

Cómo obtener curvas con formas predeterminadas a partir de circunferencias

M.J. de la Puente
Dpto. de Algebra UCM
mpuente@mat.ucm.es

Resumen

We produce several algebraic curves, some well-known, some new, out of circles, by means of two classical (mutually reciprocal) algebraic methods: blow-down and blow-up.

1. Introducción

Una mirada atenta a nuestro alrededor nos revela que vivimos en un mundo poblado de curvas. En los fenómenos naturales aparecen curvas de distinta índole: se forman *circunferencias* concéntricas al arrojar una piedra a una masa de agua en calma, las órbitas planetarias son *elipses* y las caracolas son *espirales*. El arco iris, de delicados colores, es otro ejemplo fascinante de arco de curva. Vemos curvas en la ciudad: un chorro de agua que surge con una cierta inclinación describe una *parábola*, una cadena o un cable que cuelga de dos puntos colocados a la misma altura dibuja una *catenaria*, el reflector sobre el borde de una rueda de bicicleta describe una *cicloide*. El espirógrafo, juguete diseñado por D. Fisher, que data de 1965, no traza espirales sino hermosas *trocoides* (por lo que, más bien, debería llamarse *trocoidógrafo*). En la ciencia física nos topamos con más curvas: la *braquistócrona* (o curva de descenso más rápido), la *tautócrona* (o curva en la que el tiempo de caída a su punto más bajo no depende del punto inicial), las curvas de los problemas predador-presa, etc. También abundan las curvas en las ciencias sociales. En este caso se trata de las gráficas de las distribuciones de las variables

aleatorias, siendo la *campana de Gauss* la más habitual. No nos debe extrañar la ubicuidad de las curvas pues, como decía Galileo, “el Universo está escrito en lenguaje matemático, siendo las letras triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas ...”

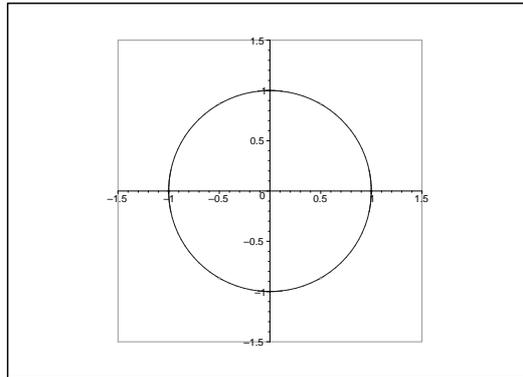


Figura 1: Circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

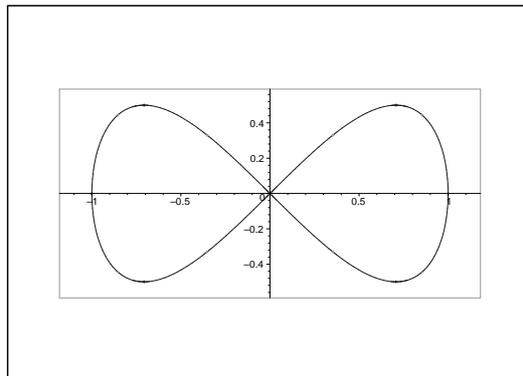


Figura 2: Lemniscata de Huygens.

El atractivo de ciertas curvas hace que sean usadas como marcas, en publicidad: tres elipses tangentes en Toyota y una en Ford, Kia, Hyundai o Lexus, una parábola en Thyssen o tres circunferencias secantes en Krupp. Por otro lado, hacemos uso práctico de algunas curvas, por sus propiedades. Así, la manguera de un extintor de incendios o una cinta cassette están enrolladas

en espiral y el perfil de un tornillo, un solenoide o un cable antiguo de teléfono tienen forma de *hélice*.

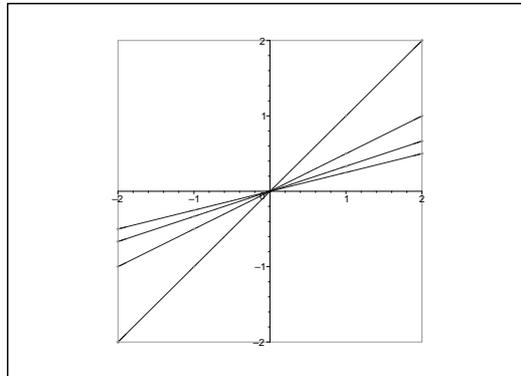


Figura 3: Rectas que pasan por el origen.

