Examen de Curvas Algebraicas. Grupo B. Septiembre de 2009

Teoría

Duración: 50 min

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos. Justificar todas las respuestas.

1. (3 puntos) Definir curva racional. Definir curva irreducible. Dar ejemplos. Demostrar que toda curva racional es irreducible.

Examen Final de Curvas Algebraicas; grupo B; Septiembre de 2009

Problemas

Duración: 3 horas

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos. Notación: $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$, $P_4 = (1:1:1)$.

Justificar todas las respuestas.

2. (3 puntos) Sea cúbica $\mathcal{C}$ de ecuación $XY^2 = (X-1)^2$.

a. Hallar las asíntotas y ramas parabólicas de $\mathcal{C}$ y hacer una representación gráfica de la parte real de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$.

b. Demostrar que existe una transformación proyectiva del plano proyectivo que lleva la completada proyectiva $\overline{\mathcal{C}}$ en el Nudo de Newton, de ecuación $Y^2Z - X^3 - X^2Z = 0$.

c. Hallar los puntos en común de $\overline{\mathcal{C}}$ con la curva de ecuación $X^2 - Y^2 = Z^2$ y las multiplicidades de intersección de los mismos.

3. (1.5 puntos) Hallar las cuárticas singulares del haz $a(X^4 + Y^4 + Z^4) + bXYZ^2 = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

4. (2.5 puntos) Verdadero o falso:

a. Las cuárticas planas proyectivas complejas que pasan por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y son singulares en P_3 forman un espacio proyectivo de dimensión ocho.

b. Para cada $n \geq 3$, las inflexiones de la curva de Fermat $\mathcal{C}_n$ están alineadas, donde $\mathcal{C}_n = \mathtt{V}(X^n + Y^n - Z^n)$.

c. La única solución en $\mathbb{C}^3$ del sistema

$$\begin{cases} X+Y+Z &= 0 \\ X^2+Y^2+Z^2 &= 0 \\ X^3+Y^3+Z^3 &= 0 \end{cases}$$

es $X = Y = Z = 0$.