Ejercicios de Curvas Algebraicas

56. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ el *folium de Descartes* de ecuación

$$X^3 + Y^3 - 3XYZ = 0.$$

Hallar las curvas polares de $\mathcal{C}$ respecto de los puntos $R = (1 : -1 : 0)$, $Q_+ = (1 : 1 : 2)$, $Q_- = (1 : 1 : -2)$, P_3.

57. Hallar los pies de las tangentes a la curva de ecuación

a. $Y^2Z - X^3 = 0$ trazadas desde el punto $Q = (1 : 1 : 0)$,
b. $Y^2Z - X^3 + 3XZ^2 = 0$ trazadas desde el punto P_3.

58. ¿Cuántas tangentes a la cúbica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^2$ de ecuación

$$X^2 - Y^2 + X^3 = 0$$

pasan por el punto $P = (1, 0)$? ¿Y por $Q = (1, 1)$?

59. Determinar las inflexiones de las *curvas de Fermat*.

60. Se considera la cuártica $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación

$$(X^2 + Y^2)^2 - X^3Z = 0.$$

Demostrar que la polar $\mathcal{P}_Q\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ respecto del punto $Q = (0 : 1 : 8)$ es la unión de tres rectas y hallar la multiplicidad de intersección de $\mathcal{P}_Q\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ en cada uno de los puntos de intersección de ambas.

61. Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una curva algebraica proyectiva lisa y $d \geq 3$ entonces la curva dual de $\mathcal{C}$ no es lisa.

62. Comprobar que la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $X^3Z^2 - Y^5 = 0$ es *autodual*, i.e., que existe una transformación proyectiva de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que lleva $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}^*$.

63. Calcular las multitangentes del *trébol de tres hojas*, dado por el polinomio

$$f = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3.$$

64. ¿Existen curvas algebraicas proyectivas complejas irreducibles de Plücker, de grados $d = 3, 4, 5, 6$ sin inflexiones? Razonar la respuesta.

65. Se considera la estructura de grupo definida en una cúbica lisa $\mathcal{C}$, tomando como punto base O una inflexión de $\mathcal{C}$. Dados puntos $P, S \in \mathcal{C}$, demostrar las siguientes propiedades:

a. $2P = O$ si y solo si P pertenece a la curva polar $\mathcal{P}_O\mathcal{C}$,
b. el conjunto $\{P \in \mathcal{C} : 2P = O\}$ es un subgrupo de $\mathcal{C}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
c. existen exactamente cuatro puntos $Q \in \mathcal{C}$ que satisfacen $2Q = S$. Describir dichos puntos geométricamente.

66. Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una cúbica lisa y $O \in \mathcal{C}$ un punto arbitrario. Consideremos en $\mathcal{C}$ la suma con O como punto base. Probar que

a. si O es inflexión entonces $2\overline{P} = \overline{2P}$,
b. en general, $2\overline{P} \neq \overline{2P}$, cuando O no es inflexión.

67. Se consideran la cúbica $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación

$$X^3 + Z^3 - Y^2 Z = 0$$

y el punto Q de coordenadas $(2:3:1)$. Comprobar que $\mathcal{C}$ es lisa y que Q pertenece a $\mathcal{C}$. Demostrar que el punto $P_2 = (0:1:0)$ es de inflexión de $\mathcal{C}$ y que $6Q = 0$ en la estructura aditiva sobre $\mathcal{C}$ con P_2 como punto base.

68. Se considera la cúbica $\mathcal{C}$ proyectiva compleja de ecuación

$$Y^2 Z - X^3 - 4XZ^2 = 0.$$

a. Probar que $\mathcal{C}$ es lisa.
b. Probar que $O = (0:1:0)$ es un punto de inflexión de $\mathcal{C}$ y hallar la tangente a $\mathcal{C}$ en O.
c. Hacer una representación gráfica la curva real $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ y de su parte afín obtenida al deshomogeneizar respecto de Z.
d. Consideremos en $\mathcal{C}$ la estructura de grupo tomando como base el punto O. Demostrar que si A y B son dos puntos de $\mathcal{C} \setminus \{O\}$ y L_{AB} es la recta que los une, la suma $A + B$ es el punto simétrico respecto del eje $Y = 0$ del tercer punto de corte de L_{AB} con $\mathcal{C}$.
e. Probar que $A = (2:4:1)$ es un punto de orden 4 y calcular el subgrupo generado por él (i.e., hallar los puntos $2A$ y $3A$).
f. Hallar la polar a $\mathcal{C}$ respecto del punto $P = (0:0:1)$ y las tangentes a $\mathcal{C}$ desde P. ¿Cuáles son reales?
g. Hallar la multiplicidad de intersección en P de $\mathcal{C}$ con la cúbica $\mathcal{D}$ de ecuación