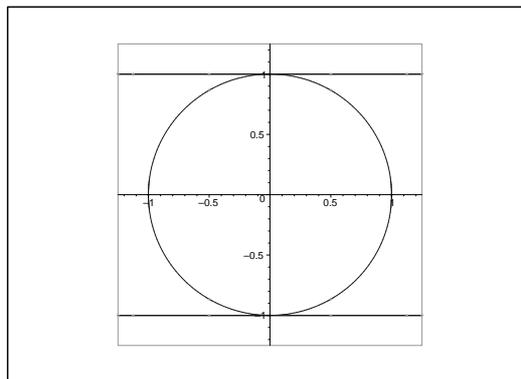


Figura 4: Rectas tangentes a la circunferencia en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Sin duda alguna, la *circunferencia* es, tras la recta, la curva más elemental. Bastan un punto, llamado *centro*, y una cantidad positiva, llamada *radio*, para describirla. Sabemos que la circunferencia \mathcal{C} de centro O y radio uno es el conjunto de los puntos P del plano que distan de O una unidad.

Si dotamos al plano de un sistema cartesiano de coordenadas y hacemos que el centro O coincida con el origen de coordenadas $(0, 0)$, entonces \mathcal{C} será el conjunto de los puntos $P(x, y)$ que satisfacen la igualdad $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, ver

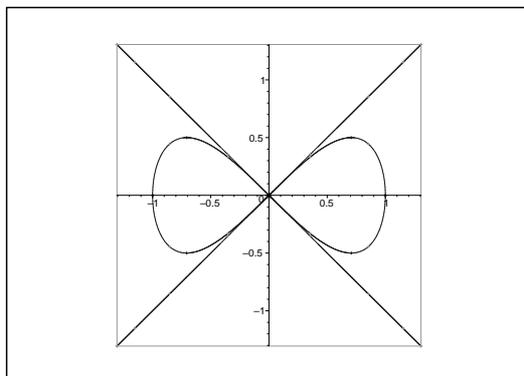


Figura 5: Rectas tangentes a la lemniscata en el origen.

figura 1. Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado y pasando todos los términos al primer miembro, obtenemos una condición equivalente

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Como las coordenadas (x, y) de los puntos de \mathcal{C} satisfacen la *relación algebraica* (1), diremos que la circunferencia es una *curva algebraica*. No debemos creer que todas las curvas mencionadas más arriba son algebraicas: por ejemplo, la cicloide, la catenaria, las espirales y algunas trocoides no lo son. Tampoco son algebraicas la braquistócrona ni la tautócrona, que resultan ser cicloides invertidas.

A la elegante belleza de las curvas algebraicas se suma la simplicidad de su presentación: un polinomio en dos variables (x, y) en el caso anterior), es todo lo que necesitamos para describir una tal curva. En otras palabras, en el polinomio (sumas y productos de potencias de x e y) está resumida toda la geometría de la curva.

El programa de ordenador *MAPLE*, paquete *algcurves*, dibuja una curva algebraica con gran precisión, a partir, exclusivamente, de su polinomio. Con él hemos producido las figuras de estas notas.

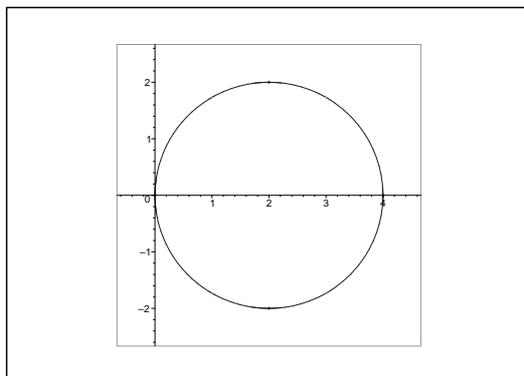


Figura 6: Circunferencia $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

2. Implosión y explosión

A continuación vamos a *obtener curvas algebraicas, con formas predeterminadas, a partir de circunferencias u otras curvas conocidas*, mediante dos procesos algebraicos: *la implosión y la explosión*. Con ello obtendremos, en primer lugar, algunas curvas famosas (la *lemniscata de Huygens* y la curva *piriforme*), para posteriormente obtener curvas nuevas. En efecto, las curvas con formas de *labios, corazón, punta de flecha y pisciforme* se presentan en estas notas por vez primera, esto es, hasta donde sabemos, dichas curvas no aparecen en los tratados sobre curvas al uso.

