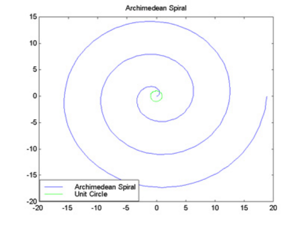
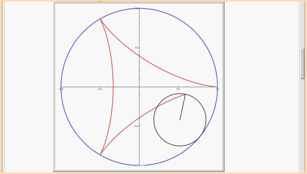
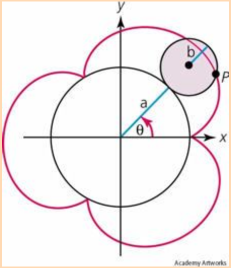
Historia de las Curvas II

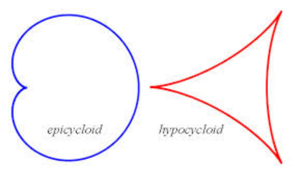
M.J. de la Puente
Dpto. Álgebra, Fac. Matemáticas, UCM, Madrid
mpuente@mat.ucm.es

Seminario de Historia de las Matemáticas 2014–15


Archimedean Spiral
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
Archimedean Spiral
Unit Circle

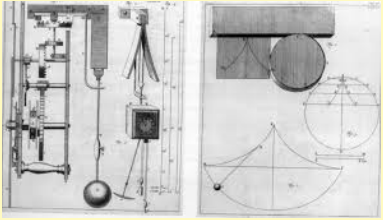



y
b
P
a
θ
x
Academy Artworks


epicycloid
hypocycloid


TDK
90
DYNAMIC CASSETTE LOW NOISE HIGH OUTPUT


ROMPASE EN CASO
DE INCENDIO



S. XVIII: CURVAS EN 2D Y 3D

- C. Maclaurin (1698–1746), Geometria Organica 1720 y De linearum geometricarum proprietatibus 1720 $\rightsquigarrow$ curvas alg. grados 2,3, etc. y Teorema de Bézout!!
- G. Cramer (1704–1752), Introduction á l'analyse de lignes courbes algébriques 1750, ¡250 figuras de curvas!
- L. Euler (1707–1783), Introductio in Analysis Infinitorum (v. II), concepto actual de función, gráficas de fons. trig., curvas y superf. en ecs. paramétricas
- A.C. Clairaut (1713–1765), Recherches sur les courbes á double courbure 1731, primer tratado de geometría en 3D, curvas en el espacio estudiadas mediante sus proyecciones planas, curvas como intersección de dos superficies, geodésicas en superf. cuádricas,
- E. Bézout (1730–1783), Théorie générale des équations algébriques 1779, Teor: dos curvas de grados m y n se cortan en mn puntos, en general $\rightsquigarrow$ puntos singulares y soluciones complejas

S. XVIII y XIX: GEOMETRÍAS

- G.C. Fagnano (1682–1766) $\rightsquigarrow$ rectificación de lemniscata de Bernoulli $\rightsquigarrow$ integral "imposible", idem elipse $\rightsquigarrow$ integral elíptica, función elíptica (Jacobi, Weierstrass, etc.) ¿long. elipse?
  $L(a,b) \simeq \pi\left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right)$ Ramanujan (1887–1920)
  GEOMETRÍA: ¿ ANALÍTICA (i.e., CON COORD. PROYECTIVAS hoy decimos: ALGEBRAICA) O SINTÉTICA?
- M. Chasles (1793–1880), G. PROYECTIVA, geom. enumerativa, historia de las mat. Aperçu historique sur l'origine et le développement des métodes en géométrie 1837
- J. Plücker (1801–1868), G. PROYECTIVA, Analytisch–Geometrische Entwickelungen 1828 (v. I), 1831 (v. II), dualidad, invariantes, $d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa$ (clase), $g = \binom{d-1}{2} - \delta - \kappa$ (género), familias uniparamétricas de curvas (haces)
- J. Steiner (1796–1863) G. SINTÉTICA, Systematische Entwickelung, 1832 $\rightsquigarrow$ inversión, dualidad, desigualdad isoperimétrica, $n = 2$

S. XVIII y XIX: (cont.) GEOMETRÍAS

- L. Cremona (1830–1903), G. PROYECTIVA, cúbicas alabeadas, curvas alg. planas, transf. de Cremona
- E. Césaro (1859–1906),G. INTRÍNSECA, Lezione di geometria intrinseca 1896 coordenadas locales: dir. tangente, normal y binormal (triedro de Frenet) J.F. Frenet (1816–1900) y J.A. Serret (1819–1885)

