XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Multiplicidad de soluciones estacionarias para un modelo climático con una condición de contorno difusiva no lineal.

J.I Díaz[1], L. Tello[2]

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada, F. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias 3, 28040 Madrid. E-mail:* diaz.racefyn@insde.es.
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada, ETS Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, Av. Juan de Herrera 4, 28040 Madrid. E-mail:* l.tello@upm.es.

Palabras clave: Modelos atmósfera - oéano, condiciones de contorno difusivas, p-Laplaciano, sub y supersoluciones, principio de comparación.

Resumen

En este trabajo se estudian las soluciones estacionarias de un modelo climático bidimensional (latitud - profundidad), del tipo del propuesto por R.G. Watts y R. Morantine en 1990 que corresponde al acoplamiento entre la temperatura superficial promediada y la temperatura interior de un océano profundo.

1. Introducción

En este trabajo estudiamos la multiplicidad o unicidad de estados estacionarios para un modelo climático de tipo de balance de energía que incorpora explícitamente el acoplamiento entre un océano profundo y la superficie atmosférica promediada (en espesor) propuesto inicialmente en Watts y Morantine [20].

El modelo considerado describe la evolución de la temperatura en el interior de un océano "global" de profundidad H así como en su superficie que se supone coincidente con la superficie resultante al promediar en altura la capa atmosférica colindante. Motivados por el trabajo de Stone [19], nuestro modelo incorpora un operador de difusión superficial de tipo p-Laplaciano. Suponiendo temperatura constante sobre cada paralelo, se toman como variables espaciales (x, z), siendo x el seno de la latitud y $-z$ la profundidad. Así, el dominio espacial se denota por $\Omega = (-1, 1) \times (-H, 0)$ y su contorno, $\Gamma_H \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, siendo $\Gamma_H = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : z = -H\}$, $\Gamma_0 = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : z = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : x = 1 \text{ ó } x = -1\}$. U representa la temperatura en el interior del océano y viene dada por la ecuación:

$$U_t - (\frac{K_H}{R^2}(1 - x^2)U_x)_x - K_V U_{zz} + wU_z = 0 \quad (0, T) \times \Omega,$$

donde K_V y K_H son los coeficientes de difusión vertical y horizontal, respectivamente. w es la velocidad vertical y R, el radio de la Tierra. La condición de contorno en $z = 0$ proviene del balance de energía:

$$DU_t - \frac{DK_{H_0}}{R^2}((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|U_x|^{p-2}U_x)_x + \mathcal{G}(U) + K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wxU_x \in QS(x)\beta(U) + f$$

donde $\mathcal{G}(U) - f$ es la energía emitida por enfriamiento de la superficie, D es el espesor de la capa mixta y K_{H_0} la difusividad horizontal en la capa mixta. Las constantes ρ y c representan la densidad y el calor específico del agua, respectivamente.

El efecto feedback del coalbedo (β) aparece en la condición de contorno; β depende de la temperatura. $S(x)$ es la función de insolación y Q la constante solar (un parámetro significativo en este modelo). Resultados sobre las soluciones de evolución se encuentran en [9] y [11].

En este trabajo completamos nuestros resultados previos sobre tal problema mostrando que el modelo es muy sensible frente a pequeñas variaciones del parámetro solar, Q, que aparece involucrado en la condición de contorno difusiva modelizando la amplitud de un término fuente que tiene cuenta del coalbedo. Mostramos que puede aparecer multiplicidad de soluciones estacionarias y analizamos la variación del número de soluciones ante variaciones de Q.

2. Soluciones estacionarias

En este trabajo estudiamos el número de soluciones del siguiente problema:

$$(P_Q)\begin{cases} -\dfrac{K_H}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\dfrac{\partial U}{\partial x}) - K_V\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Omega, \\ wx\dfrac{\partial U}{\partial x} + K_V\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ -\dfrac{DK_{H_0}}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\dfrac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + \mathcal{G}(U) + K_V\dfrac{\partial U}{\partial n} + wx\dfrac{\partial U}{\partial x} & \\ \in \dfrac{1}{\rho c}QS(x)\beta(x,U) + f(x) & \Gamma_0 \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\dfrac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{cases}$$

bajo las siguientes hipótesis estructurales:

(H_S) $S : \Omega \to I\!R$, $S \in L^\infty(-1,1)$, $S_1 \geq S(x) \geq S_0 > 0$, para ciertas constantes $S_1 > S_0$.