Comencemos con la circunferencia (1). Tomamos una variable nueva, z , y sustituimos y por z/x en la ecuación (1), obteniendo $x^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1 = 0$. Multiplicando por x^2 , para quitar denominadores, llegamos a la ecuación

$$x^4 + z^2 - x^2 = 0. \quad (2)$$

La curva \mathcal{L} asociada a la ecuación (2) se conoce como *lemniscata de Huygens*, ver figura 2. *Cristiaan Huygens* (1629–1695) fue un matemático holandés entre cuyos logros está la patente del primer reloj de péndulo. Es fácil formar una lemniscata (que significa curva en forma de ocho) con las manos. Tomamos una cinta circular, sosteniéndola con cuatro dedos de una mano y, con el pulgar y el índice de la mano libre, pegamos dos puntos de la cinta. Este pegado se traduce al lenguaje matemático en la sustitución

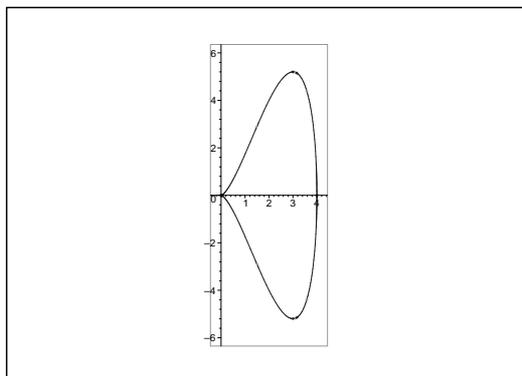


Figura 7: Curva piriforme.

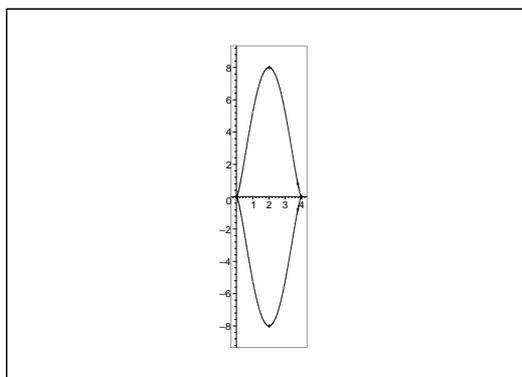


Figura 8: Curva en forma de labios.

de y por z/x , proceso conocido como *implosión* (*blow-down*, en inglés). Si $y = z/x$ entonces $z = yx$, lo que, en el plano coordenado XZ , proporciona las ecuaciones de *todas* las rectas que pasan por el origen: cada recta corresponde a un valor de y (que es la pendiente de dicha recta), ver figura 3.

Tras la implosión, los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ de \mathcal{C} vienen a coincidir en el punto $(0, 0)$ de \mathcal{L} . Asimismo, la recta $y = 1$, tangente a \mathcal{C} en el punto $(0, 1)$, se transforma en la recta $z = x$, mientras que la recta $y = -1$, va a parar a la recta $z = -x$, ver figuras 4 y 5. No es extraño, pues $z = x$ y $z = -x$ son las rectas tangentes a \mathcal{L} en el origen $(0, 0)$.

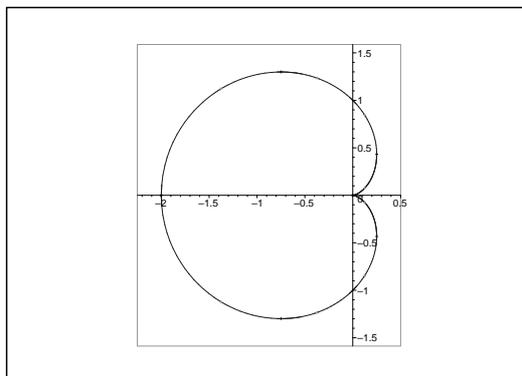


Figura 9: Cardioide.

