Ejercicios de Curvas Algebraicas

22. Demostrar que el conjunto de los puntos

$$(t^4+2t^3+t^2-1,\ t^4+2t^3+2t^2+t),$$

con t recorriendo $\mathbb{C}$, es una cónica en $\mathbb{C}^2$. ¿Es una parametrización propia? En caso negativo, obtener una parametrización propia.

23. Demostrar que la curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{K}^2$ de ecuación

$$Y^2 - X^2(X^2-1) = 0$$

admite una parametrización racional, considerando sus intersecciones con la familia de parábolas $\mathcal{D}_\lambda$ de ecuación

$$Y - \lambda X(X-1) = 0,$$

con $\lambda \in \mathbb{K}$. Razonar por separado con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

24. Demostrar que el conjunto de los puntos de la forma (t^2, t^3+1), con t recorriendo $\mathbb{C}$, es una curva algebraica afín compleja.

25. En $\mathbb{R}^2$, demostrar que las siguientes curvas parametrizadas son algebraicas:

a. $x(t) = \operatorname{sen}(2t)$, $y(t) = 2\operatorname{sen}^2(t)$,
b. $x(t) = t^2+t^3$, $y(t) = t^3+t^4$.

26. Sean los polinomios

$$f = XZ - Y^2, \qquad g = YZ - X^3 \in \mathbb{C}[X,Y,Z].$$

Sea $\mathcal{C}$ la imagen de la aplicación $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ dada por

$$\phi(t) = (t^3, t^4, t^5).$$

a. Demostrar que $\mathtt{V}(f,g) \subseteq \mathbb{C}^3$ es la unión de $\mathcal{C}$ y una recta. *[Indicación: considerar el polinomio $Zf + Yg$.]*
b. Demostrar que $\mathcal{C}$ es un conjunto algebraico irreducible.
c. Demostrar que

$$\mathcal{C} = \mathtt{V}(X^5 - Z^3, X^4 - Y^3, Y^5 - Z^4).$$

d. Demostrar que $\mathcal{C} = \mathtt{V}(f,l)$, donde

$$l = X^5 - 2X^2YZ + Z^3 \in \mathbb{C}[X,Y,Z].$$

[Indicación: comprobar que $(X^4-Y^3)^2 = 0$ es consecuencia de $f=0$ y $l=0$.]

e. Demostrar que $\mathcal{C}$ posee un único punto en el infinito.

Sea $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ la clausura proyectiva de $\mathcal{C}$, i.e.,

$$\overline{\mathcal{C}} = \left\{(x:y:z:w) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : F(x,y,z,w) = 0, L(x,y,z,w) = 0\right\},$$

donde F, $L \in \mathbb{C}[X,Y,Z,W]$ son los homogeneizados de f, l. Se dice que la curva $\overline{\mathcal{C}}$ es *intersección completa (conjuntista)*, por estar determinada por dos ecuaciones en el espacio tridimensional. Es un *problema abierto* determinar si toda curva algebraica en $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ es intersección completa (conjuntista).

27. Dados los polinomios

$$f = XZ - Y^2, \qquad q = X^4 - YZ, \qquad p = Z^2 - X^3Y \in \mathbb{C}[X,Y,Z],$$

estudiar la curva $\mathcal{C} = \mathtt{V}(f,q,p) \subseteq \mathbb{C}^3$. Hallar las curvas irreducibles contenidas en $\mathtt{V}(f,q)$, $\mathtt{V}(f,p)$ y $\mathtt{V}(q,p)$ distintas de $\mathcal{C}$.

28. Se considera la aplicación $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ dada por

$$\phi(t) = (t^3, t^5, t^7).$$

Demostrar que la imagen de ϕ es una curva algebraica irreducible.

29. Demostrar que los siguientes conjuntos no son algebraicos:

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 = 0, x > 0\}$.
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2(x-1) = 0, x > 0\}$.
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x(x-1)(x+1) = 0, x \leq 0\}$.

30. Demostrar que los siguientes conjuntos no son algebraicos:

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.