($\mathrm{H}_\mathcal{G}$) $\mathcal{G} : I\!R \to I\!R$ es continua, estrictamente creciente tal que $\mathcal{G}(0) = 0$ y $\lim_{|s|\to\infty} |\mathcal{G}(s)| = +\infty$.

(H_f) $f \in L^\infty(\Omega)$ y existe $C_f > 0$ tal que $-\|f\|_\infty \leq f(x) \leq -C_f$ c.p.t. $x \in \Omega$.

(H_β) β es un grafo maximal monótono de $I\!R^2$ tal que existen dos números reales $0 < m < M$ y $\epsilon > 0$ verificando $\beta(r) = \{m\}$ para todo $r \in (-\infty, -10-\epsilon)$ y $\beta(r) = \{M\}$ para todo $r \in (-10+\epsilon, +\infty)$.

(H_{C_f}) $\mathcal{G}(-10-\epsilon) + C_f > 0$ y $\dfrac{\mathcal{G}(-10+\epsilon) + \|f\|_\infty}{\mathcal{G}(-10-\epsilon) + C_f} \leq \dfrac{S_0 M}{S_1 m}$.

(H_w) $w \in C^1(\overline{\Omega})$.

(H_K) $p \geq 2$ y las constantes K_H, K_V, K_H, K_{H_0}, D, R, ρ, c y Q son positivas.

Definimos, en primer lugar, los espacios funcionales:

$$V(\Omega) = \{U \in L^2(\Omega) : (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial x} \in L^2(\Omega), \frac{\partial U}{\partial z} \in L^2(\Omega)\},$$

$$V_p(\Gamma_0) = \{u \in L^2(\Gamma_0) : (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Gamma_0)\}.$$

Definición 1 *Diremos que un par $(U, u) \in (V(\Omega) \times V_p(\Gamma_0)) \cap (L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma_0))$ es una solución débil acotada del problema estacionario si $U_{|\Gamma_0} = u$ y se verifica:*

$$\int_\Omega \frac{K_H}{R^2}(1-x^2)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} dA + \int_\Omega K_v \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} dA + \int_\Omega w \frac{\partial U}{\partial z} \psi dA dt$$

$$- \int_{-1}^1 wx \frac{\partial U}{\partial x}(x, -H)\psi(x, -H) dx - \int_{-1}^1 K_v \frac{\partial U}{\partial z}(x, 0)\psi(x, 0) dx = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{DK_{H_0}}{R^2}(1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\frac{p}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} +$$

$$+ \int_{-1}^1 K_v \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0)\zeta dx + \int_{-1}^1 wx \frac{\partial u}{\partial x}\zeta dx + \int_{-1}^1 \mathcal{G}(u)\zeta dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho c} Q S(x) h \zeta dx$$

para algún $h \in L^\infty(\Gamma_0)$, $h \in \beta(\cdot, u)$ y $\forall (\psi, \zeta)$ funciones test.

El resultado principal de este trabajo se recoge en el siguiente:

Teorema 1 *Bajo las hipótesis $(H_S), (H_{\mathcal{G}}), (H_f), (H_w), (H_K)$ y (H_β) se tiene,*

i) para todo $Q > 0$ existe una solución minimal $(\underline{U}, \underline{u})$ (resp. solución maximal $(\overline{U}, \overline{u})$) del problema (P_Q).