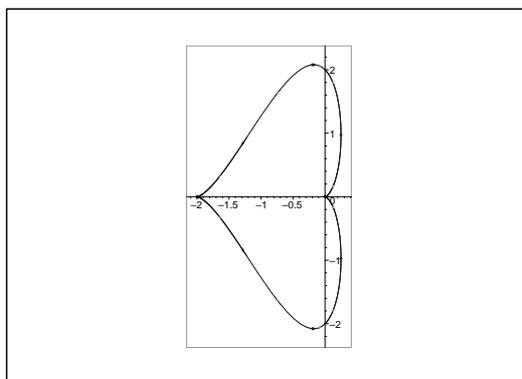


Figura 10: Curva en forma de corazón.

El proceso contrario a la implosión se denomina *explosión* (*blow-up*). Se trata de sustituir z por el producto xy , pasando pues del plano XZ al plano XY . Si efectuamos el cambio $z = xy$ en la ecuación (2) obtenemos $x^4 + (xy)^2 - x^2 = 0$, o equivalentemente, a

$$x^2(x^2 + y^2 - 1) = 0. \quad (3)$$

Que el producto de x^2 por $x^2 + y^2 - 1$ sea nulo, significa que uno de los dos factores debe anularse. Por consiguiente, cada punto (x, z) de \mathcal{L} con x distinto de cero (esto es, cada punto de \mathcal{L} , salvo el origen) se transforma en un punto

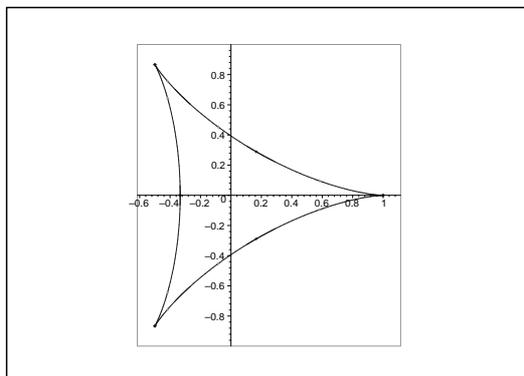


Figura 11: Curva tricúspide.

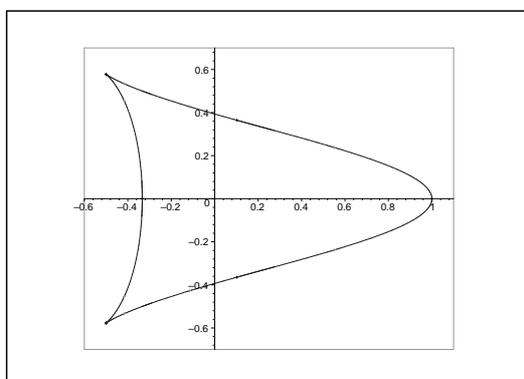


Figura 12: Curva en forma de punta de flecha.

de la circunferencia \mathcal{C} . Además, el punto $(0, 0)$ de \mathcal{L} *explota*, convirtiéndose en dos puntos de \mathcal{C} , que son $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Mediante esta explosión, las rectas $z = x$ y $z = -x$, que se cortan en el origen, se transforman en las rectas $y = 1$ e $y = -1$, que no se cortan. Este modo de *eliminar un punto de auto-intersección en una curva plana* es habitual en nuestras ciudades: mediante la construcción de pasos subterráneos, los arquitectos municipales eliminan las intersecciones de vías, para conseguir un tráfico más fluido. En resumen: hemos *explorado* el origen de coordenadas del plano XZ y, recíprocamente, hemos *implosionado* los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ del plano XY .

