Ejercicios de Curvas Algebraicas

37. Sea $\mathcal{C}$ una cúbica proyectiva compleja irreducible definida por una forma F simétrica. Probar que el punto P de coordenadas $(1:1:1)$ pertenece a $\mathcal{C}$ si y solo si $\operatorname{Sing}\mathcal{C} = \{P\}$ y que, en tal caso, P es un nodo y la ecuación de la unión de sus rectas tangentes es también simétrica. Hallar cada una de dichas rectas.

38. Demostrar que las clausuras proyectivas de las cuárticas afines complejas

$$\mathcal{C} = \mathtt{V}(X^4 - X^2Y + Y^3),$$
$$\mathcal{D} = \mathtt{V}(X^4 + Y^4 - 4XY^2)$$

no son proyectivamente equivalentes. *[Indicación: estudiar los conos tangentes en los puntos singulares de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.]*

39. *Asíntotas paralelas a los ejes.* Sea $\mathcal{C}$ una curva afín de grado positivo d, que no contenga rectas. Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polinomio minimal para $\mathcal{C}$.

a. Demostrar que si $\mathcal{C}$ tiene asíntotas paralelas al eje Y (resp. X) entonces X (resp. Y) divide a la parte homogénea de grado d de f.
b. En tal caso, demostrar que la recta de ecuación $X = \alpha$ (resp. $Y = \beta$) es asíntota de $\mathcal{C}$ si y solo si α (resp. β) es raíz de $a(X)$ (resp. $b(Y)$), donde
$$f = Y^n a(X) + g,$$
$$= X^m b(Y) + h,$$
con $g, h \in \mathbb{C}[X,Y]$, $\deg_Y(g) < n \leq d$, $\deg_X(h) < m \leq d$.

Los siguientes ejercicios son aplicaciones inmediatas del teorema de Bézout junto con la *desigualdad fundamental*. Basta resolver el caso complejo proyectivo, del que se deduce el caso afín.

40. ¿Cuántos puntos singulares tiene una curva algebraica compleja, afín o proyectiva, irreducible, de grado $d \geq 3$ que posea un punto de multiplicidad $d-1$?

41. Sea $\mathcal{C}$ una curva algebraica compleja, afín o proyectiva. Demostrar que $\mathcal{C}$ es reducible en los casos siguientes:

a. si $\mathcal{C}$ es una cúbica con al menos dos puntos singulares,
b. si $\mathcal{C}$ es una cuártica con al menos cuatro puntos singulares.

42. Sea $\mathcal{C}$ una curva compleja, afín o proyectiva, de grado positivo d, que posea e puntos singulares sobre una recta L. Si $e > \frac{d}{2}$, demostrar que L es una componente de $\mathcal{C}$.

43. Demostrar que una curva algebraica plana irreducible (afín o proyectiva) de grado $d \geq 1$ no puede poseer dos puntos singulares P y Q distintos, de multiplicidades respectivas m y n, con $m, n \geq \frac{d+1}{2}$. ¿Es esencial la hipótesis de irreducibilidad de $\mathcal{C}$? Justificar la respuesta.

44. Sea $\mathcal{C}$ una curva algebraica afín plana de grado $d \geq 2$ y sea L una asíntota de $\mathcal{C}$. Demostrar que $\mathcal{C}$ y L se cortan en, a lo sumo, $d-2$ puntos distintos.