Además, si se tiene (H_{C_f}) entonces existen $Q_1 < Q_2 < Q_3 < Q_4$ tales que

ii) si $0 < Q < Q_1$ entonces (P_Q) tiene solución única,

iii) si $Q_2 < Q < Q_3$ entonces (P_Q) tiene al menos tres soluciones, *iv) si $Q_4 < Q$ entonces (P_Q) tiene solución única, siendo*

$$Q_1 = \frac{(\mathcal{G}(-10-\epsilon)+C_f)\rho c}{S_1 M}, \qquad Q_2 = \frac{(\mathcal{G}(-10+\epsilon)+\|f\|_\infty)\rho c}{S_0 M},$$
$$Q_3 = \frac{(\mathcal{G}(-10-\epsilon)+C_f)\rho c}{S_1 m}, \qquad Q_4 = \frac{(\mathcal{G}(-10+\epsilon)+\|f\|_\infty)\rho c}{S_0 m}.$$

Definición 2 *Se define el operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$, $\mathcal{A}(U,u) := (AU, Bu)$ sobre el dominio,*

$$D(\mathcal{A}) = \{(U,u) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0) : AU \in L^2(\Omega), Bu \in L^2(\Gamma_0), U_{|\Gamma_0} = u\},$$

siendo

$$AU = -\frac{K_H}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\frac{\partial U}{\partial x}) - K_V\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w\frac{\partial U}{\partial z}$$

y

$$Bu = -\frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wx\frac{\partial U}{\partial x} + \mathcal{G}(U).$$

Obsérvese que podemos reescribir el problema como el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu \in \frac{1}{\rho c} QS(x)\beta(u) + f & \Gamma_0 \\ U_{|\Gamma_0} = u & \\ wxU_x + K_V U_z = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}}|U_x|^{p-2}U_x = 0 & \Gamma_1. \end{cases} \tag{1}$$

Los siguientes lemas son fundamentales en la demostración del Teorema 1:

Lema 1 *([9]) $\mathcal{A} + \omega I$ es T-acretivo en $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$, donde $\omega > \frac{1}{2}$.* □

En consecuencia, tenemos un principio de comparación para el sistema:

$$(P_{F,f}) \begin{cases} \omega U + AU = F & \text{en } L^2(\Omega) \\ \omega u + Bu = f & \text{en } L^2(\Gamma_0) \\ U_{|\Gamma_0} = u & \\ wx\frac{\partial U}{\partial x} + K_V\frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1. \end{cases}$$

Si $F_1 \leq F_2$ y $f_1 \leq f_2$ entonces las soluciones de (P_{F_1,f_1}) y (P_{F_2,f_2}) satisfacen $U_1 \leq U_2$, $u_1 \leq u_2$.

Además, tenemos

Lema 2 *([9]) $R(\mathcal{A} + \lambda I) = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$ para $\lambda > \frac{1}{2}$.* □

Demostración del Teorema 1.

(i) La existencia de solución maximal y solución minimal es consecuencia del principio de comparación para el sistema auxiliar:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega U + AU = H, \\ \omega u + Bu = h. \end{array}\right. \tag{2}$$

Además, si $H_1 \leq H_2$ y $h_1 \leq h_2$ entonces $U_1 \leq U_2$ y $u_1 \leq u_2$.

Es fácil ver que existen funciones constantes $(\underline{V}, \underline{v})$ y $(\overline{U}, \overline{u})$ que verifican

$$\left\{\begin{array}{l} \omega \underline{V} + A\underline{V} = \omega \underline{V} \quad \Omega \\ \omega \underline{v} + B\underline{v} = \omega \underline{v} + \frac{1}{\rho c} QS_0 m - \|f\|_\infty \leq \omega \underline{v} + \frac{1}{\rho c} QS(x) \underline{\beta}(\underline{v}) + f, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega \overline{U} + A\overline{U} = \omega \overline{U} \quad \Omega \\ \omega \overline{u} + B\overline{u} = \omega \overline{u} + \frac{1}{\rho c} QS_1 M - C_f \geq \omega \overline{u} + \frac{1}{\rho c} QS(x) \overline{\beta}(\overline{u}) + f. \end{array}\right.$$

Definimos la sucesión $\{(\underline{V}_n, \underline{v}_n)\}$ como

$$(\underline{P}_n) \left\{\begin{array}{ll} \omega \underline{V}_n + A\underline{V}_n = \omega \underline{V}_{n-1} & \\ \omega \underline{v}_n + B\underline{v}_n = \omega \underline{v}_{n-1} + QS(x) \underline{\beta}(\underline{v}_{n-1}) + f & \\ \underline{V}_n|_{\Gamma_0} = \underline{v}_n & \\ wx \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial x} + K_V \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} |\frac{\partial \underline{V}_n}{\partial x}|^{p-2} \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{array}\right.$$