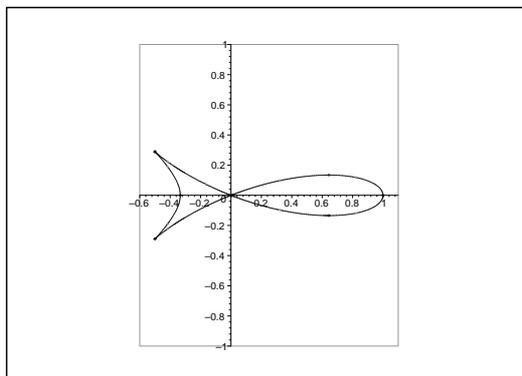


Figura 13: Curva pisciforme.

Consideremos ahora la circunferencia \mathcal{D} de centro $(2, 0)$ y radio 2, ver figura 6. Sus puntos (x, y) satisfacen la igualdad $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2} = 2$. Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando los cuadrados y pasando todo al primer miembro, obtenemos la siguiente ecuación de \mathcal{D}

$$x^2 - 4x + y^2 = 0. \quad (4)$$

El origen pertenece a \mathcal{D} , ya que $(0, 0)$ satisface la ecuación (4). ¿En qué se transformará \mathcal{D} mediante la implosión del origen? Veamos: en (4), sustituimos y por z/x y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por x^2 , para quitar denominadores, obteniendo

$$x^4 - 4x^3 + z^2 = 0. \quad (5)$$

Se trata de una curva *piriforme* \mathcal{P} (curva en forma de pera, aunque, a juzgar por la gráfica, se parece más a un queso gallego), ver figura 7. La piriforme fue estudiada por vez primera por J. Wallis en 1685. Como resultado de la implosión, en \mathcal{P} ha aparecido un punto de curioso aspecto *cuspidal*, algo así como la comisura de unos labios. Si ahora implosionamos el punto $(4, 0)$ de \mathcal{P} , ¿conseguiremos el contorno de unos labios? Veamos: en (5), sustituimos z por $t/(x - 4)$, obteniendo $x^4 - 4x^3 + \left(\frac{t}{x-4}\right)^2 = 0$. Quitando denominadores, operando y simplificando, llegamos a la ecuación

$$x^6 - 12x^5 + 48x^4 - 64x^3 + t^2 = 0, \quad (6)$$

que describe una curva algebraica del plano XT con la forma de labios (pronunciando la *u* francesa) buscada, ver figura 8.

La curva *cardioide* (en forma de corazón) fue considerada por O.C. Roemer, en 1676, y P. de la Hire en 1708, ver figura 9. Se trata de la trayectoria de un punto colocado sobre una circunferencia \mathcal{E} que rueda sin deslizamiento alrededor de otra circunferencia fija \mathcal{E}' , de idéntico radio. Es fácil visualizar esta curva, usando dos monedas de igual valor. En el borde de una de ellas marcamos un punto. Dejando fija la moneda no pintada, hacemos girar una sobre otra y el punto describirá una *cardioide* \mathcal{C} . Su ecuación es

$$(x^2 + y^2 + x)^2 - x^2 - y^2 = 0. \quad (7)$$

A pesar de su nombre, \mathcal{C} no se parece mucho a la silueta de corazón del imaginario colectivo, pues el punto $(-2, 0)$, que pertenece a \mathcal{C} , debería ser cuspidal. ¿Conseguiremos la forma de corazón deseada efectuando una implosión del punto $(-2, 0)$? Veamos: sustituimos y por $z/(x+2)$, obteniendo $\left(x^2 + \left(\frac{z}{x+2}\right)^2 + x\right)^2 - x^2 - \left(\frac{z}{x+2}\right)^2 = 0$, donde, operando y simplificando llegamos a la larga expresión siguiente, cuya curva está representada en la figura 10,

$$\begin{aligned} x^8 + 10x^7 + 40x^6 + 80x^5 + 2x^4z^2 + 80x^4 + 32x^3 \\ + 10x^3z^2 + 15x^2z^2 + 4xz^2 + z^4 - 4z^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