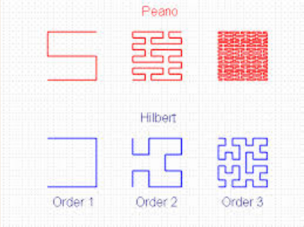
s. XIX y XX: TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

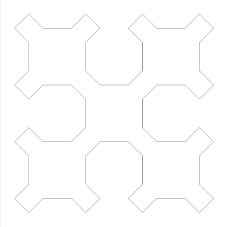
C. Jordan (1838–1922), Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique 1887,
Teor: El complementario de una curva cerrada simple y plana $\mathcal{C}$ tiene dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada, y $\mathcal{C}$ es la frontera común
Antes: Bolzano lo conjetura.
Después:

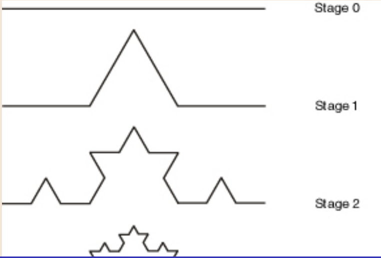
- controversia sobre dem. (Veblen),
- mayor precisión: Teor. Jordan–Schoenflies: toda curva de Jordan $\phi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ puede extenderse a un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$
- generalización a dim arbitraria: X es esfera topológica n–dim si es la imagen continua e inyectiva de S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$. Teor. separación Lebesgue–Brower: el complementario de X tiene dos componentes conexas y X es la frontera común (1911)
- hoy: ¡ muchas demostraciones diferentes!

s. XIX y XX: ¡QUE CURVAS TAN RARAS!

Curva en ec. paramétricas: $x = f(t)$, $y = g(t)$, con f, g continuas
CURVAS QUE LLENAN EL PLANO: de Peano (1890), de Hilbert, de Sierpinski, copo de nieve de von Koch, etc. También en 3D

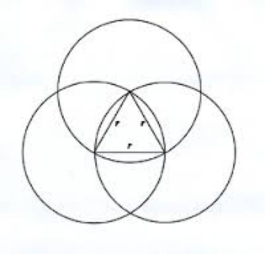


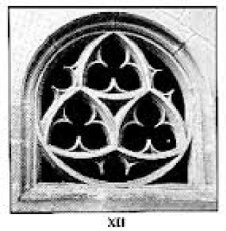




S. XIX Y XX: ¡QUE CURVAS TAN RARAS! (CONT.)

C. DE ANCHO CONSTANTE: triángulo de Reuleaux ,Teor. Barbier (1860)

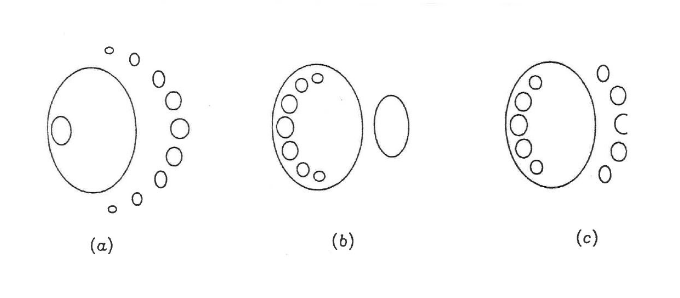




París, 1900, P. 16 tiene dos partes (dos áreas de la matem.): para cada $n \in \mathbb{N}$ determinar

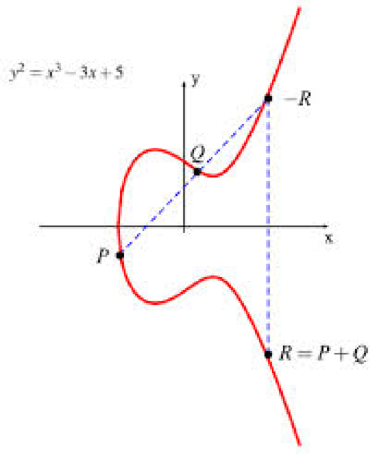
- las posiciones relativas de las ramas (i.e., c. conexas) de las curvas alg. planas reales de grado n, (y análogo para superficies alg.)
- una cota superior para el número de ciclos límite que admiten los campos vectoriales en el plano definidos por polinomios de grado n, así como las posiciones relativas de los mismos.

