Ejercicios de Álgebra Lineal

61. Demostrar que $((2,1,1)^t, (-2,1,3)^t, (1,3,1)^t)$ es una base de $\mathbb{Q}^3$ y dar las coordenadas de $(1,1,1)^t$ en dicha base. Hallar la matriz del cambio de base respecto a la canónica.

62. Demostrar que $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$ (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la indeterminada x con coeficientes reales). Probar que $((1+x)^3, x(1+x)^2, x^2(1+x), x^3)$ es otra base de $\mathbb{R}_3[x]$ y hallar respecto a esta segunda base las coordenadas de los elementos de la primera. Hallar la matriz del cambio de base.

63. Dados los conjuntos de vectores $\mathcal{B} = ((3,2,5)^t, (2,1,3)^t, (1,0,2)^t)$ y $\mathcal{B}' = ((-2,1,3)^t, (-2,1,2)^t, (1,-1,3)^t)$:

    a) Demostrar que son bases de $\mathbb{Q}^3$ y hallar las matrices del cambio de base en los dos sentidos.

    b) Hallar las coordenadas de $v = (2,-1,-4)^t_{\mathcal{B}}$ en la base $\mathcal{B}'$.

    c) Hallar las coordenadas de $w = (0,1,5)^t_{\mathcal{B}'}$ en la base $\mathcal{B}$.

    d) Escribir las coordenadas de v y w en la base canónica.

64. Sean U, W subespacios de $\mathbb{Q}^3$ definidos por $U = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{Q}^3 \mid x = y = z\}$ y $W = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{Q}^3 \mid x = 0\}$.

    a) Hallar una base de U y otra de W. b) Comprobar que $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$.

65. Probar que $H = \{(x,y,z,t)^t \in \mathbb{K}^4 \mid x + y = z - y = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$. Encontrar una base de H y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de $\mathbb{K}^4$.

66. a) Demostrar que si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base del espacio vectorial V, entonces $V = L(v_1) \oplus \cdots \oplus L(v_n)$.

    b) Si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ es una base de V, con $1 \leq r \leq n$, entonces $V = V_1 \oplus V_2$, donde $V_1 = L(v_1, \ldots v_r)$ y $V_2 = L(v_{r+1}, \ldots v_n)$.

67. Sean $H \subset \mathbb{Q}^4$ de ecuaciones $x - y = z + t = 0$ y $L \subset \mathbb{Q}^4$ generado por $(1,-1,0,0)^t$, $(1,0,-1,0)^t$ y $(1,0,0,-1)^t$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de H, L, $H \cap L$ y $H + L$.

68. Hallar la dimensión y una base del subespacio $W \subset \mathbb{Q}^5$ cuyas ecuaciones implícitas son:
$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z - s + 3t & = & 0 \\ x + 2y + 3z + s + t & = & 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t & = & 0 \end{array}\right\}$$

69. Sean los subespacios $U = L((1,3,-2,2,3)^t, (1,4,-3,4,2)^t, (2,3,-1,-2,9)^t)$ y $W = L((1,3,0,2,1)^t, (1,5,-6,6,3)^t, (2,5,3,2,1)^t)$ de $\mathbb{Q}^5$. Hallar una base y la dimensión de $U \cap W$.

70. Dados los subespacios de $\mathbb{Q}^4$, $U = L((1,2,1,3)^t, (0,1,2,1)^t, (6,11,4,17)^t)$ y $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de $U + W$ y de $U \cap W$. ¿Es $U + W$ una suma directa?

71. Sean $n > 2$ un entero y U y W dos subespacios de dimensión $n-1$, distintos entre sí, de un espacio vectorial V de dimensión n.

    a) Probar que todo vector de V es suma de uno de U y otro de W.

    b) Calcular la dimensión de $U \cap W$.

72. Sean a y b números racionales y consideremos los subespacios U y W de $\mathbb{Q}^4$ cuyas ecuaciones implícitas son

$$U : \left\{ \begin{array}{rcl} bx_1 - bx_2 + x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \text{ y } W : \left\{ \begin{array}{rcl} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 & = & 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

    a) Calcular la dimensión de U y W. ¿Existen valores de a y b para los que $U = W$?

    b) ¿Cómo han de ser a y b para que $U + W \neq \mathbb{Q}^4$?

73. Dado el subespacio vectorial $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)^t \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{Q}^4$, hallar una base de W. Determinar si $(1,-2,0,1)^t \in W$ y, en ese caso, hallar sus coordenadas respecto a dicha base de W.

74. Sea $H \subset \mathbb{Q}^4$ el subespacio definido como $H = \{x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0\}$. Hallar unas ecuaciones implícitas de un subespacio $L \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = L \oplus H$. Idem $L' \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = L' \oplus H$ y $L \neq L'$.

75. Sean $H = \{(x,y,z,t)^t \in \mathbb{Q}^4 \mid x - y = z + t = 0\}$ y $M = L((2,1,1,1)^t, (0,1,-1,-1)^t, (1,0,1,1)^t)$ subespacios de $\mathbb{Q}^4$.

    a) Hallar una base de H y unas ecuaciones implícitas de M.

    b) Hallar $H \cap M$ y $H + M$. ¿Es $H + M$ suma directa?

    c) Si $U = L((0,2,1,0)^t, (0,0,0,1)^t)$ hallar $H + U$ y $M + U$. ¿Se trata de sumas directas?

76. Sean $V = \mathbb{Q}^5$ y $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^t \in \mathbb{Q}^5 \mid x_4 = x_5 = 0\}$. ¿Cuáles son los elementos de V/W? Hallar una base y la dimensión de V/W.

77. $W = L((1,2,3,4)^t, (2,2,1,1)^t, (0,1,2,3)^t)$ y $W' = L((1,0,-1,2)^t, (2,3,0,1)^t)$ son subespacios de $V = \mathbb{Q}^4$. Hallar una base y la dimensión de V/W y de V/W'. Describir las clases de equivalencia en ambos casos.

78. ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ tal que

$$f(1,0)^t = (1,1)^t,\ f(3,2)^t = (1,-1)^t \text{ y } f(3,3)^t = (2,2)^t?$$

79.
- Dado el endomorfismo f de $\mathbb{Q}^3$ definido por $x'_1 = x_1+x_2+x_3$, $x'_2 = x_1-x_2+x_3$, $x'_3 = x_1+x_3$, hallar la matriz de f y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen. Sea W' el subespacio de ecuaciones $x'_1 + x'_2 = 0$, $x'_1 + 3x'_2 = 0$. Hallar la imagen inversa de W' por f.
- Dado el endomorfismo f de $\mathbb{Q}^3$ definido por $x'_1 = x_1+2x_2+3x_3$, $x'_2 = 2x_1+x_2+x_3$, $x'_3 = -x_1+x_2+2x_3$, hallar la matriz de f y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen. Sea W el subespacio generado por e_1 y e_2. Hallar la imagen directa de W por f.

80. Sean V espacio vectorial de dimensión finita n, $\mathcal{B}$ base de V, $f : V \to V$ isomorfismo y $A \in M_n(\mathbb{K})$ matriz de f respecto de $\mathcal{B}$. Demostrar que A es regular y que A^{-1} es la matriz de f^{-1} respecto de $\mathcal{B}$.