La curva *hipocicloide de tres puntas* o *deltoide* (por su parecido con la letra griega delta mayúscula) fue estudiada en profundidad por L. Euler (1707–1783) y J. Steiner (1796–1863). Es la trayectoria de un punto colocado sobre una circunferencia \mathcal{E} que rueda sin deslizamiento por el interior de otra circunferencia fija \mathcal{E}' , cuando el radio de \mathcal{E} es la tercera parte del de \mathcal{E}' . Podemos ver esta curva usando dos monedas, una de las cuales debe tener un radio tres veces mayor que la otra. También se denomina *tricúspide*, por poseer tres puntos cuspidales, ver figura 11. Su ecuación es

$$3(x^2 + y^2)^2 + 8x(3y^2 - x^2) + 6x^2 + 6y^2 - 1 = 0. \quad (9)$$

A partir de la tricúspide \mathcal{T} , vamos a encontrar una curva *pisciforme*, esto es, en forma de pez. Primero explotamos en \mathcal{T} el punto $(1, 0)$, (¿sabrías hacerlo, lector?) obteniendo una curva \mathcal{F} en forma de *punta de flecha redondeada*,

de ecuación

$$3x^2z^4 + 6x^2z^2 + 3x^2 - 6xz^4 + 24xz^2 - 2x + 3z^4 + 6z^2 - 1 = 0, \quad (10)$$

ver figura 12. A continuación, implosionamos dos puntos de esta curva, haciendo $z = t/x$ y obtenemos la ecuación

$$3x^6 - 2x^5 + 6x^4t^2 - x^4 + 24x^3t^2 + 3x^2t^4 + 6x^2t^2 - 6xt^4 + 3t^4 = 0, \quad (11)$$

cuya curva es la *pisciforme* buscada, ver figura 13.

3. Conclusiones

Ahora dispones, lector, de una doble herramienta (la implosión y la explosión) para crear nuevas curvas a partir de curvas conocidas, según tu propio gusto.

Agradecimientos

Este artículo ha sido redactado con el apoyo del proyecto investigador UCM 910444.

Referencias

- [1] José M. Álvarez. *Curvas en la historia, 2 vols.* Nivola, Madrid, 2006.
- [2] Robert Bix. *Conics and cubics: a concrete introduction to algebraic curves.* Springer-Verlag, Nueva York, 1998.
- [3] Carl B. Boyer. *A history of mathematics.* John Wiley and sons, Inc., NY, 1968.
- [4] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane algebraic curves.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1986. Traducción de John Stillwell al inglés del original alemán de 1981.

- [5] Julian L. Coolidge. *A treatise on algebraic plane curves*. Dover Phoenix editions, Mineola, NY, 2004. Publicado por primera vez en 1931 por Oxford University Press, republicado en 1959 por Dover.
- [6] Gerd Fischer. *Plane algebraic curves*. AMS, Providence, RI, 2001. Traducción de Leslie Kay al inglés del original en alemán de 1994.
- [7] Percival Frost. *An elementary treatise on curve tracing*. Dover Phoenix editions, Mineola, NY, 2004. Republicación de la quinta edición (1960) de la obra publicada por primera vez en 1872 por Chelsea Publishing Company.
- [8] William Fulton. *Curvas algebraicas*. Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1971.
- [9] Christopher G. Gibson. *Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [10] Wendy Hawes. Wendy's picture book: geometry of algebraic curves. Colección de gráficos de curvas algebraicas, curso 2MP65 (1992–93), Departament of Pure Mathematics, Universidad de Liverpool.
- [11] Dennis Lawrence. *A catalogue of special plane curves*. Dover publications, Inc., Nueva York, 1972.
- [12] Xah Lee. Visual dictionary of special plane curves. World Wide Web, http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html.
- [13] Ricardo Moreno. *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría*. Nivola, Madrid, 2005.
- [14] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. The Mac Tutor History of Mathematics archive. World Wide Web, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>.
- [15] María Jesús de la Puente. *Curvas algebraicas y planas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Cádiz, 2007.

- [16] Eugene V. Shikin. *Handbook and atlas of curves*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [17] Dirk J. Struik. *A concise history of mathematics*. Dover publications, Inc., Nueva York, 1967. 3^a edición revisada.
- [18] Israel Vainsencher. *Introdução às curvas algébricas planas*. IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- [19] Robert J. Walker. *Algebraic curves*. Springer-Verlag, Nueva York, 1950.