y $(\underline{V}_0, \underline{v}_0) := (\underline{V}, \underline{v})$. Por el principio de comparación aplicado al problema auxiliar (2), las sucesiones $\{\underline{V}_n\}$ y $\{\underline{v}_n\}$ son monótonas. Estimaciones a priori uniformes de $\{(\underline{V}_n, \underline{v}_n)\}$, nos permiten pasar al límite en la formulación débil y obtenemos

$$(\underline{V}_n, \underline{v}_n) \to (V_*, v_*),$$

donde el límite (V_*, v_*) es una solución de (P_Q) y cualquier solución (W, w) verifica $V_* \leq W$ y $v_* \leq w$, es decir, (V_*, v_*) es una solución minimal. Análogamente, obtenemos la solución maximal (U^*, u^*).

(ii) Si $Q < Q_1$ entonces $\underline{V} \leq \overline{U} \leq -10 - \epsilon$. Así, cada solución (U, u) de (P_Q) verifica $u < -10 - \epsilon$ y es solución del problema

$$(P_Q^m) \left\{\begin{array}{ll} AU = 0 & \Omega \\ Bu = \frac{1}{\rho c} QS(x) m + f & \Gamma_0 \\ U_{|\Gamma_0} = u & \\ wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} |\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{array}\right.$$

que tiene solución única. Para probarlo, suponemos que existen dos soluciones, (U_1, u_1) y (U_2, u_2) y tomamos la diferencia $U_1 - U_2$ com función test en la formulación débil. El Lema de Gronwall nos permite concluir la unicidad.

(iii) Si $Q_4 < Q$ entonces $-10 + \epsilon \leq \underline{V} \leq \overline{U}$. Así, cada solución (U, u) verifica $-10 + \epsilon \leq u$ y $\beta(u) = M$.

$$
(P_Q^M) \begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu = \frac{1}{\rho c} QS(x)M + f & \Gamma_0 \\ U_{|\Gamma_0} = u & \\ wx\frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} |\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1. \end{cases}
$$

como en (ii), este problema tiene solución única.

(iv) La demostración de la multiplicidad de soluciones para $0 < Q_2 < Q < Q_3$ está basada en Díaz - Hernández - Tello [8], donde se probó la existencia de al menos tres soluciones para el problema

$$
-\Delta_p u + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f \text{ en } \mathcal{M},
$$

siendo $\mathcal{M}$ el caso general de una variedad Riemanniana bidimensional compacta sin borde.

Hemos dividido la demostración en tres etapas.

Etapa 1. *Construcción de sub y supersoluciones.* Si $Q_2 < Q < Q_3$ entonces,

$$
\begin{array}{lcll}
\overline{U}_1 & := & \mathcal{G}^{-1}(\frac{1}{\rho c} QS_1 M - C_f) & \text{es una supersolución de } (P_Q^M) \\
\underline{V}_1 & := & \mathcal{G}^{-1}(\frac{1}{\rho c} QS_0 M - \|f\|_\infty) & \text{es una subsolución de } (P_Q^M) \\
\overline{U}_2 & := & \mathcal{G}^{-1}(\frac{1}{\rho c} QS_1 m - C_f) & \text{es una supersolución de } (P_Q^m) \\
\underline{V}_2 & := & \mathcal{G}^{-1}(\frac{1}{\rho c} QS_0 m - \|f\|_\infty) & \text{es una subsolución de } (P_Q^m).
\end{array}
$$

Además, $\underline{V}_2 < \overline{U}_2 < -10 - \epsilon < -10 + \epsilon < \underline{V}_1 < \overline{U}_1$. Entonces, existen dos soluciones (U_1, u_1) y (U_2, u_2) de (P_Q) tales que u_1 y u_2 no cruzan el nivel -10. Para encontrar la tercera solución usamos un resultado de Amann [1]. Este resultado se aplica al caso en el que β es una función Lipschitz. En la siguiente etapa, aproximaremos el grafo β por funciones Lipschitz.