$$Y^2 Z - X^3 + 4XZ^2 = 0.$$

69. Demostrar que P es un punto de inflexión de la cúbica lisa $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de Riemann–Legendre, en los siguientes casos:

a. $\mathcal{C}$ de ecuación $Y^3 = X^3 + 3X$ y $P = (0,0)$,
b. $\mathcal{C}$ de ecuación $Y^3 = 3X^3 + 4X^2 + X$ y $P = (0,0)$,
c. $\mathcal{C}$ de ecuación $Y^2 = X^2 Y + 4$ y $P = P_1$.

Representar gráficamente las cúbicas anteriores.

70. Se considera la cúbica $\mathcal{C}$ de ecuación $F = 0$, donde

$$F = Y^2(X + Y - Z) - 2X^3.$$

a. Hallar la ecuación canónica de $\mathcal{C}$.
b. Hallar los puntos de inflexión de $\mathcal{C}$.
c. Hallar las posibles asíntotas y ramas parabólicas de la curva afín $\mathcal{C} \cap \mathbb{C}^2_{XY}$.

71. Sean $\mathcal{C}$ una cúbica proyectiva lisa, $O \in \mathcal{C}$ un punto de inflexión y consideremos en $\mathcal{C}$ la adición con O como punto base. Sean $R_1, \ldots, R_6 \in \mathcal{C}$ puntos distintos. Demostrar que $R_1 + \cdots + R_6 = O$ si y solo si existe una cónica $\mathcal{D}$, que contiene a $R_1, \ldots, R_6$.

72. Sean $\mathcal{C}$ una cúbica proyectiva lisa, $O \in \mathcal{C}$ un punto de inflexión y consideremos en $\mathcal{C}$ la adición con O como punto base. Sean $m \in \mathbb{N}$ y puntos distintos $R_1, \dots, R_{3m}$ de $\mathcal{C}$. Demostrar que
$$R_1 + \cdots + R_{3m} = O$$
si y solo si existe una curva $\mathcal{D}$ de grado m, que no contiene a $\mathcal{C}$, tal que
$$R_1, \dots, R_{3m} \in \mathcal{D}.$$

73. Sean $\mathcal{C}$ una cúbica proyectiva lisa, $m \in \mathbb{N}$, y sendas curvas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ de grado m que no contienen a $\mathcal{C}$. Supongamos que existen puntos distintos $R_1, \dots, R_{3m}, R_{3m+1}$ tales que
$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{R_1, \dots, R_{3m}\},$$
$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}' = \{R_1, \dots, R_{3m-1}, R_{3m+1}\}.$$
Demostrar que $R_{3m} = R_{3m+1}$.

74. Se consideran la cúbica $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación
$$X^3 + Z^3 - Y^2 Z = 0$$
y el punto Q de coordenadas $(2 : 3 : 1)$. Comprobar que $\mathcal{C}$ es lisa y que Q pertenece a $\mathcal{C}$. Demostrar que el punto $P_2 = (0 : 1 : 0)$ es de inflexión de $\mathcal{C}$ y que $6Q = P_2$, en la estructura aditiva sobre $\mathcal{C}$ con P_2 como punto base.

75. Se consideran la *cúbica de Fermat* $\mathcal{C}$, de ecuación
$$X^3 + Y^3 + Z^3 = 0,$$
y los siguientes puntos de la misma
$$O = (0 : -1 : 1),\ A = (1 : 1 : -\sqrt[3]{2}\omega),\ B = (1 : 1 : -\sqrt[3]{2}\omega^2),$$
$$C = (1 : 1 : -\sqrt[3]{2}),\ D = (1 : -1 : 0),$$
donde $\omega = e^{2\pi i/3}$. Comprobar que $A + B = C + D$ y calcular el punto $-(A + B)$, donde la adición en $\mathcal{C}$ se efectúa con O como punto base.

76. Describir la curva dual de cada tipo de cúbica irreducible (lisa, nodal o cuspidal), indicando el grado y número de puntos dobles, cúspides, inflexiones y multitangentes.

77. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ una cúbica racional. Demostrar que existe una parametrización de $\mathcal{C}$ de modo que los tres puntos de $\mathcal{C}$ correspondientes a parámetros t_1, t_2, t_3 están alineados si y solo si

a. $t_1 t_2 t_3 = 1$, si $\mathcal{C}$ posee un nodo,
b. $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, si $\mathcal{C}$ posee una cúspide.