{ínf}_\Omega\, \psi, ess\sup_\Omega \psi]$, e.d.

$$\int_{\{(\rho,X_2)\in\Omega:\psi(\rho,X_2)>s\}} F(\psi)\, F'(\psi) + \lambda b\psi_+ \; d\rho dX_2 = j \qquad \forall s \in [ess\,\mathrm{\acute{i}nf}_{\Omega}\, \psi, ess\sup_{\Omega} \psi] \;.$$

($j \equiv 0$ en el caso ideal o en otro caso $j = j\left(t, \|u\|_\infty, |\{u > t\}|\right)$). Señalamos que la elipticidad del operador $\mathcal{L}$ puede ser mostrada como en [4] y que la mayor diferencia con las hipótesis supuestas en [6]–[7] radica en la negatividad del coeficiente a dado por (10).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos MTM2005-03463 y CCG06-UCM/ESP-1110 de la DGUIC de la CAM y la UCM.

Referencias

[1] Boozer, A.H., Guiding Center Drift Equations. *Phys. Fluids*, Vol **23**, n^o 5, May 1980.

[2] Boozer, A.H., Establishment of Magnetic Coordinates for a given Magnetic Field. *Phys. Fluids*, Vol **25**, n^o 3, March 1982.

[3] Cooper, W.A., Global external ideal magnetohydrodynamic instabilities in three–dimensional plasmas. *Theory of Fusion Plasmas* (Proc. of the Joint Varenna–Laussane, Workshop 1990), Edit. Compositori, Bologna.

[4] Díaz, J.I., *Modelos bidimensionales de equilibrio magnetohidrodinámico para Stellarators.* Informe # 1, CIEMAT (1992).

[5] Díaz, J.I., Padial, J.F. and Rakotoson, J.M., "Mathematical treatment of the magnetic confinement in a current-carrying Stellarator", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **34** (1998), pp. 857–887.

[6] Díaz, J.I. and Rakotoson, J.M., On a two–dimensional stationary free boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator, *C.R. Acad. Sci. Paris,* t. 317, Série I 1993, pp. 353-358.

[7] Díaz, J.I. and Rakotoson, J.M., *On a nonlocal stationary free–boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator geometry*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **134** (1996), 53–95.

[8] Hender, T.C. and Carreras, B.A., Equilibrium calculations for helical axis Stellarators. *Phys, Fluids* 27, pp 2101–2120 (1984).

[9] Kucinski, M. Y. y Caldas, I.L., MHD equilibrium equation in symmetric systems. Publicares del Instituto de Física, Universidades de Sao Paulo, 1990.

[10] Miyamoto, K., *Plasma Physics for Nuclear Fusión.* MIT Press, Cambridge (USA), 1987.