Etapa 2. *El problema aproximado.*

Definimos una nueva familia de problemas

$$
(P_{Q,\lambda}) \begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu = QS(x)\beta_\lambda(u) + f(x) & \Gamma_0 \\ B.C. & \Gamma_H \cup \Gamma_1 \end{cases}
$$

donde β_λ es una función Lipschitz $\beta_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - (I - \lambda\beta)^{-1})$, $\lambda > 0$ (la aproximación Yosida de β). Como β verifica (H_β),tenemos que

β_λ es acotada y no decreciente $\forall \lambda > 0$,

$\beta_\lambda(s) = \beta(s)$ para todo $s \notin [-10 - \epsilon, -10 + \epsilon + \lambda M]$, $\forall \lambda > 0$,

$\beta_\lambda(s) \to \beta(s)$ en el sentido de los grafos maximales monótonos cuando $\lambda \to 0$

(véase Brezis [4]). En el caso en el que β es una función Lipschitz, tomamos $\beta_\lambda = \beta$.

Ahora, aplicando el argumento utilizado en la etapa 1 al problema $(P_{Q,\lambda})$, tenemos que existe λ_0 tal que $\underline{V}_2 < \overline{U}_2 < -10 - \epsilon < -10 + \epsilon + \lambda_0 M < \underline{V}_1 < \overline{U}_1$. Obtenemos dos familias de soluciones de $\{(P_{Q,\lambda})\}$ tales que u_1^λ y u_2^λ no cruzan el nivel -10. la tercera familia de soluciones se obtiene como consecuencia del siguiente resultado.

Lema 3 *(Amann [1]) Sea X un retracto de u espacio de Banach E y sea $F : X \to X$ una aplicación compacta. Supongamos que X_1 y X_2 son retractos disjuntos de X, y sean Y_k, $k = 1, 2$ abiertos de X tales que $Y_k \subset X_k$. Supongamos además que $F(X_k) \subset X_k$ y que F no tiene puntos fijos en $X_k - Y_k$, $k = 1, 2$. Entonces F tiene al menos tres puntos fijos distintos x, x_1, x_2 con $x_k \in X_k$ y $x \in X - (X_1 \cup X_2)$.*

Toda solución u del problema (P_Q^λ) es un punto fijo de $F : L^\infty(\Gamma_0) \to L^\infty(\Gamma_0)$ definida por

$$F(u) = P_2(\mathcal{A}^{-1}(0, \frac{1}{\rho c} QS(\cdot)\beta_\lambda(u) + f_\infty(\cdot))).$$

$\mathcal{A}$ es el operador definido en 2 y P_2 la proyección sobre la segunda componente.

Sea $E = L^\infty(\Gamma_0)$, espacio de Banach ordenado con respecto al orden natural dado por el cono positivo,

$$L_+^\infty(\Gamma_0) \ = \ \{v \in L^\infty(\Gamma_0) \ : \ v(x) \geq 0 \text{ a.e. } x \in \Gamma_0\},$$

y que tiene interior no vacío. Sean $X = [\underline{V}_2 - \delta \ , \ \overline{U}_1 + \delta]$, $X_1 = [\underline{V}_1 - \delta \ , \ \overline{U}_1 + \delta]$ and $X_2 = [\underline{V}_2 - \delta \ , \ \overline{U}_2 + \delta]$ where $\delta > \lambda_0 M$ is taken such that $\underline{V}_1 \ > \ -10 + \epsilon + \delta$, $\overline{U}_2 \ > \ -10 - \epsilon - \delta$. Así, existe un abierto Y_k de $L^\infty(\Gamma_0)$ conteniendo u_k^λ para $k = 1, 2$ tal que $Y_k \subset X_k$.

Los conjuntos X, X_1 y X_2 son retractos de $L^\infty(\Gamma_0)$ (resp. X), por ser subconjuntos no vacios cerrados y convexos de $L^\infty(\Gamma_0)$ (resp. X). Moreover, $F(X) \subset X$ y $F(X_k) \subset X_k$. Finalmente, por las propiedades de β_λ y la inclusión compacta $V_p(\Gamma_0) \subset L^\infty(\Gamma_0)$ para $p \geq 2$, se llega a que $F : X \to X$ es una aplicación compacta.

Así, por el Lema 3 concluimos que F tiene al menos tres puntos fijos, o equivalentemente, $(P_{Q,\lambda})$ tiene al menos tres soluciones: $u_1^\lambda \in X_1$, $u_2^\lambda \in X_2$ y $u_3^\lambda \in X - (X_1 \cup X_2)$.