S. XX: PROBLEMA 16 DE HILBERT (CONT.)



¿Qué sabe Hilbert al plantear este problema? Cota superior para num. cc. de curvas alg. planas reales es $c(n) = \binom{n-1}{2} + 1$; e.g., $c(6) = 11$, Harnack (1876) Primera parte ¿resuelta para curvas? NO, solo resuelto para $n \leq 7$. ¿Segunda parte resuelta? NO

CURVAS ELÍPTICAS EN LOS S. XX Y XXI



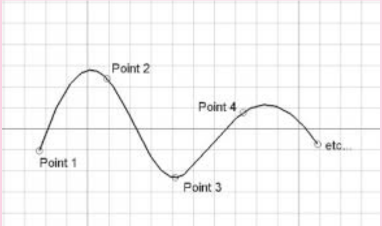
CURVA ELÍPTICA: curva alg. lisa $\mathcal{C}$ de género 1, e.g., $y^2 = x^3 - 3x + 5$
un punto $O \in \mathcal{C}$, adición en $\mathcal{C}$ basada en O

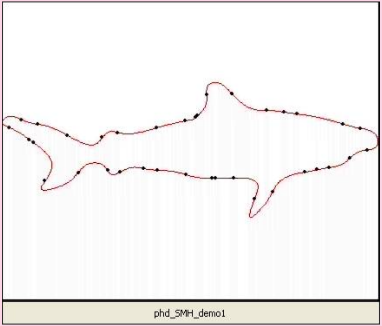
CURVAS ELÍPTICAS EN LOS S. XX Y XXI (CONT.)

- CONJETURA DE FERMAT: si $n \geq 3$, las soluciones enteras de la ecuación $x^n + y^n = z^n$ son triviales. Demostrada por A. Wiles, 1995
  - Esquema: usar idea de G. Frey (dem. por K. Ribet): si existen $n \geq 3$ y $a, b, c \in \mathbb{Z}$ no triviales con $a^n + b^n = c^n \Rightarrow$ la curva $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ es elíptica NO modular. Pero esto contradice otra conjetura (Conj. de Shimura–Taniyama, CST)
  - Wiles demuestra (con R. Taylor) algo más débil que CST, ¡ pero suficiente! Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, 1995
- CRIPTOGRAFÍA Y CRIPTOANÁLISIS: varios sistemas de codificación de clave pública basados en operación en cur. elípticas (definidas sobre cuerpos finitos), en uso desde 2004.

s. XX y XXI: CURVAS PARA TRAZAR CURVAS

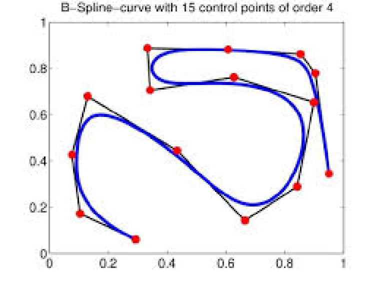
CURVAS SPLINE: interpolación polinómica a trozos usualm. grado 3 (es sufic.) $\rightsquigarrow$ programas gráficos para ordenador





s. XX y XXI: CURVAS PARA TRAZAR CURVAS (cont.)

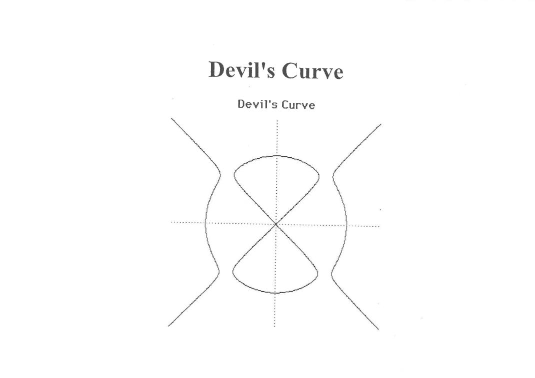
CURVAS DE BÉZIER (1962) o DE CASTELJAU (1959)



BIBLIOGRAFÍA

- DIVULGACIÓN:
- R. Moreno, Plücker y Poncelet: Dos modos de entender la geometría, Nivola, 2005
- M.J. de la Puente, Cómo obtener curvas algebraicas a partir de circunferencias, Sociedad Puig Adam, n.85, 2010
- E.V. Shikin, Handbook and Atlas of Curves, CRC Press, 1995
- R. Ibáñez,
- A. Pérez,
- M.C. Martínez, (y más)
- SOBRE CURVAS (mis preferidos):
- M.J. de la Puente, Curvas algebraicas y planas, Serv. Pub. U. Cádiz, 2007
- A.S. Fedenko, Problemas de geometría diferencial, MIR
- G. Fischer, Plane algebraic curves,
- C.G. Gibson, Elementary theory of algebraic curves: an undergraduate introduction,

¡ HASTA EL DIABLO TIENE SU CURVA!



(Cramer)

¡Muchas gracias!