Etapa 3. La demostración termina probando la convergencia de una subsucesión de $\{u_3^\lambda\}$ a u_3 tal que (U_3, u_3) es solución de (P_Q). Para obtener este límite utilizamos un resultado relativo a grafos maximales monótonos ([5]) que garantiza que el límite de $\beta_\lambda(u_3^\lambda)$ está en el grafo $\beta(u_3)$. Finalmente, la convergencia en $L^\infty(\Gamma_0)$ nos permite mostrar que u_3 es distinta de u_1 y u_2. En particular, u_3 atraviesa el nivel -10.

Observación 1 *En el trabajo [10] se prueba que en ciertos modelos atmosféricos de una capa existe un rango de Q para el que existen infinitos estados estacionarios. En dicho problema aparece también el operador p-Laplaciano y un grafo β de tipo Heaviside. Este resultado nos sugiere que el problema estudiado podría poseer más de tres soluciones para ciertos valores de la constante solar Q.*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos MTM2005-03463 y CCG06-UCM/ESP-1110 de la DGUIC de la CAM y la UCM.

Referencias

[1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review, 18, No. 4 (1976) 620-709.

[2] D. Arcoya, J.I. Díaz, L. Tello, *S-shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in Climatology*, Journal of Differential Equations, 150 (1998) 215-225.

[3] W.H. Berger, S. Burker, E. Vincent, *Glacial-Holocene transition: Climate Pulsations and Sporadic Shutdown of NADW production*, in "Abrupt Climatic Change - Evidence and Implications", (eds. W.H. Berger, L.D. Labeyrie), Reidel Publishing Co. Dordrecht Holland (1987).

[4] H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam (1973).

[5] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, in "Contributions to Nonlinear Functional Analysis", (Zarantonello, E. Ed.), Acaddemic Press New York (1971) 101-156.

[6] M.I. Budyko, *The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth*, Tellus 21 (1969) 611-619.

[7] J.I. Díaz, *Mathematical analysis of some diffusive energy balance climate models*, in the book "Mathematics, Climate and Environment", (J.I. Díaz and J.L. Lions, eds.) Masson, Paris, (1993) 28-56.

[8] J.I. Díaz, J. Hernández, L. Tello, *On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in Climatology*, J. Math. An. Appl. 216 (1997) 593-613.

[9] J.I. Díaz, L. Tello, *Sobre un modelo climatico de balance de energia superficial acoplado con un oceano profundo*, Actas del XVII CEDYA/ VI CMA, (2001).

[10] J.I. Díaz, L. Tello, *Infinitely many stationary solutions for a simple climate model via a shooting method*, Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002) 327-334.

[11] J.I. Díaz, L.Tello, *On a parabolic problem with diffusion on the boundary arising in Climatology*, Internacional Conference on Differential Equations. Ed. World Scientific, New Jersey (2005) 1056-1058.

[12] P.G. Drazin, D.H. Griffel, *On the branching structure of diffusive climatological models*, J. Atmos. Sci. 34 (1977) 1969-1706.

[13] M. Ghil, S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Springer Verlag. Applied Mathematical Sciences. 1987.

[14] G. Hetzer, *The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models*, Houston Journal of Math. 16 (1990) 203-216.

[15] G. Hetzer, *The number of stationary solutions for a one-dimensional Budyko-type climate model*, Nonlinear Analysis 2 (2001) 259-272.

[16] A. Kufner *Weighted Sobolev Spaces*, J. Wiley & sons, (1985).

[17] G.R. North, *Multiple solutions in energy balance climate models*, Paleogeography, Paleoclimatology, Paleoecology 82, Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, 225-235 (1990).

[18] W.D. Sellers, *A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system*, J. Appl. Meteorol. 8 (1969) 392-400.

[19] P.H. Stone, *A simplified radiative-dynamical model for the static stability of rotating atmospheres*, J. Atmos. Sci. (3) 29 (1972) 405–418.

[20] R.G. Watts, M. Morantine, *Rapid climatic change and the deep ocean*, Climatic Change 16 (1990), 83–97.